T.C.
YILDIZ TEKNİK ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

LİNEER VE LİNEER OLMAYAN ADİ DİFERANSİYEL DENKLEM SİSTEMLERİNİN SİNC-GALERKİN METODU İLE ÇÖZÜLMESİ

İsmail ÖNDER

YÜKSEK LİSANS TEZİ
Matematik Mühendisliği Anabilim Dalı
Matematik Mühendisliği Programı

Danışman
Dr. Öğr. Üyesi Müslüm ÖZIŞIK

Eş-Danışman
Prof. Dr. Aydın SEÇER

Temmuz, 2021

T.C.
YILDIZ TEKNİK ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

LİNEER VE LİNEER OLMAYAN ADİ DİFERANSİYEL DENKLEM SİSTEMLERİNİN SİNC-GALERKİN METODU İLE ÇÖZÜLMESİ

İsmail ÖNDER tarafından hazırlanan tez çalışması 27.07.2021 tarihinde aşağıdaki jüri tarafından Yıldız Teknik Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Mühendisliği Anabilim Dalı Matematik Mühendisliği Programı **YÜKSEK LİSANS TEZİ** olarak kabul edilmiştir.

Dr. Öğr. Üyesi Müslüm ÖZIŞIK
Yıldız Teknik Üniversitesi
Danışman

Prof. Dr. Aydın SEÇER
Yıldız Teknik Üniversitesi
Eş-Danışman

Jüri Üyeleri

Dr. Öğr. Üyesi Müslüm ÖZIŞIK, Danışman
Yıldız Teknik Üniversitesi ____________________

Prof. Dr. Fatih TAŞÇI, Üye
Yıldız Teknik Üniversitesi ____________________

Doç. Dr. Sertan ALKAN, Üye
İskenderun Teknik Üniversitesi ____________________

Danışmanım Dr. Öğr. Üyesi Müslüm ÖZIŞIK sorumluluğunda tarafımca hazırlanan Lineer ve Lineer Olmayan Adi Diferansiyel Denklem Sistemlerinin Sinc-Galerkin Metodu İle Çözülmesi başlıklı çalışmada veri toplama ve veri kullanımında gerekli yasal izinleri aldığımı, diğer kaynaklardan aldığım bilgileri ana metin ve referanslarda eksiksiz gösterdiğimi, araştırma verilerine ve sonuçlarına ilişkin çarpıtma ve/veya sahtecilik yapmadığımı, çalışmam süresince bilimsel araştırma ve etik ilkelerine uygun davrandığımı beyan ederim. Beyanımın aksinin ispatı halinde her türlü yasal sonucu kabul ederim.

İsmail ÖNDER

Aileme ithafen

TEŞEKKÜR

Bu Yüksek Lisans tezini sunarken, teşekkür etmem gereken kişilere değinmek istiyorum.

Öncelikle danışmanlarım Dr. Müslüm ÖZIŞIK ve Prof. Dr. Aydın SEÇER'e tez konusunun belirlenmesinde, araştırma yöntemlerinde, probleme yaklaşımda, bilgisayar destekli kodların yazılmasında ve tez sürecine dair her türlü katkı ve destekleri için kendilerine teşekkür etmek istiyorum.

Akademik hayata ilk adımı atmama vesile olan ve değerli fikirleri ile destek olan Prof. Dr. Bayram Ali ERSOY'a, akademik kariyer konusundaki tavsiyeleri için Dr. Eyyüp GÖREN'e, Yıldız Teknik Üniversitesi'ndeki meslektaşlarıma da ayrıca teşekkür ederim.

Ve de bana her konuda destek olan aileme ve samimi arkadaşlarıma da teşekkür ederim.

İsmail ÖNDER

İÇİNDEKİLER

SİMGE LİSTESİ

B(D)	D tanım kümesindeki analitik fonksiyonların sınıfı
N	Eşit aralıklı düğümlerin ağ (*grid*) boyutu
z_k	Eşit aralıklı karmaşık düğümler
x_k	Eşit aralıklı reel düğümler
D_E	Göz biçimli (*eye-shaped*) tanım kümesi
$\langle . \, , \, . \rangle$	İç çarpım
$\mathbb{C}$	Karmaşık uzay
ϕ	Konform dönüşümü
$\|.\|$	Norm
$\mathbb{R}$	Reel uzay
D_s	Şerit biçimli (*strip-shaped*) tanım kümesi
ψ	Ters konform dönüşümü
Γ	Ters konform dönüşümünün görüntü kümesi
$B(y_0; r)$	y_0 merkezli ve r yarıçaplı açık küre
$\tilde{B}(x_0; r)$	y_0 merkezli ve r yarıçaplı kapalı küre
$S(x_0; r)$	y_0 merkezli ve r yarıçaplı küre

KISALTMA LİSTESİ

ADD	Adi Diferansiyel Denklemler
KDD	Kısmi Diferansiyel Denklemler
SDP	Sınır Değer Problemi
SGM	Sinc-Galerkin Metodu

ŞEKİL LİSTESİ

TABLO LİSTESİ

ÖZET

Lineer ve Lineer Olmayan Adi Diferansiyel Denklem Sistemlerinin Sinc-Galerkin Metodu İle Çözülmesi

İsmail ÖNDER

Matematik Mühendisliği Anabilim Dalı
Yüksek Lisans Tezi

Danışman: Dr. Öğr. Üyesi Müslüm ÖZIŞIK
Eş-Danışman: Prof. Dr. Aydın SEÇER

Bu Yüksek Lisans tezinde, lineer ve lineer olmayan adi diferansiyel denklem (ADD) sistemlerinin yarı analitik çözümleri Sinc-Galerkin metodu (SGM) kullanılarak incelenmiştir. Bu yöntemin, kesirli ve tam sayılı mertebeden, adi ve kısmi diferansiyel denklemlerde yaklaşık çözüm elde etmedeki etkililiği bilindiğinden, adi diferansiyel denklem sistemlerinde de aynı etki ve başarıya ulaşıldığı belirtilmektedir. Ayrıca, Sinc-Galerkin yöntemi uzun yıllardır literatürde etkili sonuçlar veren yarı analitik yöntemler arasında yer almaktadır.

İlk bölümde (1), kapsamlı bir literatür taraması yapılmıştır. Tezin amacı ve tezin literatüre katkısı da ilk bölümde (1) ifade edilmektedir. Karmaşık analiz, analitik fonksiyonlar, dönüşümler ve konform dönüşüm hakkında ön bilgiler tezin ikinci bölümünde (2) yer almıştır. Bu bölüm, yüksek lisans tezinde tanıtılan yöntemle ilgili ön bilgileri, tanımları ve teoremleri içermektedir.

Üçüncü bölümde (3), Sinc-Galerkin metodu (SGM) tanıtılmıştır. Yöntem, adi diferansiyel denklem sistemi üzerinde genişletilmiş, ayrık sistem elde edilmiş, sistemin hata yaklaşımına ve sistemin çözüm denklemine yer verilmiştir. Dördüncü bölümde lineer ve lineer olmayan adi diferansiyel denklem sistemlerinin 4 örneği incelenmiştir (4). Ayrıca SGM ve diğer metotlar ile elde edilen sayısal sonuçlara yer verilmiştir. Şekiller ve sayısal sonuçlar Maple Yazılımı ile elde edilmiştir. Son bölümde (5), yöntemin etkinliğine ilişkin bazı sonuçlara ve tartışmalara yer verilmiştir. Şekillerin ve sayısal sonuçların elde edildiği Maple Yazılım kodları Ek-A'da verilmiştir.

Anahtar Kelimeler: Sinc-Galerkin metodu, yarı analitik çözümler, adi diferansiyel denklem sistemleri

ABSTRACT

Solutions of Linear and Non Linear Systems of Ordinary Differential Equations with Sinc-Galerkin Method

İsmail ÖNDER

Department of Mathematical Engineering
Master of Science Thesis

Advisor: Dr. Muslum OZISIK
Co-advisor: Prof. Dr. Aydin SECER

In this Master of Science thesis, semi-analytical solutions of linear and nonlinear ordinary differential equation (ODE) systems was studied by using Sinc-Galerkin method (SGM). Since it is known that the use of this method in ordinary and partial differential equations with fractional and integer order is quite successful, it is stated that the same effect and success are achieved in systems of ordinary differential equations. In addition, SGM has been among the semi-analytical methods that give effective results in the literature for many years.

In the first section (1), an extensive literature review was included. Main purpose of thesis and original contribution of thesis are stated in the first section (1). Preliminary information about complex analysis, analytical functions, mappings and conformal mapping was included in the second section (2). This section contains preliminaries, definitions and theorems about the method which introduced in the master of science thesis. The Section (3) includes the introduction of Sinc-Galerkin method (SGM). The method was expanded on the system of ODE, discrete system was obtained, error approximation and solution of the system was included. Four examples of linear and nonlinear systems of ODE were investigated in the fourth section (4).

Also, numerical results of SGM and other methods were shown. Figures and numerical results were obtained via Maple Software. In the last section (5), some results and discussions on the effectiveness of the method was given. Maple Software codes from which the figures and numerical results are obtained are given in Appendix-A.

Keywords: Sinc-Galerkin method, semi-analytical solutions, systems of ordinary differential equations

YILDIZ TECHNICAL UNIVERSITY
GRADUATE SCHOOL OF SCIENCE AND ENGINEERING

1
GİRİŞ

1.1 Literatür Özeti

Diferansiyel denklemler, matematiksel modellemenin temelidir. Bu nedenle diferansiyel denklem sistemleri birçok bilim dalında (kimya, biyoloji, fizik vb.) ve mühendislikte kullanılmaktadır. Bu kadar yaygın kullanılan diferansiyel denklem sistemleri için çok çeşitli çözüm yöntemleri vardır. Bazı güncel örnekler şöyledir: Yenilenebilir enerji kaynakları [1] ve CO_2 emisyon düzenleme [2], hastalıkların genel formlarının modellenmesi [3–5], suçiçeği [6], güncel bir pandemi olan COVID-19 [7, 8] ve HIV-COVID birleşimi [9]. Bu kaynaklara ek olarak, ekonomi ve tıbbi uygulamalarda da pek çok örnekleri mevcuttur. Ürün yaşam döngüsü [10], elektrikli araçların üretimi ve satışı [11], kesirli modellerle piyasa dengesi oluşturma [12], lojistik ulaşım ağları [13], su dağıtımının kontrolü [14], glikoz-insülin denge dinamiği [15], nöronsal aktiviteler [16] ve toprağın filtrelenmesi işlemi [17], vb.

Diferansiyel denklemler matematiksel modellemenin temellerinden biri olduğu için bilim ve mühendislikte kullanıldığı bilinmektedir. Denklemlerin çözümlerini elde etmek için uzun yıllardır etkili analitik ve sayısal yöntemler geliştirilmiştir. Bu yöntemlerden bazıları analitik yöntemlerdir ve kesin çözüm verirler; *Exponential-function (Exp-function)* metodu [18], *fractional sub-equation* metodu [19], *Riccati-Bernoulli sub-ODE* metodu [20], Hirota metodu [21], $\left(\frac{G'}{G}\right)$-expansion metodu [22], *extended rational sin-cos and sinh-cosh* metodu [23], *rational trigonometric function* metodu [24], vb.

Ayrıca, denklemlerin çözümlerinin elde edilebilmesi için bazı yarı-analitik metotlar da geliştirilmiştir: *Adomian ayrışma (decomposition)* metodu [25], diferansiyel dönüşüm metodu [26], homotopi analiz metodu [27], *fractional iteration* metodu [21], *variational iteration* metodu [28], vb.

Bunların yanısıra, diferansiyel denklemler için sayısal metotlar da mevcuttur;*power series* metodu [29], dalgacık analiz metodu [30], Haar dalgacık metodu [31], Padé yaklaşım metodu [32], vb.

Ayrıca, diferansiyel denklem sistemlerini çözmek için bazı kullanılan bazı sayısal yöntemler polinomları temel almaktadır *(polynomial based)*. Polinom tabanlı çözüm yöntemlerine verilebilecek örnekler mevcuttur. Bernstein polinom metodu [33], Chebyshew interpolasyon metodu [34] ve diferansiyel kuadratür metodu [35] polinom bazlı metotlara örnektir. Bu Yüksek Lisans tezinde, diferansiyel denklem sistemlerinin çözümlerinde kullanılan ana metot yine polinom bazlı metot olan Sinc-Galerkin metodudur.

Sinc fonksiyonu ve kardinalite *(cardinality)* fonksiyonu ilk kez E.T. Whittaker tarafından yayınlanan makalede analiz edilmiştir [36]. SGM ise 1979'da Frank Stenger tarafından yayınlanan makalede tanıtılmıştır [37]. Bu makale, sinc fonksiyonlarının sınır değerli diferansiyel denklemlerde ilk kez kullanımıdır ve sonrasında SGM, sınır değer problemlerinin çözümünde oldukça popüler hale gelmiştir. J. Lund ve K. Bowers ise sinc metodu için kuadratür kuralı hakkında geniş çaplı bir çalışma yapmışlardır [38].

SGM, lineer/lineer olmayan, eliptik, parabolik ve hiperbolik gibi birçok denklem tipinde kullanılabilir ve diferansiyel denklemler adi veya kısmi olabilir. Literatürde bu yöntemin kullanıldığı bazı lineer parabolik [39] ve hiperbolik [40] kısmi diferansiyel denklemleri içeren çalışmalar mevcuttur. Yöntem, ayrıca Poisson [41], Bratu [42], Troesch [43], iki boyutlu Schrödinger [44], Euler-Bernoulli kiriş modelleri [45] gibi bazı özel fenomen denklemlerin çözümleri için de kullanılmıştır. Ayrıca tekil Dirichlet tipli [46] ve lineer olmayan SDP [47] çözümleri için de kullanılmıştır. Ek olarak kesirli türev operatörlerinin literatüre girmesiyle beraber metot kesirli mertebeden SDP [48] ve uzay-kesirli SDP [49] için de kullanılmıştır.

Metodun literatüre girmesinin üzerinden uzun zaman geçmiş olmasına rağmen, üzerinde hala çalışmalar yapılmaya devam edilmektedir. Dördüncü dereceden kısmi türevli Cranck-Nicolson tipli integro-diferansiyel denklemi [50], Grünwald-Letnikov fark operatörlü, yüksek dereceli ve zaman kesirli Schrödinger denklemi [51], farklı şekilli nanopartiküller parçacıkların termal analizi [52] ve iki boyutlu, çift üstel Schrödinger denklemi [53] yapılan çalışmalara örnek olarak verilebilir.

Bu Yüksek Lisans tezinde, literatür taramasından da görülebileceği üzere, üzerinde çalışma yapılmamış olan adi diferansiyel denklem sistemleri üzerinde çalışılmıştır. Metodun etki oranı, diğer sayısal metotlar ile kıyaslanmak suretiyle gösterilmiştir. Bu tez esnasında incelenen Dirichlet tipli adi diferansiyel denklem sistemlerinin genel formu şu şekildedir:

$$\begin{aligned}
&\left[\sum_{i=0}^{2} Q_i \vartheta_1^i(x) + R_i \vartheta_2^i(x)\right] + NL_1(\vartheta_1(x)) + NL_2(\vartheta_2(x)) = f_1(x) \\
&\left[\sum_{i=0}^{2} S_i \vartheta_1^i(x) + T_i \vartheta_2^i(x)\right] + NL_3(\vartheta_1(x)) + NL_4(\vartheta_2(x)) = f_2(x).
\end{aligned} \tag{1.1}$$

Denklem (1.1)'de, $a < x < b$ için $\vartheta_1(a) = \vartheta_1(b) = \vartheta_2(a) = \vartheta_2(b) = 0$. Burada ϑ_1^i ve ϑ_2^i fonksiyonların i'inci türevini temsil etmektedir. Ayrıca Q_i, R_i, S_i ve T_i analitik fonksiyonlardır ve $i = 1 \ldots 4$ ve $j = 1, 2$ için $NL_i(\vartheta_j(x))$ denklemlerin lineer olmayan kısımlarını ifade etmektedir.

1.2 Tezin Amacı

Bu Yüksek Lisans tezinin amacı, lineer ve lineer olmayan adi diferansiyel denklem sistemleri için Sinc-Galerkin metodu kullanarak yaklaşık çözüm elde etmektir.

1.3 Orijinal Katkı

Sinc-Galerkin metodu, adi diferansiyel denklem sistemleri için genişletilmiştir. Literatür taramasında da bahsedildiği üzere, method daha önce sistemler üzerinde kullanılmamıştır. Böylelikle, metodun adi diferansiyel denklem sistemlerinin çözümlerinde de etkili bir metot olduğu ispatlanmıştır.

2
ÖN BİLGİLER

2.1 Karmaşık Analiz Hakkında Ön Bilgiler

Geçen yüzyılda matematikçiler çeşitli bilim dallarından birçok problemlerle karşılaşmışlardır. Problemler farklı alanlardan olsa da benzer şartlara ve özelliklere sahiplerdi. Matematikçiler bu durumu fark ettikten sonra, problemlere yeni bir yaklaşım yöntemi edindiler. Böylelikle önemsiz detaylar ortadan kaldırılmış oldu. Bu yaklaşıma, soyut yaklaşım (*abstract approach*) denir. Soyut yaklaşımın avantajı, önemli ayrıntılara konsantre olma şansına sahip olunmasıdır. Böylece araştırmacının dikkatinin önemsiz ayrıntılarla dağılmadığı açıkça görülmektedir. Araştırmacılar bu gerçeği düşündüklerinde, soyut yaklaşımın matematiksel modellemenin en basit ve en ekonomik yolu olduğunu anladılar.

Bu bölümde metrik uzaylar tanıtılacaktır. Metrik uzaylar, reel uzayların ($\mathbb{R}$) analizdeki rolüyle aynı şekilde, fonksiyonel analizde temel bir role sahiptir. $\mathbb{R}$ kümesi genelleştirilebildiği ve analizin farklı dallarında kullanılabildiği gibi, metrik uzaylar da geliştirilecek yapıya sahiptir.

2.1.1 Metrik Uzaylar

Tanım 2.1. Metrik uzaylar (X,d) çiftiyle gösterilir. Burada X bir kümedir ve d, X üzerinde tanımlanan metriktir. Ayrıca X üzerinde tanımlanan uzaklık fonksiyonu olarak da adlandırılır. Bu fonksiyon $X \times X$ üzerinde tanımlanmıştır. $m,n,z \in X$ için 4 aksiyom vardır;

- d'nin değeri sonlu ve pozitif olan bir reel sayıdır.
- $d(m,n) = 0 \Leftrightarrow m = n$.
- $d(m,n) = d(n,m)$.
- $d(m,z) \leq d(m,n) + d(n,z)$ [54].

Burada, $\times$ sembolü kartezyen çarpımını temsil eder. $\alpha \in A, \beta \in B$ için $A \times B$ sıralı ikilileri (α, β) temsil eder. Sonuç olarak $X \times X$, X kümesindeki tüm elemanların sıralı ikililerini tanımlar.

Tanım 2.2. $Y \subset X$ olacak şekilde bir Y alt kümesi seçelim. Eğer metrik d, $Y \times Y$ de sınırlı ise $(Y, \tilde{d})$ bir alt uzaydır[54]. Burada, $\tilde{d}$ düzenlenmiş metrik olarak adlandırılır.

Buradan itibaren $X = (X, d)$ biçiminde gösterilecektir.

Tanım 2.3. $y_0 \in X$ ve $r > 0 \in R$ için

- $B(y_0; r) = \{y \in X | d(y, y_0) < r\}$ - açık küre,
- $\tilde{B}(y_0; r) = \{y \in X | d(y, y_0) \leq r\}$ - kapalı küre,
- $S(y_0, r) = \{y \in X | d(y, y_0) = r\}$ - küre.

Burada, y_0 merkez ve r yarıçaptır [54].

Tanım 2.4. $M \subset X$ olacak şekilde M alt uzayını ele alalım. M'deki her noktanın küresi varsa, o zaman M'ye açık alt uzay denir. Aksi takdirde, K'nin tümleyeninin her noktada bir küresi varsa, K'ya kapalı küme denir. Burada K'nın tümleyeni $K^c = X - K$'dir [54].

Bir diğer tanım ise $B(x_0; \epsilon)$ açık küresi ve ϵ yarıçap olsun. Bu $B(x_0; \epsilon)$, x_0'ın ϵ komşuluğu olarak adlandırılır. Literatürde komşuluk, açık küre yerine de kullanılabilir.

Tanım 2.5. $M \subset X$ x_0 komşusu olacak şekilde bir M kümesi varsa x_0, M'nin iç noktası olarak adlandırılır [54].

Tanım 2.6. X (Γ)'nın tüm açık alt kümeleri aşağıdaki özelliklere sahiptir;

- $\emptyset \in \Gamma$, $x \in \Gamma$.
- Γ'daki herhangi iki elemanın birleşimi, yine Γ kümesinin elemanıdır.
- Γ'nın sonlu elemanlarının kesişimi, yine Γ kümesinin elemanıdır [54].

Tanım 2.7. M, X metrik uzayının bir alt kümesi, x_0, X uzayının bir elemanı olsun (x_0, M kümesinin bir elemanı olabilir veya olmayabilir). x_0'ın her komşuluğu, x_0'dan farklı en az $y \in M$ içeriyorsa, o zaman x_0, yığılma noktası *(accumulation point)* olarak adlandırılır. M'in tüm noktaları ve M'in tüm yığılma noktaları, M'nin kapanışları *(closure)* olarak adlandırılır ve $\bar{M}$ ile gösterilir [54].

Tanım 2.8. $X = (X,d)$ içindeki $\{x_n\}$ dizisi aşağıdaki koşulları sağlıyorsa, diziye yakınsak denir [54].

$\lim_{n\to\infty} d(x_n, x) = 0$ ve $x \in X$. Burada $\lim_{n\to\infty} x_n = x$ dir.

Teorem 2.1. *$M \neq \emptyset$, $M \subset X$, $X = (X,d)$ ve $\bar{M}$, M'nin kapanışıdır.*

- $x \in \bar{M} \Leftrightarrow \lim_{n\to\infty} d(x_n, x) = 0$ *öyle ki* $x_n \in M$.
- *M, kapalı küme ve $x_n \in M$ ise $\lim_{n\to\infty} d(x_n, x) = 0$, $x \in M$'yi gerektirir. [54].*

Tanım 2.9. (X,d) uzayındaki her dizi d metriği ile yakınsar ise $X = (X,d)$ tam metrik uzay olarak adlandırılır [54].

Teorem 2.2. *Eğer X bir tam uzay ise, X uzayının alt uzayı olan M de bir kapalı uzaydır.*

2.1.2 Normlu Uzaylar ve Banach Uzayları

Vektör uzayları matematiğin birçok alanında önemli bir yere sahiptir. Birçok teorik veya gerçek hayat problemi, elemanlarının vektör olabileceği X kümesine sahiptir. Bu vektörler, üç boyutlu uzayda veya bir dizi biçiminde görünür.

Tanım 2.10. $m, n, ..$ vektör elemanlarına sahip, elemanları boş olmayan ve K ($\mathbb{R}$ veya $\mathbb{C}$) de tanımlı bir vektör uzayı (lineer uzay) olsun. Aşağıda verilen iki cebirsel işlem, bu uzay üzerinde tanımlıdır.

Vektörel toplam, (m,n) sıralı ikilileri için $m + n$ şeklinde gösterilir ve aşağıdaki eşitlikleri sağlar;

- $m + n = n + m$
- $m + (n + z) = (m + n) + z$

Bu tanımlara ek olarak, *sıfır* vektörü olarak adlandırılan bir vektör mevcuttur ve her m vektörü için $(-m)$ şeklinde gösterilen vektör vardır ki,

- $m + 0 = m$.
- $m + (-m) = 0$ [54].

Tanım 2.11. Her m vektörü ve γ sabiti için sabit ile çarpım $\gamma.m$ şeklinde gösterilir. m, n vektörleri ve γ, θ sabitleri için aşağıda verilen dört özellik mevcuttur;

- $\gamma.(\theta.x) = (\gamma.\theta).x$
- $1.x = x$
- $\gamma.(x + y) = \gamma.x + \theta.y$
- $(\gamma + \theta).x = \gamma.x + \theta.x$ [54].

Açıkça tanımlıdır ki vektör toplamı $X \times X \rightarrow X$ şeklinde tanımlı ve sabitle çarpım ise $K \times X \rightarrow X$ şeklinde tanımlı operatörlerdir.

Burada, K sabit alan veya katsayı alanı olarak adlandırılır. Eğer $K = \mathbb{R}$ ise vektör uzayı X reel vektör uzayı olarak adlandırılır. Ayrıca eğer $K = \mathbb{C}$ ise vektör uzayı X kompleks vektör uzayı olarak adlandırılır. Literatürde 0 ile karışıklığı önlemek adına sıfır vektör için Θ ile gösterim mevcuttur.

- $0.x = \Theta$ ve $\gamma.0 = \Theta$

Tanım 2.12. Y, X vektör uzayının alt uzayı olsun. Y vektör uzayıdır ve aynı zamanda Y üzerinde vektörel toplam ve sabit ile çarpım işlemleri de $y_1, y_2 \in Y$ ve α, β sabitleri için tanımlanmıştır [54].

Tanım 2.13. X vektör uzayı olsun ve $u_1, u_2, ...u_n \in X$, $\alpha_1, \alpha_2, ...\alpha_n \in K$ ($\mathbb{R}$ or $\mathbb{C}$). Eğer $\alpha_1.u_1 + \alpha_2.u_2 + ... + \alpha_n.u_n$ toplamı 0'a eşitse bu toplam lineer kombinasyon olarak adlandırılır [54].

Tanım 2.14. M uzayındaki vektörlerin tüm lineer kombinasyonlarının kümesine germe *(span)* denir ve $M \subset X$, $M \neq \emptyset$ [54].

Tanım 2.15. Eğer $\alpha_1.u_1 + \alpha_2.u_2 +, ... + \alpha_m.u_m = 0$ denklemi, X'teki $S = u_1, u_2, ...u_m$ ve $\alpha_1, \alpha_2, ...\alpha_m \in K$ için $\alpha_1 = \alpha_2 = ... = \alpha_m = 0$ şeklinde sadece bir çözüme sahipse S lineer bağımsız küme olarak adlandırılır. Diğer çözümler mevcutsa S lineer bağımlı olarak adlandırılır [54].

Tanım 2.16. Eğer X kümesi n-parçalı lineer bağımsız vektörlerin kümesini içeriyorsa, X sonlu boyutlu küme olarak adlandırılır ve $n = dimX$ şeklinde gösterilir. Tanıma göre $X = 0$ bir sonlu boyutlu kümedir ve $dimX = 0$'dır. Eğer n-bouyutlu sonlu kümede $n+1$ veya daha fazla vektör mevcut ise bu vektörler lineer bağımlıdır. $C[a, b]$ ve l^2 sonsuz boyutlu iken $\mathbb{R}^n$ ve $\mathbb{C}^n$ sonlu boyutlu kümelerdir [54].

Tanım 2.17. Eğer $dimX = n$ ise X'in lineer bağımsız vektörlerinin n'li demeti *(n-tuple)* baz olarak adlandırılır. Eğer $\{\epsilon_1, \epsilon_2..\epsilon_n\}$, X'in basları ise $\forall x \in X$ için sadece bir ifade biçimi vardır;

$x = \epsilon_1.\alpha_1 + \epsilon_2.\alpha_2 + ... + \epsilon_n.\alpha_n$

Örneğin, $\mathbb{R}^n$ bazları;

$\epsilon_1 = (1,0,0,....,0)$, $\epsilon_2 = (0,1,0,....,0)$, . . $\epsilon_n = (0,0,0,....,1)$.

Bu ifade $\mathbb{R}^n$'in kononik bazları *(canonical basis)* olarak da adlandırılır. Eğer bu durum genelleştirilirse, X herhangi bir vektör uzayı olsun ve B, X'in lineer bağımsız altkümesi olsun (B, X'i gerer). Bu durumda B, X'in bazı olarak adlandırılır (Hamel Bazı) [54].

Tanım 2.18. $Y \subset X$ ve $Y = X$ olduğunu düşünelim. Bu durumda Y düzgün olmayan *(improper)* alt uzay olarak adlandırılır. $X \neq \emptyset$'in Y dışındaki bütün diğer alt uzayları da düzgün *(proper)* alt uzay olarak adlandırılır [54].

Teorem 2.3. *X bir n-boyutlu vektör uzayı olun ve Y, X'in düzgün bir alt uzayı olun. Bu durumda $dimY < n$ [54].*

Teorik problemlerde d metriğinin X uzayında tanımlı olmasını bekleriz. X vektör uzayının cebirsel yapısı ile metrik arasında bir ilişki yoksa, o zaman vektör alanlarda metrik ve cebirsel teorilerin kullanılması beklenilmemelidir. X'de cebirsel ve geometrik özelliklerin kullanımı için özel metrikler tanımlanabilir. Öncelikle gerekli şart, norm ve normdan elde edilecek olan d metriğinin tanımlanmasıdır. Böylelikle normlu uzaylar konsepti literatüre girmiş olur. Bu işlemden sonra vektör uzayları birçok teoriyi sağlayabilecek yapılara dönüşürler. Bir çok metrik uzay, gerçek hayat problemlerinde normlu uzay olarak kullanılır. Bu nedenle normlu uzaylar fonksiyonel analizin sıkça kullanılan temellerinden birisidir.

Tanım 2.19. Eğer özellikleri aşağıda verilmiş olan norm, X vektör uzayında tanımlanırsa, X normlu uzayı (normlu vektör uzayı veya normlu doğrusal uzay) olarak adlandırılır. Eğer vektör uzay X, tam vektör uzayı ise, Banach uzayı olarak adlandırılır [54].

- $\|r\| \geq 0$
- $\|r\| = 0 \Leftrightarrow r = 0$
- $\|\gamma.r\| = |\gamma|.\|r\|$
- $\|r + s\| \leq \|r\| + \|s\|$ - Üçgen Eşitsizliği

Burada, $r, s \in X$ ve $\gamma \in K$.

Öklid Normu $\mathbb{R}^n$

$r = (\epsilon_1, \epsilon_2, ..., \epsilon_n) \rightarrow \|r\| = \{\sum_{i=1}^{n} (|\epsilon_i|)^2\}^{1/2}$

l^p Normu

$r = (\epsilon_1, \epsilon_2, ..., \epsilon_n) \rightarrow \|r\| = \{\sum_{i=1}^{n} (|\epsilon_i|)^p\}^{1/p}$

l^∞ Normu

$r = (\epsilon_1, \epsilon_2, ..., \epsilon_n) \rightarrow \|r\| = \sup_i |\epsilon_i|$

$C[a, b]$ Normu

$\|r\| = \max_{t \in J} |r(t)|$. Burada $J = [a, b]$'dir.

2.1.3 İç Çarpım Uzayı

Vektör toplamı ve sabit ile çarpım işlemleri normlu uzaylarda kullanılabilir. Burada noktasal çarpım $u \bullet v = \alpha_1.\beta_1 + \alpha_2.\beta_2 + \alpha_3.\beta_3$ şeklinde tanımlanır. Bu ifadeye ek olarak $|a| = \sqrt{a.a}$ da kullanılabilir. Bu ifade biçimini kullanarak, eğer $u \bullet v = 0$ ise u ve v dik *(orthogonal)* olarak adlandırılır. Dikliğin vektör uzayları üzerinde genelleştirilmesi iç çarpım uzaylarının (ön-Hilbert Uzayı *pre-Hilbert Space*) elde edilmesini sağlar. Eğer bu uzay tam iç çarpım uzayı ise Hilbert Uzayı olarak adlandırılır.

Tanım 2.20. X vektör uzayı, üzerinde iç çarpım tanımlı bir iç çarpım uzayı oluşturur. Eğer bu vektör uzayı tam ise, yeni oluşan uzay Hilbert Uzayı olarak adlandırılır. X üzerinde tanımlı iç çarpım $X \times X$'den $K \in X$'e bir dönüşümdür *(mapping)*. $\rho, \eta, \mu \in X$ ve $\alpha \in K$;

- $\langle \rho + \eta, \mu \rangle = \langle \rho, \mu \rangle + \langle \eta, \mu \rangle$
- $\langle \alpha * \rho, \eta \rangle = \alpha * \langle \rho, \eta \rangle$
- $\langle \rho, \eta \rangle = \overline{\langle \eta, \rho \rangle}$
- $\langle \rho, \rho \rangle \geq 0$ ve $\langle \rho, \rho \rangle = 0 \Leftrightarrow \rho = 0$ [54].

X üzerinde tanımlanan iç çarpım, norm oluşturur;

$\|\rho\| = \sqrt{\langle \rho, \rho \rangle}$

X üzerinde tanımlı metrik;

$d(\rho,\eta) = \|\rho - \eta\| = \sqrt{\langle \rho - \eta, \rho - \eta \rangle}$. Sonuç olarak ön-Hilbert Uzayları normlu uzaylardır ve Hilbert Uzayları, Banach Uzayıdır.

Tanım 2.21. Eğer $\langle k, l \rangle = 0$ ise $k, l \in X$ için k vektörü l vektörüne diktir. Ayrıca $k \perp l$ şeklinde gösterilir [54].

2.2 Analitik Fonksiyonlar Hakkında Ön Bilgiler

2.2.1 Karmaşık Fonksiyonlar

Karmaşık fonksiyonlar hakkındaki teoremlerin ana amacı, analizin *(calculus)* komplex tanım kümesine aktarılmasıdır.

Tanım 2.22. f fonksiyonun limiti, şu özelliklere sahip ise belirlenebilir; Tüm x değerleri için $\forall \epsilon > 0$ ve $\delta > 0$ olacak şekilde bir ϵ ve δ sayısı vardır.

$0 < |x - x_0| < \delta \to |f(x) - L| > \epsilon$. Fonksiyonun limiti L'dir [55]. $f(x)$'e ait x'in karmaşık veya reel olması farketmez çünkü mutlak operatörü karmaşık analizde de mevcuttur. Ek olarak limit için basit bir gösterim de mevcuttur; $f(x) \to L$ for $x \to x_0$.

Tanım 2.23. Eğer $\lim_{x \to a} f = f(a)$ ise $y = f(x)$ fonksiyonu tanım kümesindeki bir a noktasında süreklidir [55].

Tanım 2.24. Eğer bir $f(x)$ fonksiyonu aşağıdaki limite sahip ise

$\lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$

bu limitin değeri $f(x)$'in türevi olarak adlandırılır ve $f'(x)$ şeklinde gösterilir [55].

Tanım 2.25. Eğer bir f fonksiyonu bir açık (α,β) aralığında tanımlı ise ve aralığın her noktasında türeve sahipse, bu f fonksiyonu türevlenebilir olarak adlandırılır. Ek olarak eğer bu aralık bir kapalı aralık ise ve fonksiyon aşağıdaki değerlere sahip ise

$\lim_{h \to 0^+} \frac{f(\alpha+h) - f(\alpha)}{h}$ (Sağdan Türev - *Right Hand Derivative*)

ve

$\lim_{h \to 0^-} \frac{f(\beta+h) - f(\beta)}{h}$ (Soldan Türev - *Left Hand Derivative*)

f fonksiyonu türevlenebilir olarak adlandırılır [56].

2.2.2 Analitik Fonksiyonlar

Eğer bir $f(x)$ fonksiyonu her noktada türeve sahip ise ve $f(x)$ fonksiyonu tekil değerli ise $f(x)$ fonksiyonu analitik fonksiyon olarak adlandırılır. Analitik fonksiyonlar holomorfik fonksiyonlar olarak da literatürde yer almaktadır.

Tanım 2.26. Eğer bir $f(x)$ fonksiyonu $x = x_0$ noktasında sonlu ise x_0 noktası adi *(ordinary)* nokta olarak adlandırılır. Diğer taraftan bir $f(x)$ fonksiyonu $x \to x_0$ iken ıraksar ise x_0 noktası tekil nokta *(singular)* olarak adlandırılır [57]. Bir diğer tanım türü ise $f(x)$ fonksiyonu x_0 noktasında analitik değilken x_0 noktasının komşuluğunda analitik ise, bu durumda x_0 noktası $f(x)$ fonksiyonunun tekil noktasıdır [55].

2.2.3 Dönüşüm Olarak Analitik Fonksiyonlar

$w = f(z)$ fonksiyonu, z noktasındaki w görüntüsünü temsil eden dönüşüm olarak görülebilir. Bu bölümde dönüşüm hakkındaki temel bilgilere yer verilmektedir.

f fonksiyonunun S metrik uzayında tanımlı olduğunu ve L metrik uzayında da farklı değerlere sahip olduğunu düşünelim. Burada fonksiyonlar aynı zamanda dönüşüm olarak da adlandırılabilir. f fonksiyonu S'den L'ye dönüştürür ve $f : S \to L$ şeklinde gösterilir. Eğer $X \subset S$ ise $x \in S$ için $f(x)$'in bütün değerlerinin kümesi f altında X'in görüntüsü olarak adlandırılır ve $f(X)$ şeklinde gösterilir.

2.2.4 Konform Dönüşüm (*Conformal Mapping*)

Karmaşık fonksiyonlar, genellikle düzlemin bir bölgesini başka bir düzleme tasvir eder. Resim ile gösterilen bölge arasındaki ilişkiyi belirlemek için karmaşık fonksiyondan ziyade dönüşüme uyan analitik fonksiyonları dikkate alabiliriz. Ana uygulama, problemin verildiği bölge yerine daha basit bir bölgede çözülmesi ve sonucun ters dönüşüm yardımı ile birinci bölgeye aktarılmasıdır.

γ yayının denklemini için en uygun form, parametrik formdur. $x = x(t)$ ve $y = y(t)$, burada $\alpha \leq t \leq \beta$ ve $x(t)$, $y(t)$ sürekli fonksiyonlardır. Ayrıca karmaşık formun notasyonu $w = w(t) = x(t) + i.y(t)$ olarak da kullanılabilir. Ayrıca γ yayı $[\alpha, \beta]$ aralığında süreklidir ve $w = \gamma(t)$ dönüşümü kullanılabilir.

Kapalı sonlu aralığın, sürekli dönüşüm altındaki görüntüsü yayın küme noktalarını oluşturur. Bu küme kompakt ve bağlantılıdır *(compact and connected)* [55].

Eğer $w(t)$'in türevi, $w'(t) = x'(t) + i.y'(t)$, var ve sıfıra eşit değil ise, γ yayı eğime sahiptir ve eğimin yönü $\arg w'(t)$ tarafından yönlendirilecektir. γ yayının türevlenebilir olması durumunda, $w'(t)$ var ve sürekli olmalıdır. γ yayının basit veya Jordan yayı olması durumunda $w(t_1) = w(t_2) \Longleftrightarrow t_1 = t_2$ şartını sağlamalıdır. Kapalı olma durumunda $w(\alpha) = w(\beta)$ var olmalıdır.

Tanım 2.27. γ yayı, $\alpha \leq t \leq \beta$ için Ω tanım kümesinde, $w = w(t)$ denklemine sahip olsun ve $f(w)$, Ω üzerinde sürekli olsun. Bu durumda, $\omega = \omega(t) = f(w(t))$ koşulunu sağlayan ve γ'nın görüntüsü olarak adlandırılan bir Γ yayı mevcuttur [55].

$f(w)$'nın analitik olduğunu bilerek, $\omega'(t)$ bulunabilir ($\omega'(t) = f'(w(t)).w'(t)$). Ayrıca $w_0 = w(t_0)$ noktasında $w'(t_0) \neq 0$ ve $f'(w_0) \neq 0$. Bu sebeple Γ bir eğime sahiptir ve eğimin yönü $\arg\omega'(t_0) = \arg f'(w_0) + \arg w'(t_0)$' dan elde edilir.

Bu denklemlere göre, yönlü γ yayı ve Γ yayı arasındaki açı, w_0 noktasında $\arg f'(w_0)$'dır. Bu açı γ yayından bağımsızdır. Sonuç olarak eğer her noktada $f'(w) \neq 0$ ise $\omega = f(w)$ konformdur [55].

Bu tanımın geometrik yorumu ise, eğer γ ve Γ yayları arasındaki w_0'dan geçen açı α, $f(\gamma)$ ve $f(\Gamma)$ görüntüleri arasındaki açı ile eşit ise, f fonksiyonu konform dönüşümü olarak adlandırılır [38].

Konform dönüşüm, matematiksel modellemede fiziksel denklemlerde sıklıkla görülür. Bu bölümün en önemli detayı, bir etki alanından diğerine eşleme yapan en uygun dönüşümü belirlemektir.

Bir konform dönüşümü olarak $\omega = f(w)$ analitik fonksiyonunu belirledikten sonra, doğal beklentimiz dönüşümün belirli geometrik özelliklerini kazanmaktır. En tutarlı yöntem, yaylar arasında karşılık gelen noktadan noktaya çalışmaktır.

Γ_1'den Γ_2 bölgesine konform dönüşümü sağlamak için literatürde önerilen bir yöntem mevcuttur. Bu yöntemin iki adımı vardır. İlk adım Γ_1'den dairesel bölgeye dönüşümdür. İkinci adım dairesel bölgeden Γ_2'ye dönüşümdür. Dönüşümde kullanılan araçlar doğrusal, kuvvet, üstel ve logaritmadır. Her aracın bölgeye bağlı olarak kendi karakteristik özellikleri ve sınırları vardır. Açısal bölgeler, güç (*power*) ve üstel (*exponential*) dönüşüm ile düzleştirilebilir.

Birim disk, herhangi bir bölgeden diğer bölgeye konform dönüşümü yeteneği nedeniyle, konform dönüşümünün ara adımıdır [55].

Teorem 2.4 (Riemann Dönüşüm Teoremi)**.** *Γ herhangi bir basit bağlantılı bölge olsun ve $w_0 \in \Gamma$ olsun. Bu durumda Γ'da bir benzersiz $f(w)$ analitik fonksiyonu vardır ki $f(w_0) = 0, f'(w_0) > 0$ şartları ile normalize edilir. $f(w)$, Γ'dan $|\omega| < 1$ diskine birebir dönüşüm yapar [55].*

Teorem 2.5. *f, Γ_1'den Γ_2'ye topolojik bir dönüşüm olsun. Eğer $\{w_n\}$ veya $w(t)$, Γ_1'in sınır noktalarına yaklaşma eğiliminde ise, $f\{w_n\}$ veya $f(w(t))$ de Γ_2'nin sınır noktalarına yaklaşma eğilimindedir [55].*

3
SINC-GALERKIN METODU

Bu bölümde, Sinc-Galerkin Metodu ve gereklilikleri ile metodun adi diferansiyel denklem sistemleri üzerinde genişletilmesi yer almaktadır.

3.1 Sinc Bazı

$\mathbb{C}$ karmaşık düzlemi temsil etsin ve $z \in \mathbb{C}$, $sinc$ fonksiyonu şöyle tanımlanır [37];

$$sinc(z) = \begin{cases} \frac{sin(\pi z)}{\pi z} & z \neq 0 \\ 1 & z = 0 \end{cases}, \tag{3.1}$$

$m > 0$ için dönüştürülmüş *sinc* fonksiyonu, $l = 0, \pm 1, \pm 2 \ldots$ için aşağıdaki gibi tanımlanır [37];

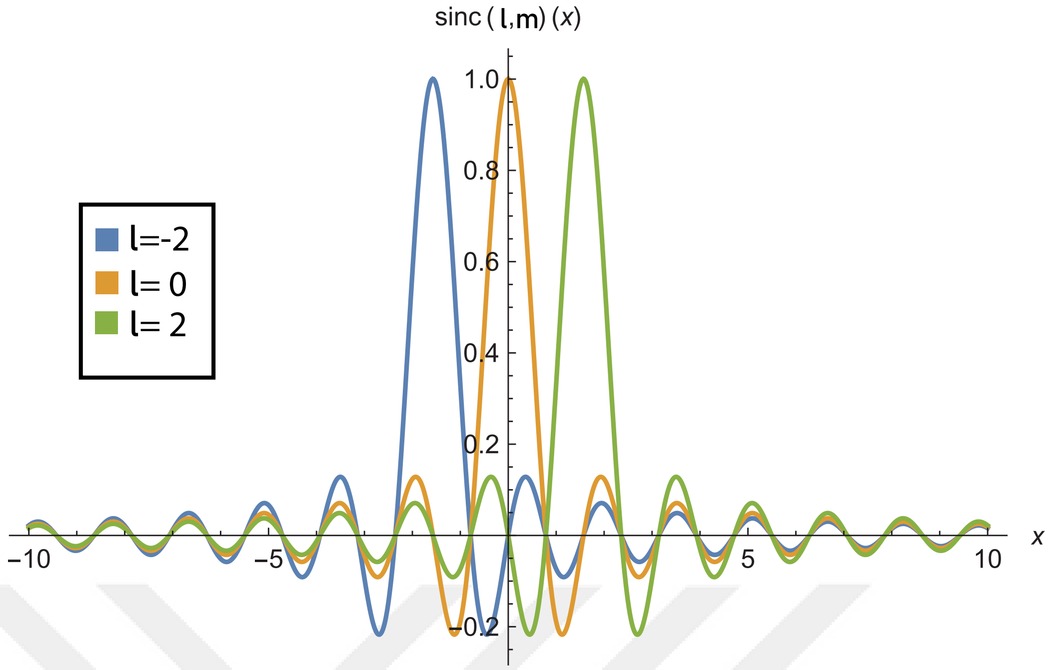
$$sinc(l,m)(z) = \begin{cases} \frac{sin(\pi(\frac{z-lm}{m}))}{\pi(\frac{z-lm}{m})} & z \neq 0 \\ 1 & z = 0 \end{cases}. \tag{3.2}$$

Herhangi bir f fonksiyonunu için $m > 0$ iken Whittaker Kardinalliği şöyle tanımlanır [37];

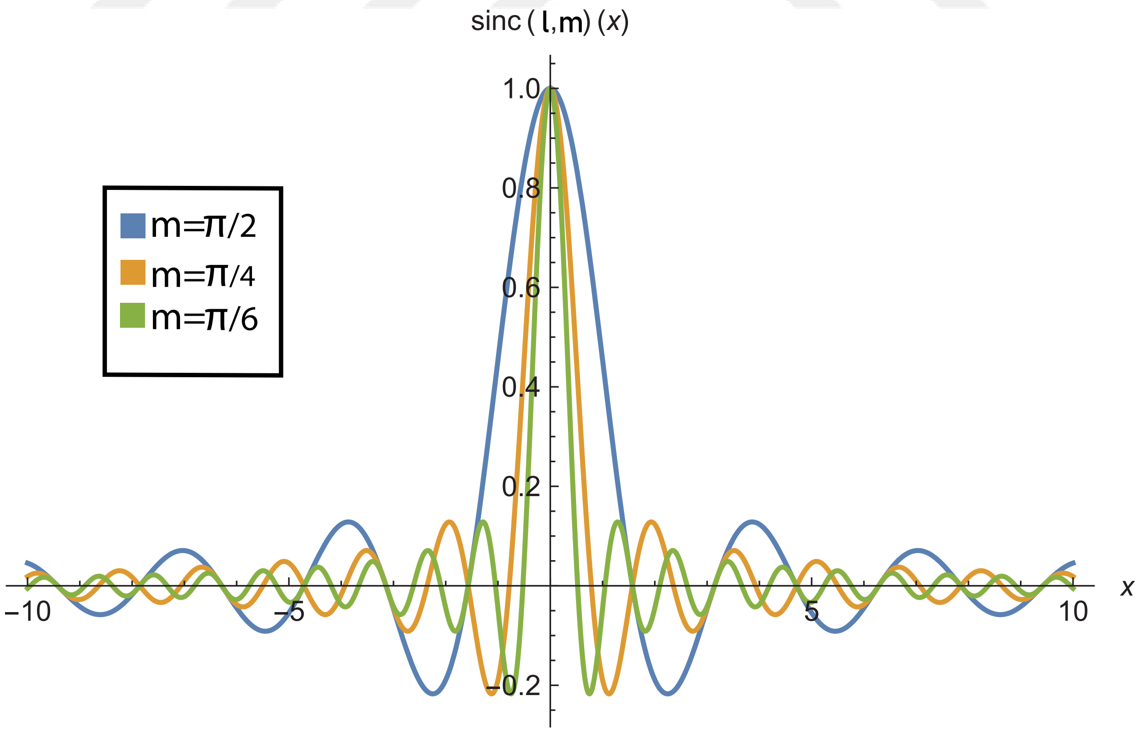
$$C(f,m,z) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} f(lm) sinc(l,m)(z). \tag{3.3}$$

(3.3) denklemindeki dizi daima yakınsar.

(3.2) denklemindeki eşit düğümlü *sinc* fonksiyonu şekil 3.1'de $l = \{-2, 0, 2\}$, $m = \frac{\pi}{4}$ ve $-10 < x < 10$ değerleri için çizdirilmiştir. Şekil 3.2, (3.2) denklemindeki eşit düğümlü *sinc* fonksiyonunun sabit $l = 0$, $m = \left\{\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{6}\right\}$ ve $-10 < x < 10$ için çizdirilmesini gösterir.



Şekil 3.1 Sabit *m* ve değişken *l* değerleri için (3.2) denklemindeki sinc fonksiyonu [38]



Şekil 3.2 Sabit *l* ve değişken *m* değerleri için (3.2) denklemindeki sinc fonksiyonu [46]

3.2 Konform Dönüşüm

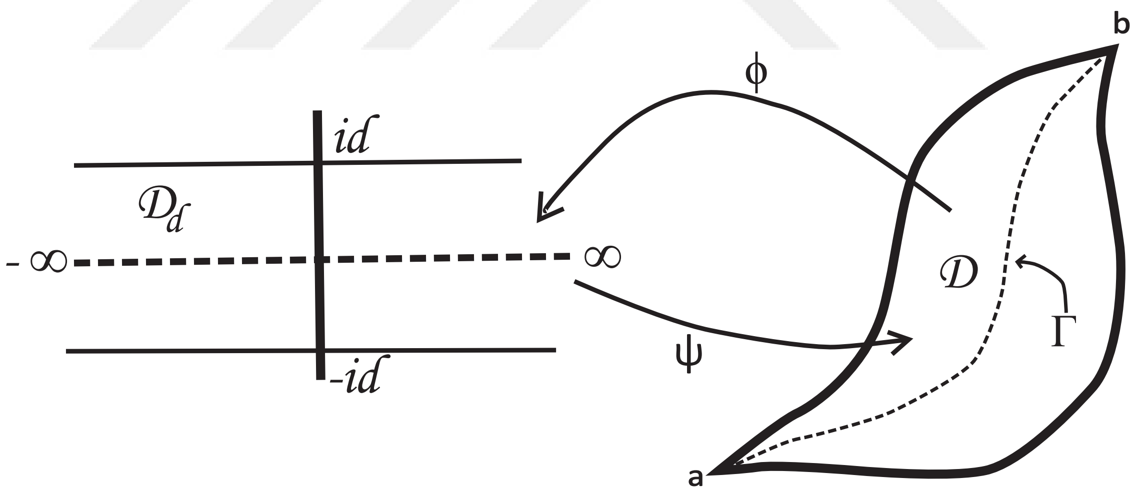
D_S, sonsuz şerit biçimindeki tanım kümesi olsun. θ karmaşık düzlem ve $d > 0$ olsun [37];

$$D_S \equiv \left\{ \theta = \alpha + i\beta : |\beta| < d \leq \frac{\pi}{2} \right\}, \tag{3.4}$$

ve $\phi(z)$, D_E'den D_S'e basit-bağlantılı konform dönüşümü olsun [37] ;

$$\phi(z) = \ln\left(\frac{z-a}{b-z}\right). \tag{3.5}$$

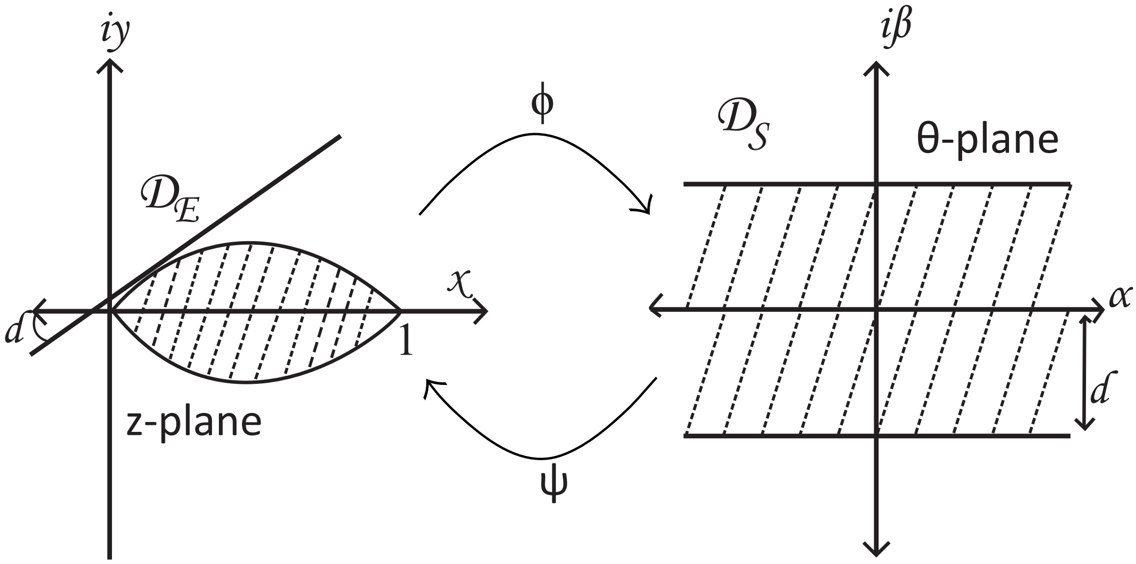
Burada, a ve b, D_E kümesinin sınır değerleri iken $\phi(a) = -\infty$ ve $\phi(b) = \infty$'dir. Ana tanım kümesi D_E literatürde göz-şekilli *(eye-shaped)* tanım kümesi olarak adlandırılır. Şekil 3.3, D ve D_d arasındaki konfrom dönüşümünü gösterir. D, [a,b] aralığındaki göz-şekilli (D_E) tanım kümesi, D_d ise sonsuz çubuk şekilli (D_S) tanım kümesidir. ϕ, D'den D_d'ye konform dönüşümü, ψ ise ters konform dönüşümünü ifade eder [37]. Şekil 3.4, aralığı [0,1] arasında düzenlenmiş D_E tanım kümesi ile D_S arasındaki konform dönüşümünü gösterir. ψ, ϕ konform dönüşümünün tersini temsil etmektedir.



Şekil 3.3 D ve D_d arasındaki konform dönüşümü [37]

Şekil 3.3 de yer alan Γ, ψ'nin tanım kümesidir;

$$\Gamma = \{\psi \in D_d : -\infty < z < \infty\}, \tag{3.6}$$



Şekil 3.4 D_E ve D_S arasındaki konform dönüşümü [46]

ayrıca, eşit aralıklı düğümler aşağıdaki şekilde tanımlanmıştır:

$$z_l = \frac{a + be^{lm}}{1 + e^{lm}}, \tag{3.7}$$

burada $m > 0$ ve $l = 0, \pm 1, \pm 2 \ldots$

Konform dönüşümü ve düğümler tanım kümesi [a,b]'nin seçimine göre değişmektedir. Tablo 3.1'da dönüşümler ve düğümler gösterilmiştir.

Tablo 3.1 ℝ'nin alt aralıkları için konform dönüşümleri ve düğümler [38]

Aralık		$\phi(x)$	z_l
a	b	$\ln(\frac{z-a}{b-z})$	$(a + be^{lm})/(1 + e^{lm})$
0	1	$\ln(\frac{z}{1-z})$	$(e^{lm})/(1 + e^{lm})$
0	∞	$\ln(z)$	e^{lm}
0	∞	$\ln(sinm(z))$	$\ln(e^{lm} + \sqrt{e^{2lm} + 1})$
$-\infty$	∞	z	lm
$-\infty$	∞	$sinh^{-1}(z)$	lm

Tanım 3.1. [58] D_E'nin karmaşık düzlemde basit-bağlantılı tanım kümesi olduğunu düşünelim ve ∂D_E sınırları olsun. Bu sınır noktaları a, b ve $\phi(x)$, D_E'den D_S'e konform dönüşümü olsun ki $\phi(a) = -\infty$ ve $\phi(b) = \infty$. $\phi(x)$'nin ters dönüşümü $\psi(x)$ şöyle tanımlanır;

$$\Gamma \equiv \{\psi(u) \in D_E \colon -\infty < u < \infty\} \quad z_l = \psi(lm)\ ,\ l = 0, \mp 1, \mp 2 \ldots \tag{3.8}$$

Tanım 3.2. [58] $B(D_E)$, D_E'de bulunan analitik F fonksiyonlarının sınıfı olsun ve aşağıdaki şartı sağlasın;

$$u = \mp\infty \text{ iken } \int_{\psi(L+u)} |F(z)|\, dz \longrightarrow 0, \tag{3.9}$$

burada

$$L \equiv \left\{ iy : |y| < d \leq \frac{\pi}{2} \right\} \text{ olarak tanımlıdır ve } T(F) = \int_{\partial D_E} |F(z)|\, dz < \infty \text{ şartını sağlar.} \tag{3.10}$$

Teorem 3.1. *Γ, $(0,1)$ ve $F \in B(D_E)$ şeklinde bir aralık olsun ve yeteri kadar küçük $m > 0$ için [58] ;*

$$\int_\Gamma |F(z)|\, dz - m \sum_{j=-\infty}^{\infty} \frac{F(z_j)}{\phi\prime(z_j)} = \frac{i}{2} \int_{\partial D_E} \frac{F(z) l(\phi, m)(z)}{sin(\pi\phi(z)/m)} dz \equiv I_F, \tag{3.11}$$

burada

$$|l(\phi, m)|_{z\in\partial D_E} = \left| e^{\left[\frac{i\pi\phi(z)}{m} sgn(Im\phi(z))\right]} \right|_{z\in\partial D_E} = e^{\frac{-\pi d}{m}} \text{ ile verilmektedir.} \tag{3.12}$$

Teorem 3.1'in ispatına [37] yer verilmiştir.

Teorem 3.2. *α, β pozitif katsayılar ve C için [58] ;*

$$\left| \frac{F(x)}{\phi\prime(x)} \right| \leq C \begin{cases} e^{-\alpha|\phi(x)|} & x \in \psi((-\infty, \infty)) \\ e^{-\beta|\phi(x)|} & x \in \psi((0, \infty)) \end{cases}, \tag{3.13}$$

(3.11) denkleminde yer alan kuadratür kuralının hata sınırı şu şekilde verilmiştir:

$$\left| \int_\Gamma |F(z)|\, dz - m \sum_{j=-\infty}^{\infty} \frac{F(z_j)}{\phi\prime(z_j)} \right| \leq C \left(\frac{e^{-\alpha Nh}}{\alpha} + \frac{e^{-\beta Nh}}{\beta} \right) + |I_F|. \tag{3.14}$$

(3.11) denkleminde yer alan sonlu toplam, (3.13) denklemindeki ifadelerle beraber kullanıldığında (3.14) yer alacak şekilde belirlenmiştir.

$m = \sqrt{\frac{\pi d}{\alpha N}}$ ve $N \equiv [\![\frac{\alpha}{\beta} N + 1]\!]$ burada $[\![.]\!]$ iç kısmın tam sayı değeri ve N ağ boyutunu temsil eden tam sayı değeridir. Bu kabuller ile beraber;

$$\int_\Gamma |F(x)|\, dx = m \sum_{j=-N}^{N} \frac{F(x_j)}{\phi\prime(x_j)} + O(e^{-(\pi\alpha d N)^{1/2}}). \tag{3.15}$$

Teorem 3.1 ve 3.2, ADD sistemine karşılık gelen ayrık sistemin formülasyonunda açığa çıkan integrallerin yaklaşımında kullanılmıştır.

Teorem 3.3. *ϕ, basit bağlantılı D_E'den D_S'e konform bire-bir dönüşüm olsun [58].*

$$\delta_{jl}^{0} = [S(j,l)\circ\phi(x)]\,|_{x=x_l} = \begin{cases} 1 & l=j \\ 0 & l\neq j \end{cases}, \tag{3.16}$$

$$\delta_{jl}^{1} = m\frac{d}{d\phi}[S(j,l)\circ\phi(x)]\,|_{x=x_l} = \begin{cases} 1 & l=j \\ \frac{(-1)^{l-j}}{l-j} & l\neq j \end{cases}, \tag{3.17}$$

$$\delta_{jl}^{2} = m\frac{d^2}{d\phi^2}[S(j,m)\circ\phi(x)]\,|_{x=x_l} = \begin{cases} \frac{-\pi^2}{3} & l=j \\ \frac{-2(-1)^{l-j}}{(l-j)^2} & l\neq j \end{cases}. \tag{3.18}$$

Teorem (3.2) ve (3.3)'in ispatı [38]'de verilmiştir.

3.3 Yakınsaklık Analizi

Dirichlet tipli diferansiyel denklem sistemini düşünelim (1.1)

$$\begin{aligned} &\left[\sum_{i=0}^{2} Q_i\vartheta_1^i(x) + R_i\vartheta_2^i(x)\right] + NL_1(\vartheta_1(x)) + NL_2(\vartheta_2(x)) = f_1(x) \\ &\left[\sum_{i=0}^{2} S_i\vartheta_1^i(x) + T_i\vartheta_2^i(x)\right] + NL_3(\vartheta_1(x)) + NL_4(\vartheta_2(x)) = f_2(x). \end{aligned} \tag{3.19}$$

Denklem (3.19)'deki Dirichlet sınır şartları $\vartheta_1(a) = \vartheta_1(b) = \vartheta_2(a) = \vartheta_2(b) = 0$ burada $a < x < b$ ve $i = 0,\ 1,\ 2$ için $Q_i,\ R_i,\ S_i,\ T_i$ D_E'de tanımlı analitik fonksiyonlardır. Ayrıca $i = 1\ldots4$ ve $j = 1,2$ için $NL_i(\vartheta_j(x))$ denklemin lineer olmayan kısımlarıdır. Sinc-Galerkin yaklaşımı, Whittaker Kardinal fonksiyonlarının yardımı ile aşağıdaki şekilde elde edilir;

$$\vartheta_1(x) \approx \vartheta_{11_N} + \vartheta_{21_N} \approx \vartheta_{1_N}(x) = \sum_{l=-N}^{N} c_l S(l,m)\circ\phi(x)$$

ve

$$\vartheta_2(x) \approx \vartheta_{12_N} + \vartheta_{22_N} \approx \vartheta_{2_N}(x) = \sum_{l=-N}^{N} d_l S(l,m)\circ\phi(x) \tag{3.20}$$

$$S(l,m)(x) = \frac{sin(\pi\frac{x-lm}{m})}{\pi\frac{x-lm}{m}} \text{ ile verilmektedir.}$$

Burada bilinmeyen c_l ve d_l katsayıları, sinc baz fonksiyonlarının rezidüellerinin dikleştirilmesi ile elde edilecektir. Galerkin metodu, denklem sisteminin çözümü sayesinde bilinmeyenlerin elde edilmesine olanak sağlar.

- Eğer ADD sisteminde (1.1) $i = 1\dots4$ ve $j = 1,2$ için $NL_i(\vartheta_j(x)) = 0$ *(Lineer ADD sistemi)* ise, SGM aşağıdaki sistemi sağlar;

$$\begin{gathered}\langle L\left[\vartheta_{11_N}+\vartheta_{21_N}\right]-f_1, S(l,m)\circ\phi(x)\rangle = 0\\ \text{ve}\\ \langle L\left[\vartheta_{12_N}+\vartheta_{22_N}\right]-f_2, S(l,m)\circ\phi(x)\rangle = 0,\end{gathered}\tag{3.21}$$

- Eğer ADD sisteminde (1.1) $i = 1\dots4$ ve $j = 1,2$ için $NL_i(\vartheta_j(x)) \neq 0$ *(Lineer olmayan ADD sistemi)* ise, SGM aşağıdaki sistemi sağlar

$$\begin{gathered}\langle NL\left[\vartheta_{11_N}+\vartheta_{21_N}\right]-f_1, S(l,m)\circ\phi(x)\rangle = 0\\ \text{ve}\\ \langle NL\left[\vartheta_{12_N}+\vartheta_{22_N}\right]-f_2, S(l,m)\circ\phi(x)\rangle = 0,\end{gathered}\tag{3.22}$$

burada $(l = -N\dots0\dots N)$. $f(x)$ ve $g(x)$, D_E'de tanımlı analitik fonksiyonlar olsun. Bu iki fonksiyonun iç çarpımı şu şekilde tanımlanır:

$$\langle f(x), g(x)\rangle = \int_\Gamma \Omega(x)f(x)g(x)dx,\tag{3.23}$$

burada, $\Omega(x)$ ağırlık fonksiyonudur. Ağırlık fonksiyonunun $\Omega(x) = \frac{1}{\phi(x)}$ şeklinde seçmek uygundur [37].

3.3.1 Ayrık Sistem

Bu bölümde, lineer ve lineer olmama durumları için ayrık Sinc-Galerkin sisteminin elde edilmesi tartışılacaktır.

3.3.1.1 Lineer ADD Sistemi

(1.1)'deki Q_i, R_i, S_i, T_i lineer ADD sistemindeki analitik fonksiyonlar olarak ele alınacaktır ve $i = 1\dots4$ ve $j = 1,2$ için $NL_i(\vartheta_j(x)) = 0$ de ayrıca kabul edilecektir. Ayrık sistemin elemanları iç çarpım, kuadratür kuralı ve teorem 3.3 kullanılarak elde edilecektir [37];

$$\begin{aligned}\langle Q_0(x)\vartheta_1(x), S(l,m)\circ\phi(x)\rangle &= \int_\Gamma \Omega(x)Q_0(x)\vartheta_1(x)S(l,m)(x)dx\\ &\cong h\frac{\Omega(x_l)Q_0(x_l)}{\phi\prime(x_l)}c_l,\end{aligned} \tag{3.24}$$

$$\begin{aligned}\langle Q_1(x)\vartheta_1'(x), S(l,m)\circ\phi(x)\rangle \cong -m\sum_{j=-N}^{N} c_j\Bigg[&\frac{(\Omega(x_j)Q_1(x_j))'}{\phi'(x_j)}\delta_{jl}^0\\ &+\frac{\delta_{jl}^1}{m}\left(\Omega(x_j)Q_1(x_j)\right)\Bigg],\end{aligned} \tag{3.25}$$

$$\begin{aligned}\langle Q_2(x)\vartheta_1''(x), S(l,m)\circ\phi(x)\rangle \cong m\sum_{j=-N}^{N} c_j\Bigg[&\frac{(\Omega(x_j)Q_2(x_j))''}{\phi'(x_j)}\delta_{jl}^0\\ +\frac{\delta_{jl}^1}{m}\left(2(\Omega(x_j)Q_2(x_j))'+\Omega(x_j)Q_2(x_j)\frac{\phi''(x_j)}{\phi'(x_j)}\right)&+\Omega(x_j)Q_2(x_j)\phi'(x_j)\frac{\delta_{jl}^2}{m^2}\Bigg],\end{aligned} \tag{3.26}$$

$$\begin{aligned}\langle R_0(x)\vartheta_2(x), S(l,m)\circ\phi(x)\rangle &= \int_\Gamma \Omega(x)R_0(x)\vartheta_2(x)S(l,m)(x)dx\\ &\cong m\frac{\Omega(x_l)R_0(x_l)}{\phi\prime(x_l)}c_l,\end{aligned} \tag{3.27}$$

$$\begin{aligned}\langle R_1(x)\vartheta_2'(x), S(l,m)\circ\phi(x)\rangle \cong -m\sum_{j=-N}^{N} c_j\Bigg[&\frac{(\Omega(x_j)R_1(x_j))'}{\phi'(x_j)}\delta_{jl}^0\\ &+\frac{\delta_{jl}^1}{m}\left(\Omega(x_j)R_1(x_j)\right)\Bigg],\end{aligned} \tag{3.28}$$

$$
\begin{aligned}
\langle R_2(x)\vartheta_2''(x), S(l,m)\circ\phi(x)\rangle &\cong m\sum_{j=-N}^{N} c_j\left[\frac{(\Omega(x_j)R_2(x_j))''}{\phi'(x_j)}\delta_{jl}^{0}\right. \\
&\left.+\frac{\delta_{jl}^{1}}{m}\left(2(\Omega(x_j)R_2(x_j))' + \Omega(x_j)R_2(x_j)\frac{\phi''(x_j)}{\phi'(x_j)}\right) + \Omega(x_j)R_2(x_j)\phi'(x_j)\frac{\delta_{jl}^{2}}{m^2}\right],
\end{aligned}
\tag{3.29}
$$

$$
\langle f_1(x), S(l,m)\circ\phi(x)\rangle \cong m\frac{\Omega(x_l)f_1(x_l)}{\phi'(x_j)}c_l, \tag{3.30}
$$

$$
\begin{aligned}
\langle S_0(x)\vartheta_1(x), S(l,m)\circ\phi(x)\rangle &= \int_{\Gamma}\Omega(x)S_0(x)\vartheta_1(x)S(l,m)(x)dx \\
&\cong m\frac{\Omega(x_l)S_0(x_l)}{\phi'(x_l)}d_l,
\end{aligned}
\tag{3.31}
$$

$$
\begin{aligned}
\langle S_1(x)\vartheta_1'(x), S(l,m)\circ\phi(x)\rangle &\cong -m\sum_{j=-N}^{N} d_j\left[\frac{(\Omega(x_j)S_1(x_j))'}{\phi'(x_j)}\delta_{jl}^{0}\right. \\
&\left.+\frac{\delta_{jl}^{1}}{m}\left(\Omega(x_j)S_1(x_j)\right)\right],
\end{aligned}
\tag{3.32}
$$

$$
\begin{aligned}
\langle S_2(x)\vartheta_1''(x), S(l,m)\circ\phi(x)\rangle &\cong m\sum_{j=-N}^{N} d_j\left[\frac{(\Omega(x_j)S_2(x_j))''}{\phi'(x_j)}\delta_{jl}^{0}\right. \\
&\left.+\frac{\delta_{jl}^{1}}{m}\left(2(\Omega(x_j)S_2(x_j))' + \Omega(x_j)S_2(x_j)\frac{\phi''(x_j)}{\phi'(x_j)}\right) + \Omega(x_j)S_2(x_j)\phi'(x_j)\frac{\delta_{jl}^{2}}{m^2}\right],
\end{aligned}
\tag{3.33}
$$

$$
\begin{aligned}
\langle T_0(x)\vartheta_2(x), S(l,m)\circ\phi(x)\rangle &= \int_{\Gamma}\Omega(x)T_0(x)\vartheta_2(x)S(l,m)(x)dx \\
&\cong m\frac{\Omega(x_l)T_0(x_l)}{\phi'(x_l)}d_l,
\end{aligned}
\tag{3.34}
$$

$$\langle T_1(x)\vartheta_2'(x), S(l,m)\circ\phi(x)\rangle \cong -m\sum_{j=-N}^{N} d_j\left[\frac{(\Omega(x_j)T_1(x_j))'}{\phi'(x_j)}\delta_{jl}^{0} + \frac{\delta_{jl}^{1}}{m}\left(\Omega(x_j)T_1(x_j)\right)\right], \tag{3.35}$$

$$\langle T_2(x)\vartheta_2''(x), S(l,m)\circ\phi(x)\rangle \cong m\sum_{j=-N}^{N} d_j\left[\frac{(\Omega(x_j)T_2(x_j))''}{\phi'(x_j)}\delta_{jl}^{0} + \frac{\delta_{jl}^{1}}{h}\left(2(\Omega(x_j)T_2(x_j))' + \Omega(x_j)T_2(x_j)\frac{\phi''(x_j)}{\phi'(x_j)}\right) + \Omega(x_j)T_2(x_j)\phi'(x_j)\frac{\delta_{jl}^{2}}{m^2}\right], \tag{3.36}$$

$$\langle f_2(x), S(l,m)\circ\phi(x)\rangle \cong m\frac{\Omega(x_l)f_2(x_l)}{\phi'(x_j)}d_l. \tag{3.37}$$

3.3.1.2 Lineer Olmayan ADD Sistemi

(1.1)'deki Q_i, R_i, S_i, T_i lineer olmayan ADD sistemindeki analitik fonksiyonlar olarak ele alınacak ve $i = 1\ldots 4$ ve $j = 1,2$ için $NL_i(\vartheta_j(x)) \neq 0$ kabul edilecektir. Ayrık sistemin elemanları iç çarpım, kuadratür kuralı ve Teorem 3.3 kullanılarak elde edilecektir [37];

$$\langle Q_0(x)\vartheta_1(x), S(l,m)\circ\phi(x)\rangle = \int_\Gamma \Omega(x)Q_0(x)\vartheta_1(x)S(l,m)(x)dx \cong m\frac{\Omega(x_l)Q_0(x_l)}{\phi\prime(x_l)}c_l, \tag{3.38}$$

$$\langle Q_1(x)\vartheta_1'(x), S(l,m)\circ\phi(x)\rangle \cong -m\sum_{j=-N}^{N} c_j\left[\frac{(\Omega(x_j)Q_1(x_j))'}{\phi'(x_j)}\delta_{jl}^{0} + \frac{\delta_{jl}^{1}}{m}\left(\Omega(x_j)Q_1(x_j)\right)\right], \tag{3.39}$$

$$
\begin{aligned}
\langle Q_2(x)\vartheta_1''(x), S(l,m)\circ\phi(x)\rangle &\cong m\sum_{j=-N}^{N} c_j\left[\frac{(\Omega(x_j)Q_2(x_j))''}{\phi'(x_j)}\delta_{jl}^{0}\right.\\
+\frac{\delta_{jl}^{1}}{m}\left(2(\Omega(x_j)Q_2(x_j))' + \Omega(x_j)Q_2(x_j)\frac{\phi''(x_j)}{\phi'(x_j)}\right) &\left. + \Omega(x_j)Q_2(x_j)\phi'(x_j)\frac{\delta_{jl}^{2}}{m^2}\right],
\end{aligned}
\tag{3.40}
$$

$$
\begin{aligned}
\langle R_0(x)\vartheta_2(x), S(l,m)\circ\phi(x)\rangle &= \int_{\Gamma}\Omega(x)R_0(x)\vartheta_2(x)S(l,m)(x)dx\\
&\cong m\frac{\Omega(x_l)R_0(x_l)}{\phi'(x_l)}c_l,
\end{aligned}
\tag{3.41}
$$

$$
\begin{aligned}
\langle R_1(x)\vartheta_2'(x), S(l,m)\circ\phi(x)\rangle &\cong -m\sum_{j=-N}^{N} c_j\left[\frac{(\Omega(x_j)R_1(x_j))'}{\phi'(x_j)}\delta_{jl}^{0}\right.\\
&\left. + \frac{\delta_{jl}^{1}}{h}\left(\Omega(x_j)R_1(x_j)\right)\right],
\end{aligned}
\tag{3.42}
$$

$$
\begin{aligned}
\langle R_2(x)\vartheta_2''(x), S(l,m)\circ\phi(x)\rangle &\cong m\sum_{j=-N}^{N} c_j\left[\frac{(\Omega(x_j)R_2(x_j))''}{\phi'(x_j)}\delta_{jl}^{0}\right.\\
+\frac{\delta_{jl}^{1}}{m}\left(2(\Omega(x_j)R_2(x_j))' + \Omega(x_j)R_2(x_j)\frac{\phi''(x_j)}{\phi'(x_j)}\right) &\left. + \Omega(x_j)R_2(x_j)\phi'(x_j)\frac{\delta_{jl}^{2}}{m^2}\right],
\end{aligned}
\tag{3.43}
$$

$$
\begin{aligned}
\langle NL_1(\vartheta_1(x)), S(l,m)\circ\phi(x)\rangle &= \int_{\Gamma}\Omega(x)NL_1(\vartheta_1(x))S(l,m)(x)dx\\
&\cong m\frac{\Omega(x_l)}{\phi'(x_l)}NL_1(c_l),
\end{aligned}
\tag{3.44}
$$

$$
\begin{aligned}
\langle NL_2(\vartheta_2(x)), S(l,m)\circ\phi(x)\rangle &= \int_{\Gamma}\Omega(x)NL_2(\vartheta_2(x))S(l,m)(x)dx\\
&\cong m\frac{\Omega(x_l)}{\phi'(x_l)}NL_2(c_l),
\end{aligned}
\tag{3.45}
$$

$$\langle f_1(x), S(l,m)\circ\phi(x)\rangle \cong m\frac{\Omega(x_l)f_1(x_l)}{\phi'(x_j)}c_l, \tag{3.46}$$

$$\begin{aligned}\langle S_0(x)\vartheta_1(x), S(l,m)\circ\phi(x)\rangle &= \int_\Gamma \Omega(x)S_0(x)\vartheta_1(x)S(l,m)(x)dx \\ &\cong m\frac{\Omega(x_l)S_0(x_l)}{\phi\prime(x_l)}d_l,\end{aligned} \tag{3.47}$$

$$\begin{aligned}\langle S_1(x)\vartheta_1'(x), S(l,m)\circ\phi(x)\rangle \cong -m\sum_{j=-N}^{N} d_j\Bigg[&\frac{(\Omega(x_j)S_1(x_j))'}{\phi'(x_j)}\delta_{jl}^0 \\ &+\frac{\delta_{jl}^1}{m}\left(\Omega(x_j)S_1(x_j)\right)\Bigg],\end{aligned} \tag{3.48}$$

$$\begin{aligned}\langle S_2(x)\vartheta_1''(x), S(l,m)\circ\phi(x)\rangle \cong m\sum_{j=-N}^{N} d_j\Bigg[\frac{(\Omega(x_j)S_2(x_j))''}{\phi'(x_j)}\delta_{jl}^0 \\ +\frac{\delta_{jl}^1}{m}\left(2(\Omega(x_j)S_2(x_j))' + \Omega(x_j)S_2(x_j)\frac{\phi''(x_j)}{\phi'(x_j)}\right) + \Omega(x_j)S_2(x_j)\phi'(x_j)\frac{\delta_{jl}^2}{m^2}\Bigg],\end{aligned} \tag{3.49}$$

$$\begin{aligned}\langle T_0(x)\vartheta_2(x), S(l,m)\circ\phi(x)\rangle &= \int_\Gamma \Omega(x)T_0(x)\vartheta_2(x)S(l,m)(x)dx \\ &\cong m\frac{\Omega(x_l)T_0(x_l)}{\phi\prime(x_l)}d_l,\end{aligned} \tag{3.50}$$

$$\begin{aligned}\langle T_1(x)\vartheta_2'(x), S(l,m)\circ\phi(x)\rangle \cong -m\sum_{j=-N}^{N} d_j\Bigg[&\frac{(\Omega(x_j)T_1(x_j))'}{\phi'(x_j)}\delta_{jl}^0 \\ &+\frac{\delta_{jl}^1}{m}\left(\Omega(x_j)T_1(x_j)\right)\Bigg],\end{aligned} \tag{3.51}$$

$$\langle T_2(x)\vartheta_2''(x), S(l,m)\circ\phi(x)\rangle \cong m\sum_{j=-N}^{N} d_j\left[\frac{(\Omega(x_j)T_2(x_j))''}{\phi'(x_j)}\delta_{jl}^0\right.$$
$$\left.+\frac{\delta_{jl}^1}{m}\left(2(\Omega(x_j)T_2(x_j))' + \Omega(x_j)T_2(x_j)\frac{\phi''(x_j)}{\phi'(x_j)}\right) + \Omega(x_j)T_2(x_j)\phi'(x_j)\frac{\delta_{jl}^2}{m^2}\right], \tag{3.52}$$

$$\begin{aligned}\langle NL_3(\vartheta_1(x)), S(l,m)\circ\phi(x)\rangle &= \int_\Gamma \Omega(x)NL_3(\vartheta_1(x))S(l,m)(x)dx\\ &\cong m\frac{\Omega(x_l)}{\phi\prime(x_l)}NL_3(c_l),\end{aligned} \tag{3.53}$$

$$\begin{aligned}\langle NL_4(\vartheta_2(x)), S(l,m)\circ\phi(x)\rangle &= \int_\Gamma \Omega(x)NL_4(\vartheta_2(x))S(l,m)(x)dx\\ &\cong m\frac{\Omega(x_l)}{\phi\prime(x_l)}NL_4(c_l),\end{aligned} \tag{3.54}$$

$$\langle f_2(x), S(l,m)\circ\phi(x)\rangle \cong m\frac{\Omega(x_l)f_2(x_l)}{\phi'(x_j)}d_l. \tag{3.55}$$

m ve N değerleri Teorem (3.3)'deki şekliyle aynı olmalıdır.

3.3.2 Hata Yaklaşımı

- $f = f(x)$ veya $f = p(x)w(x)$ için $f, \Omega \in B(D)$ olsun,

$$\begin{aligned}&\left|\int_a^b (f\,\Omega\,[S\,(j,m)\circ\phi\,])\,(x)\,dx - m\left(\frac{f\,\Omega}{\phi'}\right)(x_j)\right|\\ &\qquad \le L_0 M^{-\frac{1}{2}} e^{(-(\pi\alpha dM)^{1/2})},\end{aligned} \tag{3.56}$$

  burada L_0, f, Ω ve d'ye bağlı pozitif katsayıdır.

- $g(p[S\,(j,m)\circ\phi\,]\Omega)' \in B(D)$ için

$$\begin{aligned}&\left|\int_a^b \left(pg'[S(j,m)\circ\phi\,]\right)(x)dx + m\sum_{l=-M}^{M}(gp\Omega)\,(x_l)\frac{\delta_{jl}^1}{m}\right.\\ &\qquad \left.+m\left(\frac{g\,(p\Omega)'}{\phi'}\right)(x_j)\right| \le L_1 M^{\frac{1}{2}} e^{(-(\pi\alpha dM)^{1/2})},\end{aligned} \tag{3.57}$$

burada L_1, g, p, Ω, ϕ ve d'ye bağlı pozitif katsayıdır.

- $g(p[S(j,m)\circ\phi]\Omega)'' \in B(D)$ için

$$\begin{aligned}\Bigg|\int_a^b \big(pg''[S(j,m)\circ\phi]\big)(x)dx - h\sum_{l=-M}^{M} g(x_l)\Bigg[\frac{\delta_j^2 l}{m}(p\Omega\phi')(x_l)\\ +\frac{\delta_{jl}^1}{m}\left(\frac{p\Omega\phi''}{\phi'}+2(p\Omega)'\right)(x_j)\Bigg]\Bigg| \le L_2 M e^{(-(\pi\alpha d M)^{1/2})},\end{aligned} \tag{3.58}$$

burada L_2, g, p, Ω, ϕ ve d'ye bağlı pozitif katsayıdır.

(3.21) denklemindeki lineer problemler için Sinc-Galerkin sistemi ;

$$\begin{gathered}0=\langle L\left[\vartheta_{11_N}+\vartheta_{21_N}\right]-f_1, S(l,m)\circ\phi(x)\rangle,\\ 0=(Q_0\vartheta_{11}, S(j,m)\circ\phi)+\big(Q_1\vartheta_{11}', S(j,m)\circ\phi\big)-\big(Q_2\vartheta_{11}'', S(j,m)\circ\phi\big)\\ +(R_0\vartheta_{21}, S(j,m)\circ\phi)+\big(R_1{\vartheta_{21}}', S(j,m)\circ\phi\big)-\big(R_2{\vartheta_{21}}'', S(j,m)\circ\phi\big)-(f_1, S(j,m)\circ\phi)).\\ 0=\langle L\left[\vartheta_{12_N}+\vartheta_{22_N}\right]-f_2, S(l,m)\circ\phi(x)\rangle,\\ 0=(S_0\vartheta_{12}, S(j,m)\circ\phi)+\big(S_1\vartheta_{12}', S(j,m)\circ\phi\big)-\big(S_2\vartheta_{12}'', S(j,m)\circ\phi\big)\\ +(T_0\vartheta_{22}, S(j,m)\circ\phi)+\big(T_1{\vartheta_{22}}', S(j,m)\circ\phi\big)-\big(T_2{\vartheta_{22}}'', S(j,m)\circ\phi\big)-(f_2, S(j,m)\circ\phi)).\end{gathered} \tag{3.59}$$

(3.22) denklemindeki lineer olmayan problemler için Sinc-Galerkin sistemi ;

$$\begin{gathered}0=\langle NL\left[\vartheta_{11_N}+\vartheta_{21_N}\right]-f_1, S(l,m)\circ\phi(x)\rangle,\\ 0=(Q_0\vartheta_{11}, S(j,m)\circ\phi)+\big(Q_1\vartheta_{11}', S(j,m)\circ\phi\big)-\big(Q_2\vartheta_{11}'', S(j,m)\circ\phi\big)\\ +(R_0\vartheta_{21}, S(j,m)\circ\phi)+\big(R_1{\vartheta_{21}}', S(j,m)\circ\phi\big)-\big(R_2{\vartheta_{21}}'', S(j,m)\circ\phi\big)\\ (NL_1(\vartheta_{11}), S(j,m)\circ\phi)+(NL_2(\vartheta_{21}), S(j,m)\circ\phi)-(f_1, S(j,m)\circ\phi)).\\ 0=\langle NL\left[\vartheta_{12_N}+\vartheta_{22_N}\right]-f_2, S(l,m)\circ\phi(x)\rangle,\\ 0=(S_0\vartheta_{12}, S(j,m)\circ\phi)+\big(S_1\vartheta_{12}', S(j,m)\circ\phi\big)-\big(S_2\vartheta_{12}'', S(j,m)\circ\phi\big)\\ +(T_0\vartheta_{22}, S(j,m)\circ\phi)+\big(T_1{\vartheta_{22}}', S(j,m)\circ\phi\big)-\big(T_2{\vartheta_{22}}'', S(j,m)\circ\phi\big)\\ (NL_3(\vartheta_{12}), S(j,m)\circ\phi)+\big(NL_4(\vartheta_{22}), S(j,m)\circ\phi\big)-(f_2, S(j,m)\circ\phi)).\end{gathered} \tag{3.60}$$

Lineer ve lineer olmayan Sinc-Galerkin sisteminin yaklaşımı sırasıyla (3.61) ve (3.62) da yer almakta ve hata terimi $CMe^{-(\pi\alpha dM)^{1/2}}$ olarak sınırlanmıştır;

$$
\begin{aligned}
&\left| -m\sum_{l=-M}^{M}\vartheta_1(x_l)\left[\frac{\delta^2{}_{jl}}{m}\left(p_2\Omega\phi'\right)(x_l)+\frac{\delta^1{}_{jl}}{m}\left(\frac{p_2\Omega\phi''}{\phi'}+2\left(p_2\Omega\right)'\right)(x_j)\right]-m\left(\frac{\Omega''\vartheta_1 p_2}{\phi'}\right)(x_j)\right. \\
&\qquad \left. +m\sum_{l=-M}^{M}\left(\vartheta_1 p_1\Omega\right)(x_l)\frac{\delta^1{}_{jl}}{m}+m\left(\frac{\vartheta_1\left(p_1\Omega\right)'}{\phi'}\right)(x_j)-m\left(\frac{\vartheta_1\Omega}{\phi'}\right)(x_j)\right| \\
&\qquad\qquad + \\
&\left| -m\sum_{l=-M}^{M}\vartheta_2(x_l)\left[\frac{\delta^2{}_{jl}}{m}\left(r_2\Omega\phi'\right)(x_l)+\frac{\delta^1{}_{jl}}{m}\left(\frac{r_2\Omega\phi''}{\phi'}+2\left(r_2\Omega\right)'\right)(x_j)\right]-m\left(\frac{\Omega''\vartheta_2 r_2}{\phi'}\right)(x_j)\right. \\
&\qquad \left. +m\sum_{l=-M}^{M}\left(\vartheta_2 r_1\Omega\right)(x_l)\frac{\delta^1{}_{jl}}{m}+m\left(\frac{\vartheta_2\left(r_1\Omega\right)'}{\phi'}\right)(x_j)-m\left(\frac{\vartheta_2\Omega}{\phi'}\right)(x_j)\right| \\
&\qquad +\left|m\left(\frac{f_1}{\phi'}\right)(x_j)\right|+\left|m\left(\frac{f_2}{\phi'}\right)(x_j)\right| \\
&\qquad \leq \left(2L_2+2L_1+4L_0\right)Me^{\left(-(\pi\alpha dM)^{\frac{1}{2}}\right)}\equiv CMe^{\left(-(\pi\alpha dM)^{\frac{1}{2}}\right)}.
\end{aligned}
\tag{3.61}
$$

$$
\begin{aligned}
&\left| -m\sum_{l=-M}^{M}\vartheta_1(x_l)\left[\frac{\delta^2{}_{jl}}{m}\left(p_2\Omega\phi'\right)(x_l)+\frac{\delta^1{}_{jl}}{m}\left(\frac{p_2\Omega\phi''}{\phi'}+2\left(p_2\Omega\right)'\right)(x_j)\right]-m\left(\frac{\Omega''\vartheta_1 p_2}{\phi'}\right)(x_j)\right. \\
&\qquad \left. +m\sum_{l=-M}^{M}\left(\vartheta_1 p_1\Omega\right)(x_l)\frac{\delta^1{}_{jl}}{m}+m\left(\frac{\vartheta_1\left(p_1\Omega\right)'}{\phi'}\right)(x_j)-m\left(\frac{\vartheta_1\Omega}{\phi'}\right)(x_j)\right| \\
&\qquad\qquad + \\
&\left| -m\sum_{l=-M}^{M}\vartheta_2(x_l)\left[\frac{\delta^2{}_{jl}}{m}\left(r_2\Omega\phi'\right)(x_l)+\frac{\delta^1{}_{jl}}{m}\left(\frac{r_2\Omega\phi''}{\phi'}+2\left(r_2\Omega\right)'\right)(x_j)\right]-m\left(\frac{\Omega''\vartheta_2 r_2}{\phi'}\right)(x_j)\right. \\
&\qquad \left. +m\sum_{l=-M}^{M}\left(\vartheta_2 r_1\Omega\right)(x_l)\frac{\delta^1{}_{jl}}{m}+m\left(\frac{\vartheta_2\left(r_1\Omega\right)'}{\phi'}\right)(x_j)-m\left(\frac{\vartheta_2\Omega}{\phi'}\right)(x_j)\right| \\
&\qquad +\left|m\left(\frac{f_1}{\phi'}\right)(x_j)\right|+\left|m\left(\frac{f_2}{\phi'}\right)(x_j)\right|+\left|m\left(\frac{NL_{part}}{\phi'}\right)(x_j)\right| \\
&\qquad \leq \left(2L_2+2L_1+8L_0\right)Me^{\left(-(\pi\alpha dM)^{\frac{1}{2}}\right)}\equiv CMe^{\left(-(\pi\alpha dM)^{\frac{1}{2}}\right)}.
\end{aligned}
\tag{3.62}
$$

Bu bölümün devamında lineer ve lineer olmayan gösterimlerin ayrımı kullanılmayacaktır. Bir çok çalışmada, $A.x = b$ metodu, bilinmeyen katsayıların elde edilmesi için kullanılmıştır. Burada önerilen yöntem, bu iki ayrık sistemin bilinmeyen katsayılarını içeren tek bir sistem haline getirmektir.

$$sys = \begin{bmatrix} \langle L\vartheta_{11_{-N}} + L\vartheta_{21_{-N}} - f_1, S(l,m) \circ \phi(x) \rangle \\ \cdots \\ \langle L\vartheta_{11_{+N}} + L\vartheta_{21_{+N}} - f_1, S(l,m) \circ \phi(x) \rangle \\ \langle L\vartheta_{12_{-N}} + L\vartheta_{22_{-N}} - f_2, S(l,m) \circ \phi(x) \rangle \\ \cdots \\ \langle L\vartheta_{12_{+N}} + L\vartheta_{22_{+N}} - f_2, S(l,m) \circ \phi(x) \rangle \end{bmatrix}_{2nx1} \tag{3.63}$$

burada $vars = [c_{-N} \dots c_0 \dots c_N,\ d_{-N} \dots d_0 \dots d_N]_{1x2n}$ ve $n = 2N + 1$.

Sonuç olarak, eğer bilinmeyen katsayıların elde edilmesi için $A.x = b$ metodu kullanılırsa, gösterim aşağıdaki şekle dönüşecektir;

$$[sys]_{2nx1}.[vars]_{1x2n} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & 0 \\ \dots & \dots & 0 & 0 \end{bmatrix}_{2nx2n} \tag{3.64}$$

(3.64) denkleminin çözümü ile elde edilen katsayılar, Whittaker kardinalite fonksiyonu içerisinde kullanılınca ϑ_1 ve ϑ_2 fonksiyonlarının yaklaşık çözümleri elde edilecektir.

4
SAYISAL UYGULAMALAR

Bu bölümde, lineer ve lineer olmayan ADD sistemleri Sinc-Galerkin yöntemi kullanılarak çözülmüştür. Tablo ve şekiller, Sinc-Galerkin yönteminin farkını ve etkinliğini göstermektedir. Ayrıca sayısal sonuçlar ve şekiller Maple Yazılımı kullanılarak elde edilmiştir. Örnek 1 ve 2 sabit katsayılı lineer ADD sistemini, örnek 3 ve 4 lineer olmayan ADD sistemine ait uygulamaları göstermektedir.

4.1 Örnek 1

Çiftli reaksiyon-difüzyon, iki noktalı SDP'lerinin tekil olarak bozulmuş *(perturbed)* sistemini ele alalım [59]:

$$\begin{cases} -\varepsilon\vartheta''_1(x)+4\vartheta_1(x)-2\vartheta_2(x)=1 \\ -\varepsilon\vartheta''_2(x)-\vartheta_1(x)+3\vartheta_2(x)=2 \\ \vartheta_1(0)=\vartheta_1(1)=\vartheta_2(0)=\vartheta_1(1)=0 \\ 0\le x\le 1 \end{cases}. \tag{4.1}$$

Burada, küçük ε değişkeni, bozulma *(perturbation)* katsayısını temsil etmektedir. (4.1) denklemindeki genelleştirilmiş sistem (1.1);
$i=1..4$ ve $j=1,2$ için $NL_i(\vartheta_j(x))=0$, $Q_0(x)=4$, $Q_1(x)=0$, $Q_2(x)=-\varepsilon$, $R_0(x)=-2$, $R_1(x)=0$, $R_2(x)=0$, $f_1(x)=1$, $S_0(x)=-1$, $S_1(x)=0$, $S_2(x)=0$, $T_0(x)=3$, $T_1(x)=0$, $T_2(x)=-\varepsilon$ ve $f_2(x)=2$.

Tablo 4.1, (4.1) problemindeki $\vartheta_1(x)$ çözümünü $N=32$ ve $\varepsilon=10^{-4}$ değerleri için sayısal sonuçlarını göstermektedir. Tablo 4.2, (4.1) problemindeki $\vartheta_1(x)$ çözümünü arttırılmış $N=64$ ve $\varepsilon=10^{-4}$ değerleri için sayısal sonuçlarını göstermektedir. Tablo 4.3, (4.1) problemindeki $\vartheta_1(x)$ çözümünün $N=32$ ve $\varepsilon=10^{-4}$ değerleri için SGM yaklaşımı ve asimptotik başlangıç değer metodu [59] arasındaki mutlak hatanın karşılaştırılmasını göstermektedir.

Şekil 4.1, (4.1) problemindeki $\vartheta_1(x)$ ve $\vartheta_2(x)$ çözümlerinin $N = 32$ ve $\varepsilon = 10^{-4}$ değerleri için SGM yaklaşımlarını (yaklaşık çözümleri) göstermektedir. Şekil 4.2, (4.1) problemindeki $\vartheta_1(x)$ çözümünün $N = 32$ ve $\varepsilon = 10^{-4}$ değerleri için SGM yaklaşımı ve gerçek çözüm arasındaki mutlak hatayı ifade etmektedir. Şekil 4.3, (4.1) problemindeki $\vartheta_2(x)$ çözümünün $N = 32$ ve $\varepsilon = 10^{-4}$ değerleri için SGM yaklaşımı ve gerçek çözüm arasındaki mutlak hatayı temsil eder. Şekil 4.4, (4.1) problemindeki $\vartheta_1(x)$ çözümünün $N = 64$ ve $\varepsilon = 10^{-4}$ değerleri için SGM yaklaşımı ve gerçek çözüm arasındaki mutlak hatayı temsil eder.

Tablo 4.1 Örnek 1'deki $\vartheta_1(x)$ çözümünün sayısal sonuçları ($N = 32$ ve $\varepsilon = 10^{-4}$)

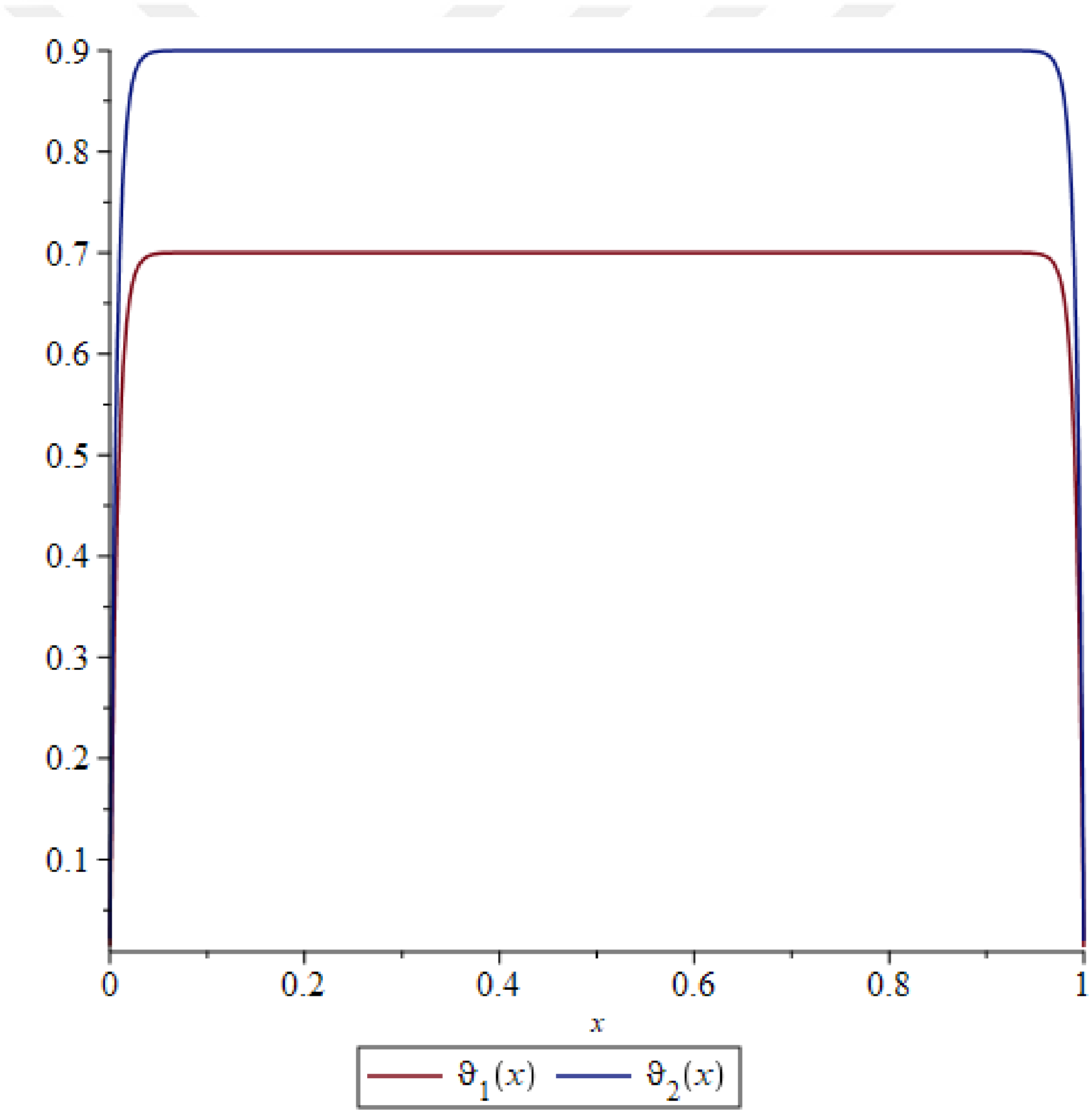
x	Gerçek Çözüm	Yaklaşık Çözüm	Mutlak Hata
0.1	0.699999399	0.699999975	5.76163E-07
0.11	0.699999854	0.700003458	3.604E-06
0.12	0.699999965	0.700004223	4.25848E-06
0.13	0.699999991	0.700003424	3.43301E-06
0.14	0.699999998	0.700002049	2.05138E-06
0.15	0.700000000	0.700000736	7.36064E-07
0.16	0.700000000	0.699999829	1.70418E-07
0.17	0.700000000	0.699999331	6.6936E-07
0.18	0.700000000	0.699999224	7.75543E-07
0.19	0.700000000	0.699999364	6.3551E-07
0.2	0.700000000	0.699999619	3.81052E-07

Tablo 4.2 Örnek 1'deki $\vartheta_1(x)$ çözümünün sayısal sonuçları ($N = 64$ ve $\varepsilon = 10^{-4}$)

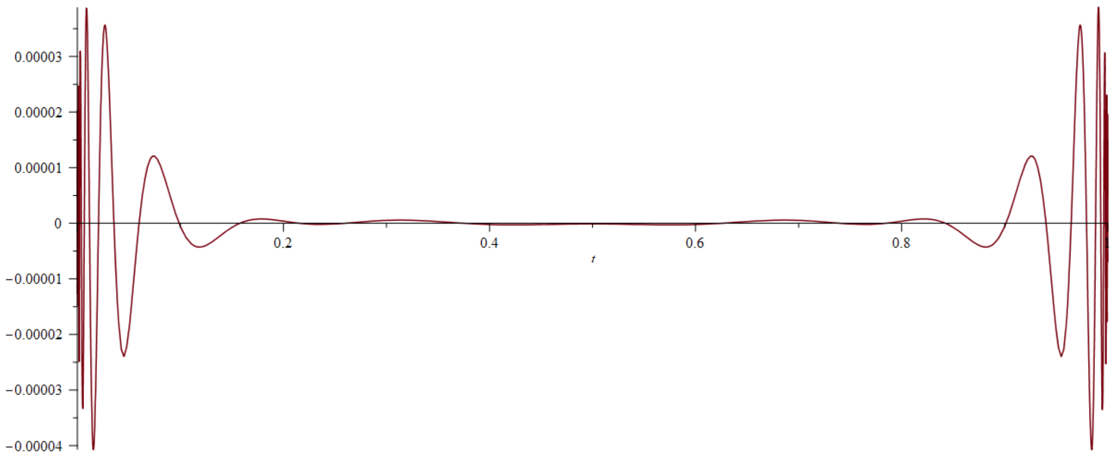
x	Gerçek Çözüm	Yaklaşık Çözüm	Mutlak Hata
0.1	0.699999399	0.699999171	2.278898E-07
0.11	0.699999854	0.699999635	2.184659E-07
0.12	0.699999965	0.699999895	6.908055E-08
0.13	0.699999991	0.700000089	9.815098E-08
0.14	0.699999998	0.700000221	2.235590E-07
0.15	0.700000000	0.700000241	2.423101E-07
0.16	0.700000000	0.700000169	1.699992E-07
0.17	0.700000000	0.700000040	4.029413E-08
0.18	0.700000000	0.699999916	8.336696E-08
0.19	0.700000000	0.699999823	1.768087E-07
0.2	0.700000000	0.699999786	2.130291E-07

Tablo 4.3 Örnek 1'deki $\vartheta_1(x)$ çözümünün $N = 32$ ve $\varepsilon = 10^{(-4)}$ değerleri için SGM yaklaşımı ve [59] arasındaki mutlak hatanın karşılaştırılması

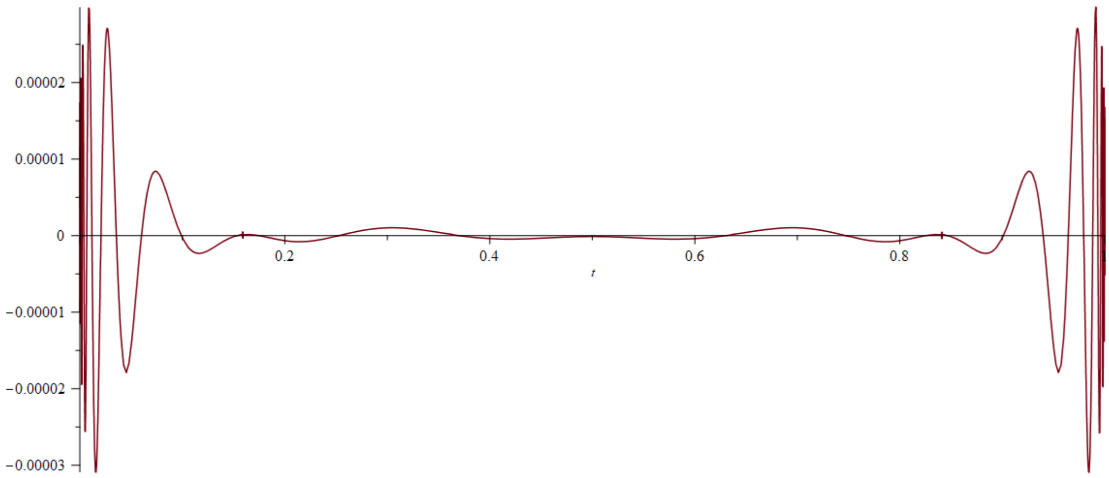
x	SGM Mutlak Hata	Mutlak Hata [59]
$\sqrt{\varepsilon}$	3,17346E-05	1,82E-02
$2\sqrt{\varepsilon}$	5,8823E-06	6,36E-03
$3\sqrt{\varepsilon}$	2,79308E-05	1,75E-03
$4\sqrt{\varepsilon}$	1,76096E-05	4,48E-04
$5\sqrt{\varepsilon}$	1,93274E-05	1,11E-04
$6\sqrt{\varepsilon}$	1,2414E-07	2,73E-05
$7\sqrt{\varepsilon}$	1,12516E-05	6,68E-06
$8\sqrt{\varepsilon}$	1,06398E-05	1,64E-06
$9\sqrt{\varepsilon}$	4,88453E-06	4,07E-07



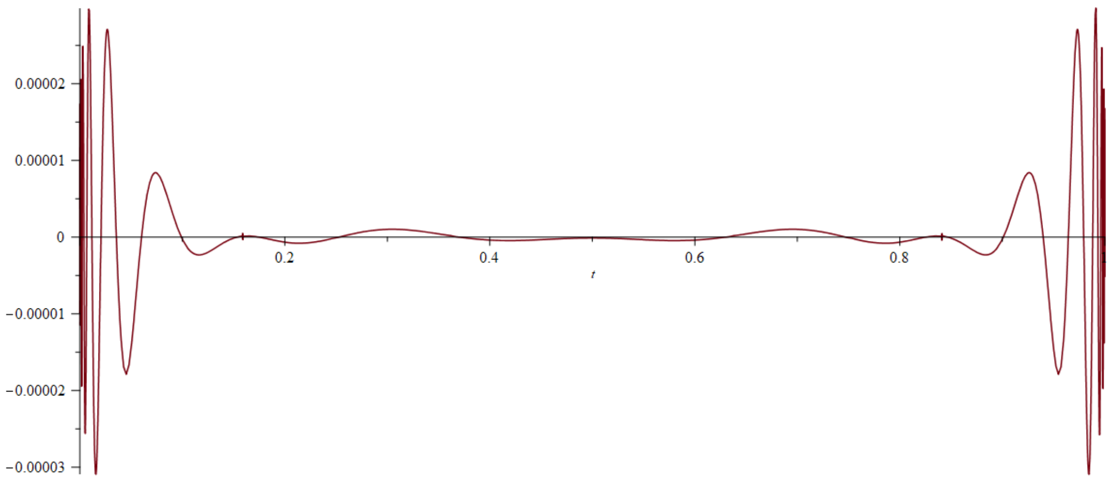
Şekil 4.1 Örnek 1'deki $\vartheta_1(x)$ ve $\vartheta_2(x)$ yaklaşık çözümü ($N = 32$ ve $\varepsilon = 10^{-4}$)



Şekil 4.2 Örnek 1'deki $\vartheta_1(x)$ çözümünün SGM yaklaşımı ve gerçek çözümü arasındaki hata ($N = 32$ ve $\varepsilon = 10^{-4}$)



Şekil 4.3 Örnek 1'deki $\vartheta_2(x)$ çözümünün SGM yaklaşımı ve gerçek çözümü arasındaki hata ($N = 32$ ve $\varepsilon = 10^{-4}$)



Şekil 4.4 Örnek 1'deki $\vartheta_1(x)$ çözümünün SGM yaklaşımı ve gerçek çözümü arasındaki hata ($N = 64$ ve $\varepsilon = 10^{-4}$)

4.2 Örnek 2

Çiftli reaksiyon-difüzyon, iki noktalı SDP'lerinin tekil olarak bozulmuş *(perturbed)* sistemini ele alalım [60]:

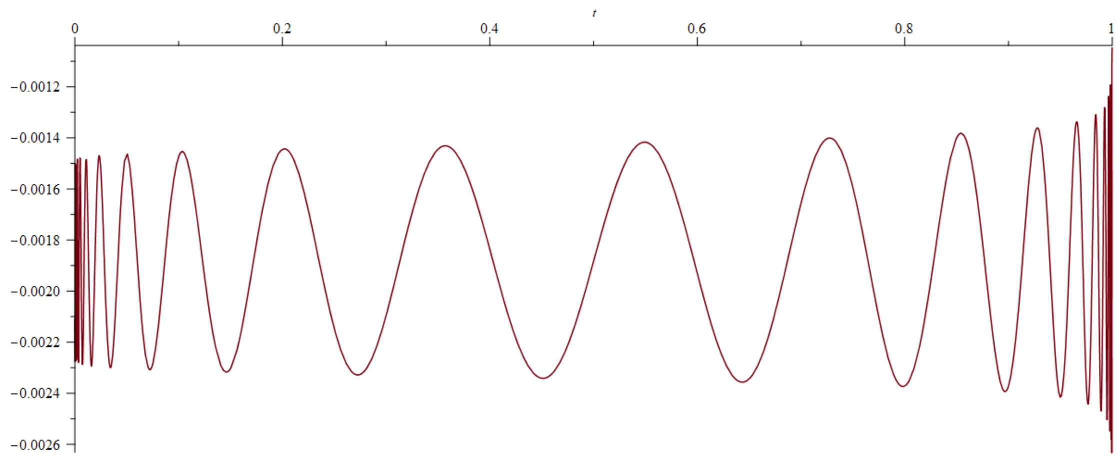
$$\begin{cases} \varepsilon\vartheta_1''(x)+3\vartheta_1(x)=15x^4 \\ \varepsilon\vartheta_2''(x)+2\vartheta_2'(x)+0.75\vartheta_1'(x)=0.6e^x \\ \vartheta_1(0)=\vartheta_1(1)=\vartheta_2(0)=\vartheta_1(1)=0 \\ 0\leq x\leq 1 \end{cases}. \tag{4.2}$$

Burada, küçük ε değişkeni, bozulma *(perturbation)* katsayısını temsil etmektedir. (4.2) denklemindeki genelleştirilmiş sistem (1.1);

$i=1..4$ ve $j=1,2$ için $NL_i(\vartheta_j(x))=0$. $Q_0(x)=3$, $Q_1(x)=0$, $Q_2(x)=\varepsilon$, $R_0(x)=0$, $R_1(x)=0$, $R_2(x)=0$, $f_1(x)=15x^4$, $S_0(x)=0$, $S_1(x)=0.75$, $S_2(x)=0$, $T_0(x)=3$, $T_1(x)=2$, $T_2(x)=\varepsilon$ *ve* $f_2(x)=0.6e^x$.

Tablo 4.4, (4.2) problemindeki $\vartheta_1(x)$ çözümünü $N=64$ ve $\varepsilon=2^{-22}$ değerleri için sayısal sonuçlarını göstermektedir.

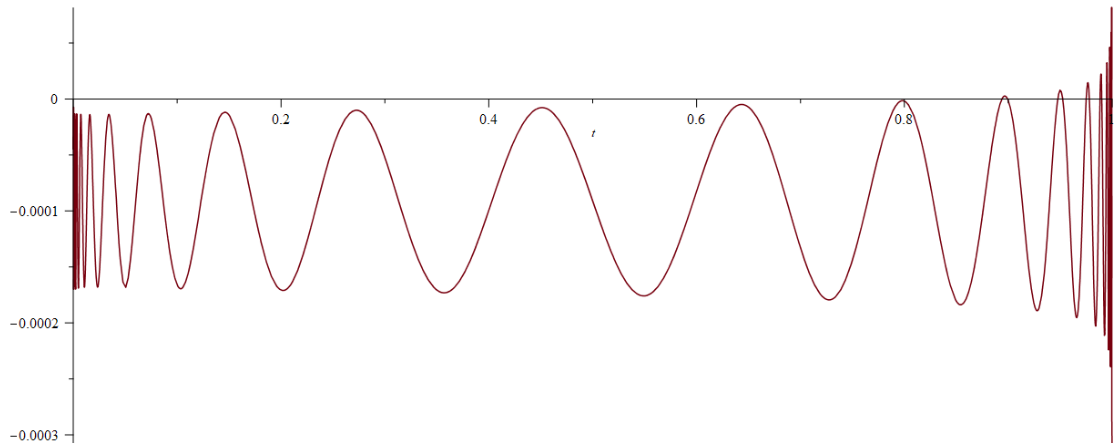
Şekil 4.5 ve 4.7, sırasıyla (4.2) problemindeki $\vartheta_1(x)$ çözümünün $\varepsilon=2^{-22}$, $N=64$ ve $N=128$ değerleri için SGM yaklaşımı ve gerçek çözüm arasındaki mutlak hatayı göstermektedir. Şekil 4.6 ve 4.8, sırasıyla (4.2) problemindeki $\vartheta_2(x)$ çözümünün $\varepsilon=2^{-22}$, $N=64$ ve $N=128$ değerleri için SGM yaklaşımı ve gerçek çözüm arasındaki mutlak hatayı göstermektedir. Şekil 4.9, (4.2) problemindeki $\vartheta_1(x)$ ve $\vartheta_2(x)$ çözümlerinin $N=64$ ve $\varepsilon=2^{-22}$ değerleri için SGM yaklaşımı ve gerçek çözümlerini göstermektedir.



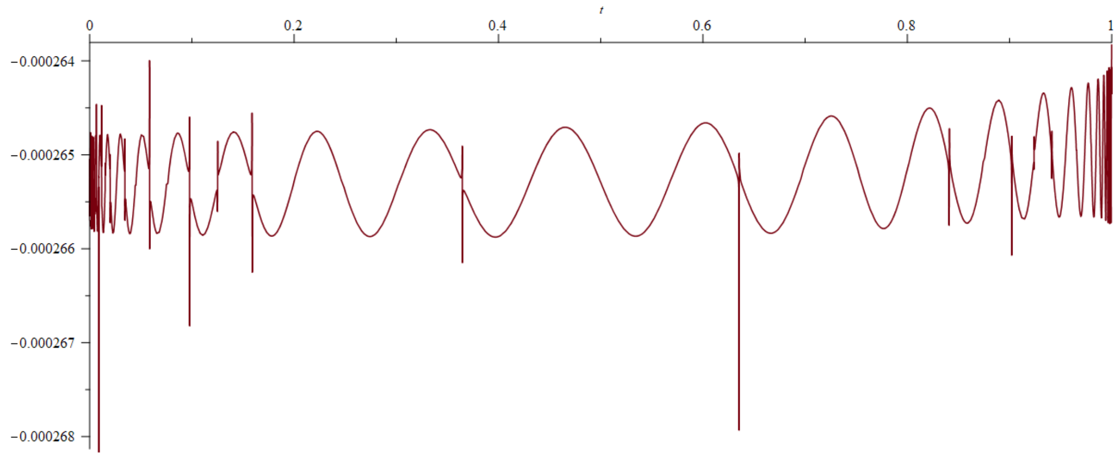
Şekil 4.5 Örnek 2'deki $\vartheta_1(x)$ çözümünün SGM yaklaşımı ve gerçek çözümü arasındaki hata ($N=32$ ve $\varepsilon=2^{-22}$)

Tablo 4.4 Örnek 2'deki $\vartheta_1(x)$ çözümünün $N = 64$ ve $\varepsilon = 2^{-22}$ değerleri için sayısal sonuçları

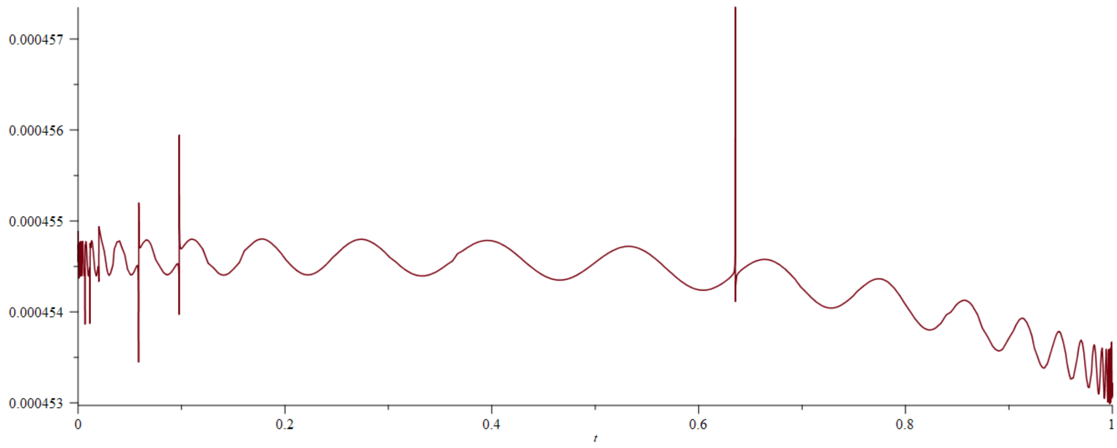
x	Gerçek Çözüm	Yaklaşık Çözüm	Mutlak Hata
0,1	-0,99999	-0,998516927	0,001473073
0,11	-0,999983895	-0,998467043	0,001516852
0,12	-0,999975117	-0,998191159	0,001783958
0,13	-0,999962871	-0,997872476	0,002090394
0,14	-0,999946218	-0,997661471	0,002284747
0,15	-0,999924063	-0,997621168	0,002302895
0,16	-0,999895142	-0,997731802	0,002163341
0,17	-0,999858014	-0,997923498	0,001934516
0,18	-0,999811043	-0,99811289	0,001698154
0,19	-0,99975239	-0,998230415	0,001521975
0,2	-0,99968	-0,998234665	0,001445335



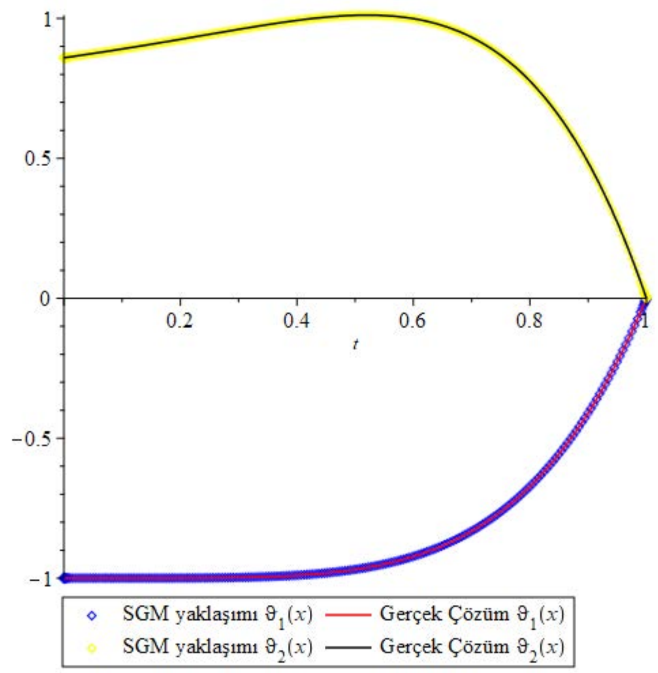
Şekil 4.6 Örnek 2'deki $\vartheta_2(x)$ çözümünün SGM yaklaşımı ve gerçek çözümü arasındaki hata ($N = 64$ ve $\varepsilon = 2^{-22}$)



Şekil 4.7 Örnek 2'deki $\vartheta_1(x)$ çözümünün SGM yaklaşımı ve gerçek çözümü arasındaki hata ($N = 128$ ve $\varepsilon = 2^{-22}$)



Şekil 4.8 Örnek 2'deki $\vartheta_2(x)$ çözümünün SGM yaklaşımı ve gerçek çözümü arasındaki hata ($N = 128$ ve $\varepsilon = 2^{-22}$)



Şekil 4.9 Örnek 2'deki $\vartheta_1(x)$ ve $\vartheta_2(x)$ çözümlerinin SGM yaklaşımı ve gerçek çözümü ($N = 128$ ve $\varepsilon = 2^{-22}$)

4.3 Örnek 3

Lineer olmayan ADD sistemini ele alalım [61]:

$$\begin{cases} \vartheta_1''(x) + x\vartheta_1'(x) + \cos(\pi x)\vartheta_2''(x) = f_1(x) \\ \vartheta_2''(x) + x\vartheta_1'(x) + x\vartheta_1^2(x) = f_2(x) \\ f_1(x) = \sin(x) + \left(x^2 - x + 2\right)\cos(x) + (1-2x)\cos(\pi x) \\ f_2(x) = -2 + x\sin(x) + x(x-1)^2 + \sin(x)^2 + \left(x^2 - x\right)\cos(x) \\ \vartheta_1(0) = \vartheta_1(1) = \vartheta_2(0) = \vartheta_1(1) = 0 \\ 0 \le x \le 1 \end{cases} . \tag{4.3}$$

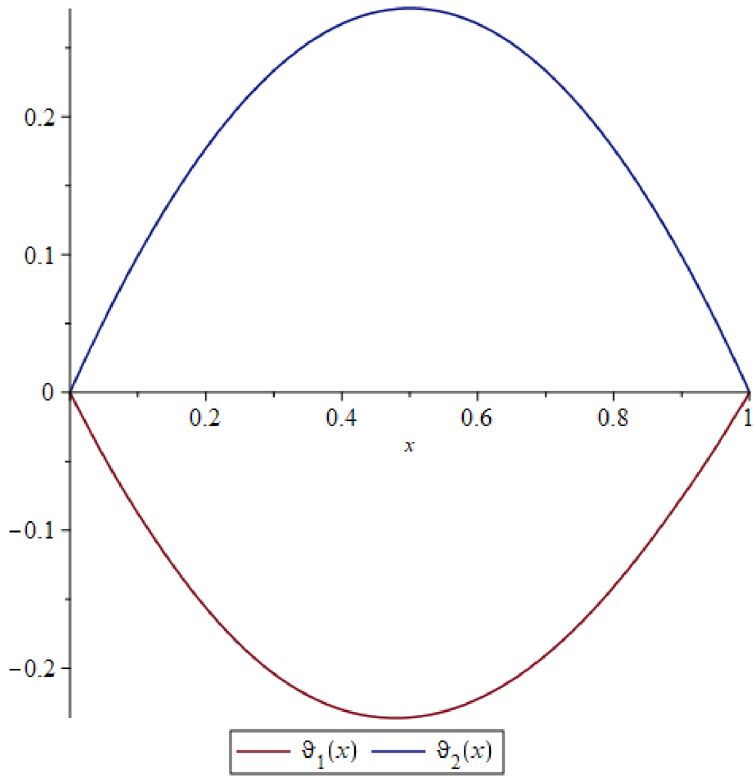
(4.3) denklemindeki genelleştirilmiş sistem (1.1);
$NL_1(\vartheta_1(x)) = NL_2(\vartheta_2(x)) = NL_4(\vartheta_2(x)) = 0$ ve $NL_3(\vartheta_1(x)) = x\vartheta_1^2(x)$. $Q_0(x) = 0,\ Q_1(x) = x,\ Q_2(x) = 1,\ R_0(x) = 0,\ R_1(x) = \cos(\pi x),\ R_2(x) = 0,\ S_0(x) = 0,\ S_1(x) = x,\ S_2(x) = 0,\ T_0(x) = 1,\ T_1(x) = 0,\ ve\ T_2(x) = 1.$

Şekil 4.10, (4.3) problemindeki $\vartheta_1(x)$ ve $\vartheta_2(x)$ çözümlerinin $N = 12$ değeri için SGM yaklaşımlarını (yaklaşık çözümleri) göstermektedir. Şekil 4.11, (4.3) problemindeki $\vartheta_1(x)$ ve $\vartheta_2(x)$ çözümlerinin $N = 24$ değeri için SGM yaklaşımlarını (yaklaşık çözümleri) gerçek çözümleri üzerinde göstermektedir. Şekil 4.12a ve 4.12b $\vartheta_1(x)$ ve $\vartheta_2(x)$ çözümleri için SGM yaklaşımı ve gerçek çözümü arasındaki hatayı $N = 12$ değeri için, şekil 4.13a ve 4.13b ise $N = 24$ değeri için göstermektedir.

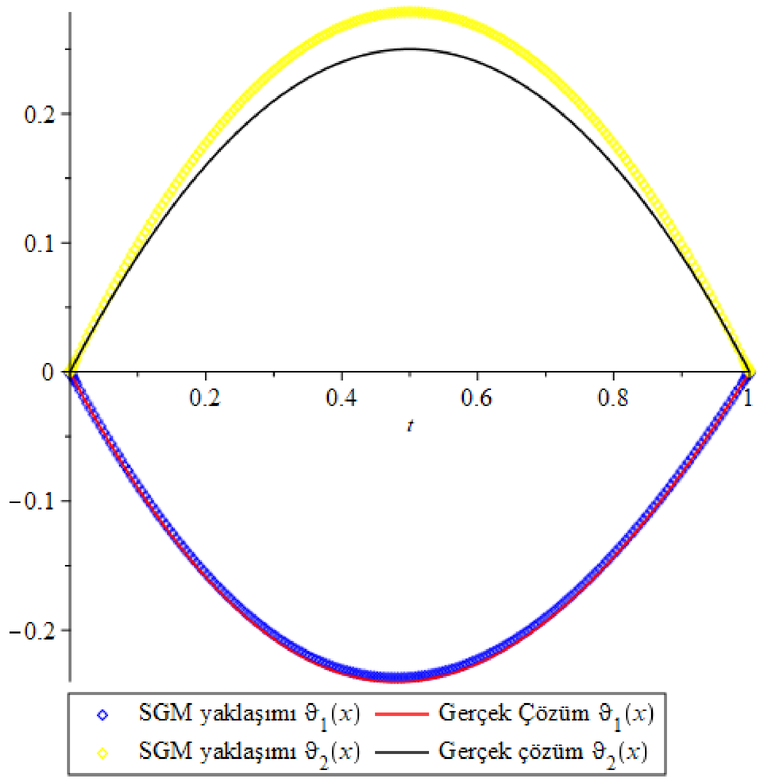
Tablo 4.5, $\vartheta_1(x)$ çözümünün gerçek çözümü, SGM yaklaşımı ve aralarındaki mutlak hatayı $N = 12$ değeri için göstermektedir. Ayrıca Tablo 4.6 $\vartheta_1(x)$ çözümünün gerçek çözümü, SGM yaklaşımı ve aralarındaki mutlak hatayı $N = 24$ değeri için göstermektedir.

Tablo 4.5 Örnek 3'teki $\vartheta_1(x)$ çözümünün sayısal sonuçları ($N = 12$)

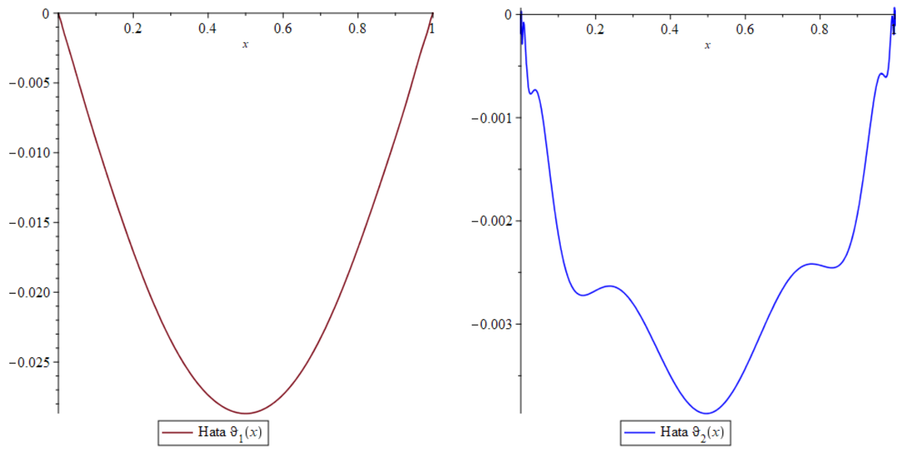
x	Gerçek Çözüm	Yaklaşık Çözüm	Mutlak Hata
0,1	-0,089850075	-0,087723258	0,002126817
0,11	-0,097702688	-0,095378797	0,002323891
0,12	-0,105346742	-0,10287106	0,002475683
0,13	-0,112781704	-0,110196384	0,00258532
0,14	-0,120007079	-0,117348847	0,002658232
0,15	-0,127022413	-0,124321566	0,002700846
0,16	-0,133827294	-0,131107519	0,002719775
0,17	-0,14042135	-0,137700034	0,002721316
0,18	-0,14680425	-0,144093073	0,002711177
0,19	-0,152975705	-0,150281361	0,002694344
0,2	-0,158935465	-0,156260435	0,00267503



Şekil 4.10 Örnek 3'teki $\vartheta_1(x)$ ve $\vartheta_2(x)$ çözümlerinin SGM yaklaşımları $(N = 12)$

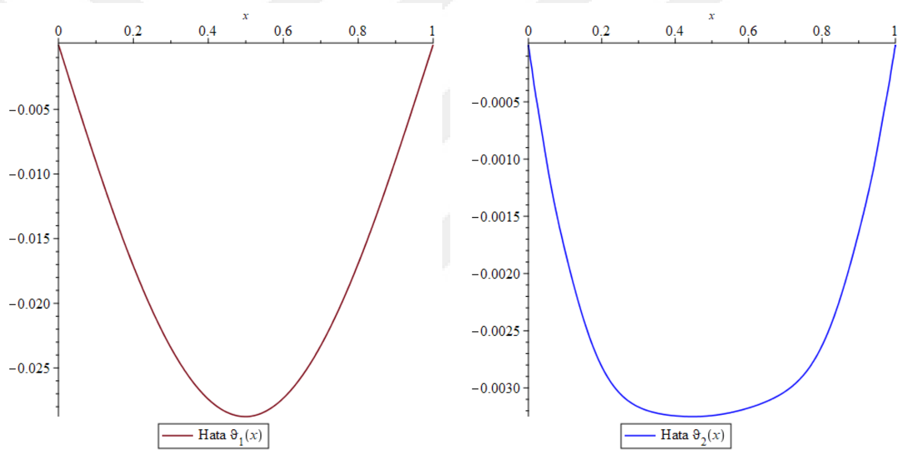


Şekil 4.11 Örnek 3'teki $\vartheta_1(x)$ ve $\vartheta_2(x)$ çözümlerinin SGM yaklaşımları ve gerçek çözümleri $(N = 24)$



(a) $\vartheta_1(x)$ **(b)** $\vartheta_2(x)$

Şekil 4.12 Örnek 3'teki a)$\vartheta_1(x)$ ve b)$\vartheta_2(x)$ çözümlerinin SGM yaklaşımları ve gerçek çözümleri arasındaki hata ($N = 12$)



(a) $\vartheta_1(x)$ **(b)** $\vartheta_2(x)$

Şekil 4.13 Örnek 3'teki a)$\vartheta_1(x)$ ve b)$\vartheta_2(x)$ çözümlerinin SGM yaklaşımları ve gerçek çözümleri arasındaki hata ($N = 24$)

Tablo 4.6 Örnek 3'teki $\vartheta_1(x)$ çözümünün sayısal sonuçları ($N = 24$)

x	Gerçek Çözüm	Yaklaşık Çözüm	Mutlak Hata
0,1	-0,089850075	-0,088046769	0,001803306
0,11	-0,097702688	-0,095769526	0,001933162
0,12	-0,105346742	-0,103288925	0,002057817
0,13	-0,112781704	-0,110604719	0,002176985
0,14	-0,120007079	-0,117717028	0,002290051
0,15	-0,127022413	-0,12462604	0,002396374
0,16	-0,133827294	-0,131331904	0,00249539
0,17	-0,14042135	-0,137834638	0,002586712
0,18	-0,14680425	-0,144134104	0,002670146
0,19	-0,152975705	-0,150230009	0,002745695
0,2	-0,158935465	-0,156121935	0,00281353

4.4 Örnek 4

Lineer olmayan ADD sistemini ele alalım [62]:

$$\begin{cases} \vartheta_1''(x) + x\vartheta_1(x) + 2x\vartheta_2(x) + x\vartheta_1(x)^2 = f_1(x) \\ \vartheta_2''(x) + \vartheta_2(x) + x^2\vartheta_1(x) + \sin(x)\vartheta_2(x)^2 = f_2(x) \\ f_1(x) = 2x\sin(\pi x) - 2 + x^2 - 2x^4 + x^5 \\ f_2(x) = (1-x)x^3 + (1-\pi^2)\sin(\pi x) + \sin(x)\sin(\pi x)^2 \\ \vartheta_1(0) = \vartheta_1(1) = \vartheta_2(0) = \vartheta_1(1) = 0 \\ 0 \leq x \leq 1 \end{cases} . \tag{4.4}$$

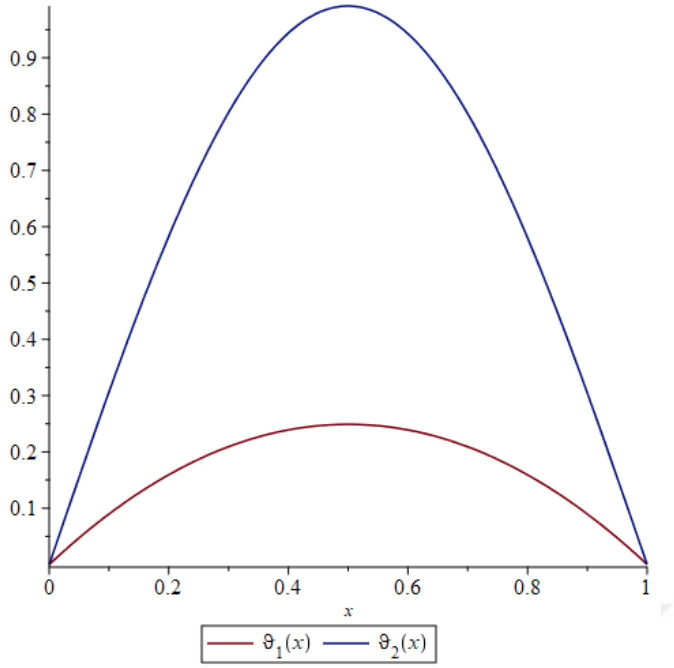
(4.4) denklemindeki genelleştirilmiş sistem (1.1);
$NL_2(\vartheta_2(x)) = NL_3(\vartheta_1(x)) = 0$, $NL_1(\vartheta_1(x)) = x\vartheta_1^2(x)$ ve $NL_4(\vartheta_2(x)) = \sin(x)\vartheta_2^2(x)$. $Q_0(x) = x,\ Q_1(x) = 0,\ Q_2(x) = 1,\ R_0(x) = 2x,\ R_1(x) = 0,\ R_2(x) = 0,\ S_0(x) = x^2,\ S_1(x) = 0,\ S_2(x) = 0,\ T_0(x) = 1,\ T_1(x) = 0,\ ve\ T_2(x) = 1.$

Şekil 4.13a, (4.4) problemindeki $\vartheta_1(x)$ ve $\vartheta_2(x)$ çözümlerinin $N = 16$ değeri için SGM yaklaşımlarını (yaklaşık çözümleri) göstermektedir. Şekil 4.15a ve 4.15b $\vartheta_1(x)$ ve $\vartheta_2(x)$ çözümleri için SGM yaklaşımı ve gerçek çözümü arasındaki hatayı $N = 16$ değeri için göstermektedir. Şekil 4.16, (4.4) problemindeki $\vartheta_1(x)$ ve $\vartheta_2(x)$ çözümlerinin $N = 16$ değeri için SGM yaklaşımlarını (yaklaşık çözümleri) gerçek çözümleri üzerinde göstermektedir.

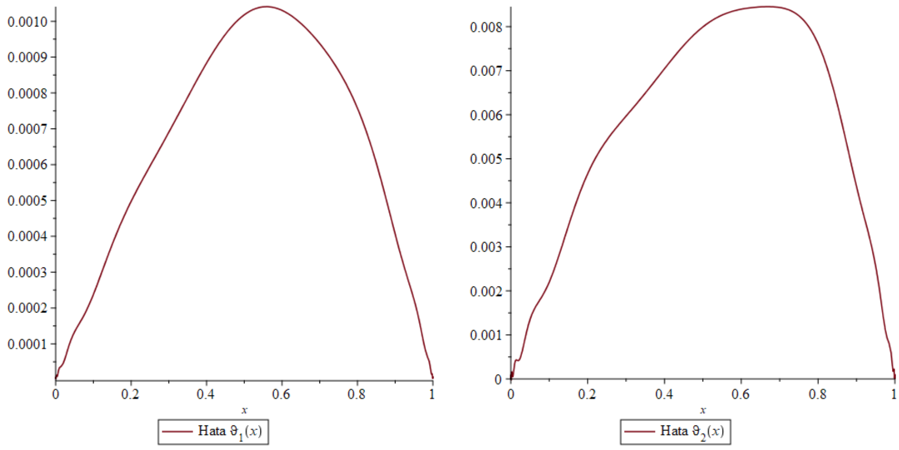
Tablo 4.7, $\vartheta_1(x)$ çözümünün gerçek çözümü, SGM yaklaşımı ve aralarındaki mutlak hatayı $N = 16$ değeri için göstermektedir. Ayrıca tablo 4.8 $\vartheta_2(x)$ çözümünün gerçek çözümü, SGM yaklaşımı ve aralarındaki mutlak hatayı $N = 16$ değeri için göstermektedir.

Tablo 4.7 Örnek 4'teki $\vartheta_1(x)$ çözümünün sayısal sonuçları ($N = 16$)

x	Gerçek Çözüm	Yaklaşık Çözüm	Mutlak Hata
0,1	0,09	0,08976203	0,00023797
0,11	0,0979	0,097634794	0,000265206
0,12	0,1056	0,105306495	0,000293505
0,13	0,1131	0,112777915	0,000322085
0,14	0,1204	0,120049682	0,000350319
0,15	0,1275	0,127122246	0,000377755
0,16	0,1344	0,133995888	0,000404112
0,17	0,1411	0,140670748	0,000429252
0,18	0,1476	0,14714684	0,00045316
0,19	0,1539	0,15342411	0,00047589
0,2	0,16	0,159502432	0,000497568

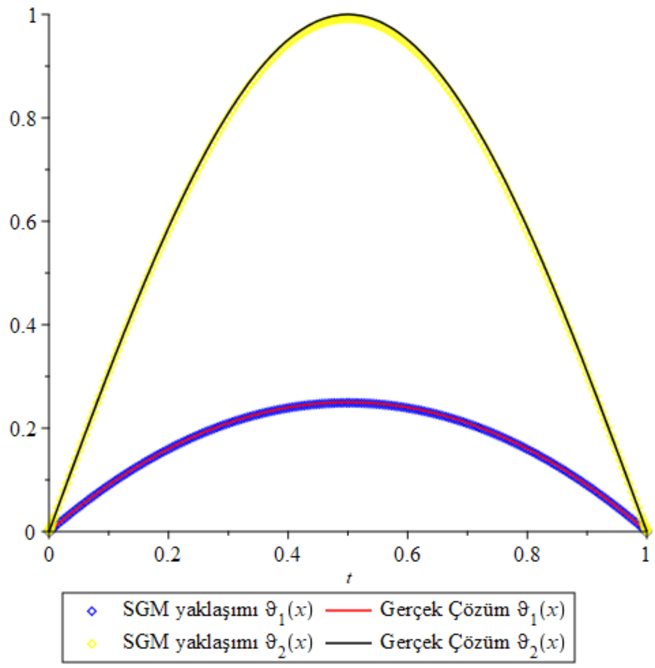


Şekil 4.14 Örnek 4'teki $\vartheta_1(x)$ ve $\vartheta_2(x)$ çözümlerinin SGM yaklaşımları ($N = 16$)



(a) $\vartheta_1(x)$ **(b)** $\vartheta_2(x)$

Şekil 4.15 Örnek 4'teki a)$\vartheta_1(x)$ ve b)$\vartheta_2(x)$ çözümlerinin SGM yaklaşımları ve gerçek çözümleri arasındaki hata ($N = 16$)



Şekil 4.16 Örnek 4'teki $\vartheta_1(x)$ ve $\vartheta_2(x)$ çözümlerinin SGM yaklaşımları ve gerçek çözümleri ($N = 16$)

Tablo 4.8 Örnek 4'teki $\vartheta_1(x)$ çözümünün sayısal sonuçları ($N = 16$)

x	Gerçek Çözüm	Yaklaşık Çözüm	Mutlak Hata
0,1	0,309016994	0,306816251	0,002200743
0,11	0,33873792	0,33631738	0,002420541
0,12	0,368124553	0,365457179	0,002667374
0,13	0,397147891	0,394215551	0,00293234
0,14	0,425779292	0,422573375	0,003205916
0,15	0,4539905	0,450511062	0,003479438
0,16	0,481753674	0,478007864	0,00374581
0,17	0,509041416	0,505041671	0,003999745
0,18	0,535826795	0,531589047	0,004237748
0,19	0,562083378	0,557625523	0,004457855
0,2	0,587785252	0,583125801	0,004659451

5
SONUÇ VE ÖNERİLER

Yüksek Lisans tezinin bu bölümünde, bölüm 4'te elde edilen sonuçlar yorumlanmış ve tartışılmıştır.

Tez hakkında genel bir değerlendirme yapıldığında Sinc-Galerkin yönteminin ADD sistemlerine genişletilmesinin başarılı bir şekilde sonuçlandığı açıkça görülmektedir.

Tablo 4.1, $N = 32$ için (4.1) örneğinin mutlak hatasını göstermektedir. Yaklaşık 10^{-7} olan mutlak hata, yöntemin nispeten iyi sonuçlar verdiği ve etkili bir şekilde çalıştığı anlamına gelmektedir. Bu nedenle, eşit aralıklı düğüm sayısı N artırıldığında yöntem daha iyi sonuçlar verdiği Tablo 4.2'deki değerlerden görülmektedir. Tablo 4.3, SGM'nin asimptotik başlangıç değer yöntemi [59] ile karşılaştırılmasını göstermekte, [59]'deki yöntemden daha iyi sonuçlar verdiğini açıkça ifade etmektedir.

Aynı zamanda ADD'nin lineer bir sistemi olan örnek (4.2)'yi içeren tablo 4.4, SGM'nin mutlak hatalarını göstermektedir. (4.2) örneğinin maksimum mutlak hatası neredeyse $2,9 \times 10^{-3}$'dir. [60]'de tanıtılan sağlam parametre yöntemi *(parameter robust method)*, $\vartheta_1(x)$ maksimum mutlak hatasını $1,75 \times 10^{-1}$ olarak vermektedir. Bu sonuçlar, SGM'nin [60]'deki yöntemden daha iyi sonuçlar verdiğini önemli ölçüde göstermektedir.

ADD'nin lineer olmayan bir sistemi olan (4.3) örneğini inceleyen tablo 4.5, $\vartheta_1(x)$'ın maksimum mutlak hatasının $2,8 \times 10^{-3}$ olduğunu göstermektedir.[61] makalesi incelendiğinde SGM, makalede kullanılan Sinc-Collocation yönteminden daha iyi değerler vermektedir. Ancak daha yüksek N değerleri için Sinc-Collocation yöntemi bu çalışmada ele alınan SGM'den daha iyi sonuçlar verdiği görülmektedir.

Sonuç olarak, aynı zamanda ADD'nin lineer olmayan bir sistemi olan örnek (4.4) incelenirken, tablo 4.7 maksimum mutlak hatayı 5×10^{-4} olarak ve tablo 4.8 hatayı $4,7 \times 10^{-3}$ olarak ifade etmektedir. Ancak, [62]'deki yöntemin sayısal çözümleri verilmediği için karşılaştırma yapmak mümkün olmamıştır.

Bununla birlikte, maksimum mutlak hatalar, SGM'nin lineer olmayan sistemlerde, lineer sistemlerde olduğu kadar tatmin edici sonuçlar vermediğini göstermektedir. Gelecekteki çalışmalarda doğrusal olmayan sistemlerin etkinliğini artırmak için iyileştirmelerin yapılması mümkündür. Bundan sonraki süreçte doğrusal olmayan sistemlerin etkinliğini artırmak için iyileştirilmesine dair çalışmaların yapılması hedeflenmektedir.

KAYNAKÇA

[1] R. G. Junker, C. S. Kallesoe, J. P. Real, B. Howard, R. A. Lopes, H. Madsen, "Stochastic nonlinear modelling and application of price-based energy flexibility," *Applied Energy*, vol. 275, pp. 096–115, 2020, ISSN: 03062619. DOI: 10.1016/j.apenergy.2020.115096.

[2] Z. X. Wang,Q. Li, "Modelling the nonlinear relationship between CO_2 emissions and economic growth using a PSO algorithm-based grey Verhulst model," *Journal of Cleaner Production*, vol. 207, pp. 214–224, 2019, ISSN: 09596526. DOI: 10.1016/j.jclepro.2018.10.010.

[3] W. E. Eyaran, S. Osman, M. Wainaina, "Modelling and Analysis of SEIR with Delay Differential Equation," Tech. Rep. 4, 2019, pp. 365–382. [Online]. Available: http://www.ripublication.com.

[4] C. Xu, "Global threshold dynamics of a stochastic differential equation SIS model," *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, vol. 447, no. 2, pp. 736–757, 2017, ISSN: 10960813. DOI: 10.1016/j.jmaa.2016.10.041. arXiv: 1506.02342.

[5] W. Wang, Y. Cai, Z. Ding, Z. Gui, "A stochastic differential equation SIS epidemic model incorporating Ornstein–Uhlenbeck process," *Physica A: Statistical Mechanics and its Applications*, vol. 509, pp. 921–936, 2018, ISSN: 03784371. DOI: 10.1016/j.physa.2018.06.099.

[6] S. Qureshi,A. Yusuf, "Modeling chickenpox disease with fractional derivatives: From caputo to atangana-baleanu," *Chaos, Solitons and Fractals*, vol. 122, pp. 111–118, 2019, ISSN: 09600779. DOI: 10.1016/j.chaos.2019.03.020.

[7] Y. Hao, T. Xu, H. Hu, P. Wang, Y. Bai, "Prediction and analysis of Corona virus disease 2019," *PLoS ONE*, vol. 15, no. 10 October, 2020, ISSN: 19326203. DOI: 10.1371/journal.pone.0239960. arXiv: 2003.05447. [Online]. Available: http://arxiv.org/abs/2003.05447.

[8] I. Ahmed, G. U. Modu, A. Yusuf, P. Kumam, I. Yusuf, "A mathematical model of Coronavirus Disease (COVID-19) containing asymptomatic and symptomatic classes," *Results in Physics*, vol. 21, p. 103 776, 2021, ISSN: 22113797. DOI: 10.1016/j.rinp.2020.103776.

[9] I. Ahmed, E. F. Doungmo Goufo, A. Yusuf, P. Kumam, P. Chaipanya, K. Nonlaopon, "An epidemic prediction from analysis of a combined HIV-COVID-19 co-infection model via ABC-fractional operator," *Alexandria Engineering Journal*, vol. 60, no. 3, pp. 2979–2995, 2021, ISSN: 11100168. DOI: 10.1016/j.aej.2021.01.041.

[10] M. Guidolin, R. Guseo, C. Mortarino, "Regular and promotional sales in new product life cycles: Competition and forecasting," *Computers and Industrial Engineering*, vol. 130, pp. 250–257, 2019, ISSN: 03608352. DOI: 10.1016/j.cie.2019.02.026.

[11] L. Y. He, L. L. Pei, Y. H. Yang, "An optimised grey buffer operator for forecasting the production and sales of new energy vehicles in China," *Science of the Total Environment*, vol. 704, p. 135 321, 2020, ISSN: 18791026. DOI: 10.1016/j.scitotenv.2019.135321.

[12] B. Acay, E. Bas, T. Abdeljawad, "Fractional economic models based on market equilibrium in the frame of different type kernels," *Chaos, Solitons and Fractals*, vol. 130, p. 109 438, 2020, ISSN: 09600779. DOI: 10.1016/j.chaos.2019.109438.

[13] V. V. Tarasova,V. E. Tarasov, "Logistic map with memory from economic model," *Chaos, Solitons and Fractals*, vol. 95, pp. 84–91, 2017, ISSN: 09600779. DOI: 10.1016/j.chaos.2016.12.012.

[14] Y. Wang, V. Puig, G. Cembrano, "Non-linear economic model predictive control of water distribution networks," *Journal of Process Control*, vol. 56, pp. 23–34, 2017, ISSN: 09591524. DOI: 10.1016/j.jprocont.2017.05.004.

[15] A. R. Mahankudo, "Modelling CGM time series using Neural Ordinary Differential Equation," 2020. [Online]. Available: http://dr.iiserpune.ac.in:8080/xmlui/handle/123456789/4703.

[16] Z. Jackiewicz, M. Rahman, B. D. Welfert, "Numerical solution of a Fredholm integro-differential equation modelling over(θ,)-neural networks," *Applied Mathematics and Computation*, vol. 195, no. 2, pp. 523–536, 2008, ISSN: 00963003. DOI: 10.1016/j.amc.2007.05.031.

[17] T. Rasool, A. Q. Dar, M. A. Wani, "Development of a Predictive Equation for Modelling the Infiltration Process Using Gene Expression Programming," *Water Resources Management*, vol. 35, no. 6, pp. 1871–1888, 2021, ISSN: 15731650. DOI: 10.1007/s11269-021-02816-4. [Online]. Available: https://doi.org/10.1007/s11269-021-02816-4.

[18] J. H. He,X. H. Wu, "Exp-function method for nonlinear wave equations," *Chaos, Solitons and Fractals*, vol. 30, no. 3, pp. 700–708, 2006, ISSN: 09600779. DOI: 10.1016/j.chaos.2006.03.020.

[19] S. Zhang,H. Q. Zhang, "Fractional sub-equation method and its applications to nonlinear fractional PDEs," *Physics Letters, Section A: General, Atomic and Solid State Physics*, vol. 375, no. 7, pp. 1069–1073, 2011, ISSN: 03759601. DOI: 10.1016/j.physleta.2011.01.029.

[20] X. F. Yang, Z. C. Deng, Y. Wei, "A Riccati-Bernoulli sub-ODE method for nonlinear partial differential equations and its application," *Advances in Difference Equations*, vol. 2015, no. 1, p. 117, 2015, ISSN: 16871847. DOI: 10.1186/s13662-015-0452-4.

[21] R. Hirota, "Exact solution of the Korteweg-de Vries equation for multiple Collisions of solitons," *Physical Review Letters*, vol. 27, no. 18, pp. 1192–1194, 1971, ISSN: 00319007. DOI: 10.1103/PhysRevLett.27.1192. [Online]. Available: https://journals.aps.org/prl/abstract/10.1103/PhysRevLett.27.1192.

[22] M. Wang, X. Li, J. Zhang, "The $(\frac{\zeta}{G}', G)$)-expansion method and travelling wave solutions of nonlinear evolution equations in mathematical physics," *Physics Letters, Section A: General, Atomic and Solid State Physics*, vol. 372, no. 4, pp. 417–423, 2008, ISSN: 03759601. DOI: 10.1016/j.physleta.2007.07.051.

[23] N. Mahak,G. Akram, "Extension of rational sine-cosine and rational sinh-cosh techniques to extract solutions for the perturbed NLSE with Kerr law nonlinearity," *European Physical Journal Plus*, vol. 134, no. 4, 2019, ISSN: 21905444. DOI: 10.1140/epjp/i2019-12545-x.

[24] M. T. Darvishi, M. Najafi, A. M. Wazwaz, "New extended rational trigonometric methods and applications," *Waves in Random and Complex Media*, vol. 30, no. 1, pp. 5–26, 2020, ISSN: 17455049. DOI: 10.1080/17455030.2018.1478166. [Online]. Available: https://www.tandfonline.com/action/journalInformation?journalCode=twrm20.

[25] G. Adomian, *A review of the decomposition method in applied mathematics*, 1988. DOI: 10.1016/0022-247X(88)90170-9.

[26] F. Ayaz, "Solutions of the system of differential equations by differential transform method," *Applied Mathematics and Computation*, vol. 147, no. 2, pp. 547–567, 2004, ISSN: 00963003. DOI: 10.1016/S0096-3003(02)00794-4.

[27] S. Liao, "On the homotopy analysis method for nonlinear problems," *Applied Mathematics and Computation*, vol. 147, no. 2, pp. 499–513, 2004, ISSN: 00963003. DOI: 10.1016/S0096-3003(02)00790-7.

[28] J. H. He, "Variational iteration method - A kind of non-linear analytical technique: Some examples," *International Journal of Non-Linear Mechanics*, vol. 34, no. 4, pp. 699–708, 1999, ISSN: 00207462. DOI: 10.1016/s0020-7462(98)00048-1.

[29] H. Vazquez-Leal,A. Sarmiento-Reyes, "Power series extender method for the solution of nonlinear differential equations," *Mathematical Problems in Engineering*, vol. 2015, pp. 1–7, 2015, ISSN: 15635147. DOI: 10.1155/2015/717404. [Online]. Available: http://www.hindawi.com/journals/mpe/2015/717404/.

[30] A. Kazemi Nasab, A. Kilicman, E. Babolian, Z. Pashazadeh Atabakan, "Wavelet analysis method for solving linear and nonlinear singular boundary value problems," *Applied Mathematical Modelling*, vol. 37, no. 8, pp. 5876–5886, 2013, ISSN: 0307904X. DOI: 10.1016/j.apm.2012.12.001.

[31] Siraj-ul-Islam, I. Aziz, B. Sarler, "The numerical solution of second-order boundary-value problems by collocation method with the Haar wavelets," *Mathematical and Computer Modelling*, vol. 52, no. 9-10, pp. 1577–1590, 2010, ISSN: 08957177. DOI: 10.1016/j.mcm.2010.06.023.

[32] J. P. Boyd, “Pade approximant algorithm for solving nonlinear ordinary differential equation boundary value problems on an unbounded domain,” *Computers in Physics*, vol. 11, no. 3, p. 299, 1997, ISSN: 08941866. DOI: 10.1063/1.168606. [Online]. Available: http://scitation.aip.org/content/aip/journal/cip/11/3/10.1063/1.168606.

[33] M. Idrees Bhatti,P. Bracken, “Solutions of differential equations in a Bernstein polynomial basis,” *Journal of Computational and Applied Mathematics*, vol. 205, no. 1, pp. 272–280, 2007, ISSN: 03770427. DOI: 10.1016/j.cam.2006.05.002. [Online]. Available: https://linkinghub.elsevier.com/retrieve/pii/S0377042706003153.

[34] N. Brisebarre,M. Joldes, “Chebyshev interpolation polynomial-based tools for rigorous computing,” in *Proceedings of the 2010 International Symposium on Symbolic and Algebraic Computation - ISSAC ’10*, New York, New York, USA: ACM Press, 2010, p. 147, ISBN: 9781450301503. DOI: 10.1145/1837934.1837966. [Online]. Available: http://portal.acm.org/citation.cfm?doid=1837934.1837966.

[35] R. Bellman, B. Kashef, J. Casti, “Differential quadrature: A technique for the rapid solution of nonlinear partial differential equations,” *Journal of Computational Physics*, vol. 10, no. 1, pp. 40–52, 1972, ISSN: 00219991. DOI: 10.1016/0021-9991(72)90089-7. [Online]. Available: https://linkinghub.elsevier.com/retrieve/pii/0021999172900897.

[36] E. T. Whittaker, “XVIII.—On the Functions which are represented by the Expansions of the Interpolation-Theory,” *Proceedings of the Royal Society of Edinburgh*, vol. 35, pp. 181–194, 1915, ISSN: 0370-1646. DOI: 10.1017/S0370164600017806. [Online]. Available: https://www.cambridge.org/core/product/identifier/S0370164600017806/type/journal_article.

[37] F. Stenger, “A "Sinc-Galerkin" Method of Solution of Boundary Value Problems,” *Mathematics of Computation*, vol. 33, no. 145, p. 85, 1979, ISSN: 00255718. DOI: 10.2307/2006029.

[38] J. Lund, K. L. Bowers, *Sinc Methods for Quadrature and Differential Equations*. Society for Industrial and Applied Mathematics, 1992, ISBN: 978-0-89871-298-8. DOI: 10.1137/1.9781611971637. [Online]. Available: http://epubs.siam.org/doi/book/10.1137/1.9781611971637.

[39] R. C. Smith,K. L. Bowers, “Sinc-Galerkin estimation of diffusivity in parabolic problems,” *Inverse Problems*, vol. 9, no. 1, pp. 113–135, 1993, ISSN: 0266-5611. DOI: 10.1088/0266-5611/9/1/007. [Online]. Available: https://iopscience.iop.org/article/10.1088/0266-5611/9/1/007.

[40] A. Secer, “Sinc-Galerkin method for solving hyperbolic partial differential equations,” *An International Journal of Optimization and Control: Theories & Applications (IJOCTA)*, vol. 8, no. 2, pp. 250–258, 2018, ISSN: 2146-5703. DOI: 10.11121/ijocta.01.2018.00608. [Online]. Available: http://ijocta.org/index.php/files/article/view/608.

[41] K. L. Bowers, J. Lund, "Numerical Solution of Singular Poisson Problems via the Sinc–Galerkin Method," *SIAM Journal on Numerical Analysis*, vol. 24, no. 1, pp. 36–51, 1987, ISSN: 0036-1429. DOI: 10.1137/0724004. [Online]. Available: http://epubs.siam.org/doi/10.1137/0724004.

[42] J. Rashidinia, K. Maleknejad, N. Taheri, "Sinc-Galerkin method for numerical solution of the Bratu's problems," *Numerical Algorithms*, vol. 62, no. 1, pp. 1–11, 2013, ISSN: 15729265. DOI: 10.1007/s11075-012-9560-3.

[43] M. Zarebnia, M. Sajjadian, "The Sinc-Galerkin method for solving Troesch's problem," *Mathematical and Computer Modelling*, vol. 56, no. 9-10, pp. 218–228, 2012, ISSN: 08957177. DOI: 10.1016/j.mcm.2011.11.071.

[44] M. Dehghan, F. Emami-Naeini, "The Sinc-collocation and Sinc-Galerkin methods for solving the two-dimensional Schrodinger equation with nonhomogeneous boundary conditions," *Applied Mathematical Modelling*, vol. 37, no. 22, pp. 9379–9397, 2013, ISSN: 0307904X. DOI: 10.1016/j.apm.2013.04.043.

[45] R. C. Smith, K. L. Bowers, J. Lund, "A fully Sinc-Galerkin method for Euler–Bernoulli beam models," *Numerical Methods for Partial Differential Equations*, vol. 8, no. 2, pp. 171–202, 1992, ISSN: 10982426. DOI: 10.1002/num.1690080207.

[46] A. Secer, M. Kurulay, "The Sinc-Galerkin method and its applications on singular Dirichlet-type boundary value problems," *Boundary Value Problems*, vol. 2012, no. 1, p. 126, 2012, ISSN: 1687-2770. DOI: 10.1186/1687-2770-2012-126. [Online]. Available: https://boundaryvalueproblems.springeropen.com/articles/10.1186/1687-2770-2012-126.

[47] M. El-Gamel, A. Zayed, "Sinc-Galerkin method for solving nonlinear boundary-value problems," *Computers & Mathematics with Applications*, vol. 48, no. 9, pp. 1285–1298, 2004, ISSN: 08981221. DOI: 10.1016/j.camwa.2004.10.021. [Online]. Available: https://linkinghub.elsevier.com/retrieve/pii/S089812210400375X.

[48] A. Secer, S. Alkan, M. A. Akinlar, M. Bayram, "Sinc-Galerkin method for approximate solutions of fractional order boundary value problems," *Boundary Value Problems*, vol. 2013, 2013, ISSN: 16872770. DOI: 10.1186/1687-2770-2013-281.

[49] S. Alkan, A. Secer, "Application of Sinc-Galerkin Method for Solving Space-Fractional Boundary Value Problems," *Mathematical Problems in Engineering*, vol. 2015, pp. 1–10, 2015, ISSN: 1024-123X. DOI: 10.1155/2015/217348. [Online]. Available: http://www.hindawi.com/journals/mpe/2015/217348/.

[50] L. J. Chen, M. Li, Q. Xu, "Sinc-Galerkin method for solving the time fractional convection–diffusion equation with variable coefficients," *Advances in Difference Equations*, vol. 2020, no. 1, p. 504, 2020, ISSN: 1687-1847. DOI: 10.1186/s13662-020-02959-5. [Online]. Available: https://advancesindifferenceequations.springeropen.com/articles/10.1186/s13662-020-02959-5.

[51] S. Yan, F. Zhao, C. Li, L. Zhao, "High order WSGL difference operators combined with Sinc-Galerkin method for time fractional Schrodinger equation," *International Journal of Computer Mathematics*, vol. 97, no. 11, pp. 2259–2286, 2020, ISSN: 10290265. DOI: 10.1080/00207160.2019.1692200. [Online]. Available: https://www.tandfonline.com/doi/full/10.1080/00207160.2019.1692200.

[52] M. Nabati, S. Taherifar, M. Jalalvand, "Sinc–Galerkin approach for thermal analysis of moving porous fin subject to nanoliquid flow with different shaped nanoparticles," *Mathematical Sciences*, vol. 1, p. 3, 2021, ISSN: 2008-1359. DOI: 10.1007/s40096-021-00387-4. [Online]. Available: http://link.springer.com/10.1007/s40096-021-00387-4.

[53] S. Elgharbi, M. Essaouini, B. Abouzaid, S. El Hajji, H. Safouhi, "Double exponential Sinc numerical methods for the two-dimensional time-independent Schrodinger equation," *Molecular Physics*, vol. 119, no. 10, e1909162, 2021, ISSN: 13623028. DOI: 10.1080/00268976.2021.1909162. [Online]. Available: https://www.tandfonline.com/doi/full/10.1080/00268976.2021.1909162.

[54] M. C. Bramwell,E. Kreyszig, *Introductory Functional Analysis with Applications*, ser. Wiley classics library 424. Wiley India Pvt. Limited, 1979, vol. 63, p. 137, ISBN: 9788126511914. DOI: 10.2307/3616033. [Online]. Available: https://books.google.com.tr/books?id=osXw-pRsptoC%20https://www.jstor.org/stable/3616033?origin=crossref.

[55] L. V. Ahlfors, *Complex Analysis, An Introduction to the Theory of Analytic Functions of One Complex Variable*. McGraw-Hill Inc., 1966. [Online]. Available: https://books.google.com.tr/books?id=RfYK28TcZEwC.

[56] G. B. Thomas, M. D. Weir, J. Hass, *Thomas' Calculus*, ser. Always Learning. Pearson, 2010, ISBN: 9780321643636.

[57] H. T. H. Piaggio, *Theory of Functions*, ser. Dover books on mathematics 4267. Dover Publications, 1951, vol. 168, pp. 216–217, ISBN: 9780486692197. DOI: 10.1038/168216b0. [Online]. Available: https://books.google.com.tr/books?id=zpj77VXmuTcC%20http://www.nature.com/articles/168216b0.

[58] M. El-Gamel, J. R. Cannon, "On the solution a of second order singularly-perturbed boundary value problem by the Sinc-Galerkin method," *Zeitschrift fur angewandte Mathematik und Physik*, vol. 56, no. 1, pp. 45–58, 2005, ISSN: 0044-2275. DOI: 10.1007/s00033-004-3002-6. [Online]. Available: https://link.springer.com/article/10.1007/s00033-004-3002-6%20http://link.springer.com/10.1007/s00033-004-3002-6.

[59] T. Valanarasu,N. Ramanujam, "An asymptotic initial value method for boundary value problems for a system of singularly perturbed second order ordinary differential equations," *Applied Mathematics and Computation*, vol. 147, no. 1, pp. 227–240, 2004, ISSN: 00963003. DOI: 10.1016/S0096-3003(02)00663-X. [Online]. Available: https://linkinghub.elsevier.com/retrieve/pii/S009630030200663X.

[60] S. Bellew, E. O'Riordan, "A parameter robust numerical method for a system of two singularly perturbed convection–diffusion equations," *Applied Numerical Mathematics*, vol. 51, no. 2, pp. 171–186, 2004, ISSN: 0168-9274. DOI: https://doi.org/10.1016/j.apnum.2004.05.006. [Online]. Available: https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S016892740400087X.

[61] M. El-Gamel, "Sinc-Collocation Method for Solving Linear and Nonlinear System of Second-Order Boundary Value Problems," *Applied Mathematics*, vol. 03, no. 11, pp. 1627–1633, 2012, ISSN: 2152-7385. DOI: 10.4236/am.2012.311225. [Online]. Available: http://dx.doi.org/10.4236/am.2012.311225PublishedOnlineNovember2012%20http://www.scirp.org/journal/am%20http://www.scirp.org/journal/doi.aspx?DOI=10.4236/am.2012.311225.

[62] A. S. Bataineh, M. Noorani, I. Hashim, "Modified homotopy analysis method for solving systems of second-order BVPs," *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation*, vol. 14, no. 2, pp. 430–442, 2009, ISSN: 10075704. DOI: 10.1016/j.cnsns.2007.09.012. [Online]. Available: https://linkinghub.elsevier.com/retrieve/pii/S1007570407002456.

A
MAPLE KODLARI

Bu bölümde, Örnek 3 (4.3)'teki uygulamaya ait Maple Yazılım kodları verilmiştir.

restart:
with(LinearAlgebra):
M:=24:
SIZE:=$2*M+1$:
Q[2]:=unapply(1,x);
Q[1]:=unapply(x,x);
Q[0]:=unapply(0,x);
R[2]:=unapply(0,x);
R[1]:=unapply($cos(Pi*x)$,x);
R[0]:=unapply(0,x);
S[2]:=unapply(0,x);
S[1]:=unapply(x,x);
S[0]:=unapply(0,x);
T[2]:=unapply(1,x);
T[1]:=unapply(0,x);
T[0]:=unapply(1,x);
f[1]:=unapply($sin(x)+(x^2-x+2)*cos(x)+(1-2*x)*cos(Pi*x)$,x);
f[2]:=unapply($-2+x*sin(x)+x*((x-1)^2)*(sin(x)^2)+(x^2-x)*cos(x)$,x);
NL1:=unapply(0,x):
NL2:=unapply(x,x):
NLPartUp:=unapply(0,x);
NLPartDown:=unapply(($u(x)^2$),x);
Example:=Matrix([[$add(P[i](x)*Diff(u(x),x\$i)+R[i](x)*Diff(v(x),x\$i),i=0..2)+NL1(x)*NLPartUp(x)=f[1](x)$],[$add(Q[j](x)*Diff(u(x),x\$j)+T[j](x)*Diff(v(x),x\$j),j=0..2)+NL2(x)*NLPartDown(x)=f[2](x)$]]);
delta[0]:=unapply(piecewise($j=l,1,j<>l,0$),j,l);
delta[1]:=unapply(piecewise($j=l,0,j<>l,((-1)^{(l-j)})/(l-j)$),j,l);
delta[2]:=unapply(piecewise($j=l,(-Pi^2)/3,j<>l,-2*(-1)^{(l-j)}/(l-j)^2$),j,l);
d:=Pi/2:
h:=Pi/sqrt(M):
xl:=unapply(($exp(l*h)/(1+exp(l*h))$),l);
phi:=unapply($log(x/(1-x))$,x);
Dphi:=unapply(simplify(diff(phi(x),x)),x):
omega:=unapply(1/Dphi(x),x):

```
D2phi:=unapply(simplify(diff(phi(x),x$2)),x):
Domega:=unapply(simplify(diff(omega(x),x$1)),x):
D2omega:=unapply(simplify(diff(omega(x),x$2)),x):
sys1:=[]:
for p from -M to M do
sys1:=[op(sys1),
c[p]*(w(xl(p))*P[0](xl(p))/Dphi(xl(p)))
-add( c[j]*( subs(x=xl(j), diff(P[1](x)*omega(x),x)*delta[0](p,j)/Dphi(xl(j)))
+(delta[1](p,j)/h)*subs(x=xl(j), P[1](x)*omega(x)) ) ,j=-M...M)
+add( c[j]*( subs(x=xl(j), diff(omega(x)*P[2](x),x$2)/Dphi(xl(j)))*delta[0](p,j)
+subs(x=xl(j), 2*diff(omega(x)*P[2](x),x) +omega(x)*P[2](x)*D2phi(x)/Dphi(x))
*delta[1](p,j)/h + w(xl(j))*P[2](xl(j))*Dphi(xl(j))*delta[2](p,j)/(h^2) ) ,j=-M...M)
+g[p]*(w(xl(p))*R[0](xl(p))/Dphi(xl(p)))
-add( g[j]*( subs(x=xl(j), diff(R[1](x)*omega(x),x)*delta[0](p,j)/Dphi(xl(j)))
+(delta[1](p,j)/h)*subs(x=xl(j), R[1](x)*omega(x)) ) ,j=-M...M)
+add( g[j]*( subs(x=xl(j), diff(omega(x)*R[2](x),x$2)/Dphi(xl(j)))*delta[0](p,j)
+subs(x=xl(j), 2*diff(omega(x)*R[2](x),x) +omega(x)*R[2](x)*D2phi(x)/Dphi(x))
*delta[1](p,j)/h + w(xl(j))*R[2](xl(j))*Dphi(xl(j))*delta[2](p,j)/(h^2) ) ,j=-M...M)
+subs(u(x)=c[p],NLPartUp(x))*subs(x=xl(p),omega(x)*NL1(x))/Dphi(xl(p))
-w(xl(p))*f[1](xl(p))/Dphi(xl(p))=0]:
od:
evalf(sys1):
sys2:=[]:
for p from -M to M do
sys2:=[op(sys2),
c[p]*(w(xl(p))*Q[0](xl(p))/Dphi(xl(p)))
-add( c[j]*( subs(x=xl(j) ,diff(Q[1](x)*omega(x),x) *delta[0](p,j)/Dphi(xl(j)))
+(delta[1](p,j)/h)*subs(x=xl(j),Q[1](x)*omega(x))),j=-M...M)
+add(c[j]*(subs(x=xl(j), diff(omega(x)*Q[2](x),x$2) /Dphi(xl(j)))*delta[0](p,j)
+subs(x=xl(j), 2*diff(omega(x)*Q[2](x),x)+omega(x)*Q[2](x)*D2phi(x)/Dphi(x))
*delta[1](p,j)/h + w(xl(j))*Q[2](xl(j))*Dphi(xl(j))*delta[2](p,j)/(h^2) ),j=-M...M)
+g[p]*(w(xl(p))*T[0](xl(p))/Dphi(xl(p)))
-add( g[j]*( subs(x=xl(j), diff(T[1](x)*omega(x),x)*delta[0](p,j)/Dphi(xl(j)))
+(delta[1](p,j)/h)*subs(x=xl(j), T[1](x)*omega(x)) ) ,j=-M...M)
+add( g[j]*( subs(x=xl(j), diff(omega(x)*T[2](x),x$2)/Dphi(xl(j)))*delta[0](p,j)
+subs(x=xl(j), 2*diff(omega(x)*T[2](x),x) +omega(x)*T[2](x)*D2phi(x)/Dphi(x))
*delta[1](p,j)/h +w(xl(j))*T[2](xl(j))*Dphi(xl(j))*delta[2](p,j)/(h^2) ) ,j=-M...M)
+subs(u(x)=c[p],NLPartDown(x))*subs(x=xl(p),omega(x)*NL2(x))/Dphi(xl(p))
-w(xl(p))*f[2](xl(p))/Dphi(xl(p))=0]:
od:
evalf(sys2):
vars:=seq(c[i],i=-M..M):
vars2:=seq(g[i],i=-M..M):
vars3:=vars,vars2:
sys3:=[]:
sys3:=[op(sys3),op(1...SIZE,sys1)]:
sys3:=[op(sys3),op(1...SIZE,sys2)]:
coef:=fsolve(evalf(sys3),{vars3}):
```

```
Coeff1:=coef[1...SIZE]:
Coeff2:=coef[SIZE+1...]:
ApproximateSol1:=unapply(add(rhs(Coeff1[i+N+1])*sin(Pi*(phi(x)-i*h)/h)
/(Pi*(phi(x)-i*h)/h) ,i=-M....M),x):
ApproximateSol2:=unapply(add(rhs(Coeff2[i+N+1])*sin(Pi*(phi(x)-i*h)/h)
/(Pi*(phi(x)-i*h)/h) ,i=-M....M),x):
Exact1:=unapply((x-1)*sin(x),x);
Exact2:=unapply(x-(x^2),x);
legend-symbol:= [typeset(vartheta[1](x)),typeset(vartheta[2](x))];
plot([ApproximateSol1(x),ApproximateSol2(x)],x=0...1, legend=legend-symbol);
plot([Exact2(x),ApproximateSol2(x)],x=0..1);
plot([Exact1(x),ApproximateSol1(x)],x=0..1);
legend-symbol2 := [typeset("SGM approximation ",vartheta[1](x)),
typeset("Exact solution ",vartheta[1](x)),
typeset("SGM approximation ",vartheta[2](x)),
typeset("Exact solution ",vartheta[2](x))];
plot([ApproximateSol1(t),Exact1(t),ApproximateSol2(t),Exact2(t)],
t=0...1,legend=legend-symbol2,style=["point","line","point","line"],
color=["blue","red","yellow","black"]);
```

TEZDEN ÜRETİLMİŞ YAYINLAR

Makale

1. Secer, A., Onder, I., Ozisik, M., 2021. Sinc-Galerkin Method for Solving System of Singularly Perturbed Reaction-Diffusion Problems, Sigma Journal of Engineering and Natural Sciences, 39 (2), 203-212.