* $f(x,y) = xy - x^2 - y^2 - 2x - 2y + 4$ ekstremum noktaları?

$f_x = y - 2x - 2 = 0$
$f_y = x - 2y - 2 = 0$

$\left.\begin{matrix} y - 2x = 2 \\ -2y + x = 2 \end{matrix}\right\}$ $x = y = -2 \Rightarrow (-2,2) \rightarrow$ kritik nokta

$A = f_{xx} = -2$ $B = f_{xy} = 1$ $C = f_{yy} = -2 \Rightarrow$ $\underbrace{\begin{matrix} B^2 - AC = 1 - 4 = -3 < 0 \\ A = -2 < 0 \end{matrix}}_{(-2,2) \text{ yerel max nokta}}$

---

* $f(x,y) = 4 + x^3 + y^3 - 3xy$ fonksiyonunun kritik noktalarını bulup sınıflandırın.

$f_x = 3x^2 - 3y = 0$ ①
$f_y = 3y^2 - 3x = 0$ ②

① den $3x^2 - 3y = 0 \rightarrow y = x^2$
↓② 'de yazalım
$3x^4 - 3x = 0$
$3x(x^3 - 1) = 0 \rightarrow \boxed{x = 0}$, $\boxed{x = 1}$

$x = 0 \xrightarrow{①} y = 0 \rightarrow (0,0)$ K.N
$x = 1 \xrightarrow{①} y = 1 \rightarrow (1,1)$

$A = f_{xx} = 6x$ $B = f_{xy} = -3$ $C = f_{yy} = 6y$

| | $A = 6x$ | $B = -3$ | $C = 6y$ | $B^2 - AC$ |
|---|---|---|---|---|
| $(0,0)$ | 0 | $-3$ | 0 | $9 > 0 \rightarrow (0,0)$ Eyer N. |
| $(1,1)$ | 6 | $-3$ | 6 | $(-3)^2 - 6.6 < 0$, $A = 6 > 0$ } $(1,1)$ yerel minimum nokta |

---

* $f(x,y) = x^3 - 3x + 2y^2 + 2$ max / min?

$f_x = 3x^2 - 3 = 0 \rightarrow x = \mp 1$
$f_y = 4y = 0 \rightarrow y = 0$
} K.N $(1,0)$, $(-1,0)$

$A = f_{xx} = 6x$ $B = f_{xy} = 0$ $C = f_{yy} = 4$

| | $A = 6x$ | $B = 0$ | $C = 6$ | $B^2 - AC$ |
|---|---|---|---|---|
| $(1,0)$ | 6 | 0 | 4 | $0 - 6.(+4) < 0$, $A = 6 > 0 \Rightarrow (1,0)$ min nokta |
| $(-1,0)$ | $-6$ | 0 | 4 | $0 - 4.(-6) > 0 \rightarrow (-1,0)$ Eyer Noktası |

*Soru 3-a)* $x^2+2y^2+z^2=7$ elipsoidinin $\vec{r}(t)=t^{-1}\vec{i}+t\vec{j}+(3-t)\vec{k}$ eğrisine $P(1,1,2)$ noktasında paralel olup-olmadığını araştırınız. (13 P)

Yüzeyin normali, $F=x^2+2y^2+z^2-7$ ile

$$\nabla F=\langle 2x,4y,2z\rangle\Big|_{(1,1,2)}=\langle 2,4,4\rangle$$

Eğrinin teğet vektörü $\vec{r}\,'(t)=\langle -\frac{1}{t^2},1,-1\rangle$ ve

$t=1$ ile $\vec{r}\,'(1)=\langle -1,1,-1\rangle$

$\nabla F.\ \vec{r}\,'(1)=\langle 2,4,4\rangle.\langle -1,1,-1\rangle=-2\neq 0$ old. dan

yüzey, eğriye paralel değildir.

*Soru 3-b)* $x^2+y^2+z^2=4y+2z+5$ küresi ile $3x^2+2y^2-2z=3$ paraboloidi $P(1,2,4)$ noktasında kesişmektedir. Bu noktadaki açıyı bulunuz. (12 P)

$$\left.\begin{aligned}F(x,y,z)&=x^2+y^2+z^2-4y-2z-5\\ G(x,y,z)&=3x^2+2y^2-2z-3\end{aligned}\right\}$$

$$\nabla F=\langle 2x,2y-4,2z-2\rangle\big|_P=\langle 2,0,6\rangle$$

$$\nabla G=\langle 6x,4y,-2\rangle\big|_P=\langle 6,8,-2\rangle$$

$$\cos\theta=\frac{\nabla F.\nabla G}{|\nabla F|\,|\nabla G|}=0\Rightarrow \theta=\frac{\pi}{2}\ //$$

(*) $g\left(\frac{x}{z}\right)=yz$ ise $x.z_x - y.z_y = z$ olduğunu gösterin.

$F:\ g\left(\frac{x}{z}\right)-yz=0 \to$ Kapalı fonk.

$$\frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{F_x}{F_z}=-\frac{\frac{1}{z}\cdot g'\left(\frac{x}{z}\right)}{-\frac{x}{z^2}\cdot g'\left(\frac{x}{z}\right)-y}=\frac{z\cdot g'\left(\frac{x}{z}\right)}{x g'\left(\frac{x}{z}\right)+yz^2}$$

$$\frac{\partial z}{\partial y}=-\frac{F_y}{F_z}=-\frac{-z}{-\frac{x}{z^2}g'\left(\frac{x}{z}\right)-y}=-\frac{z^3}{x g'\left(\frac{x}{z}\right)+yz^2}$$

$$x.\frac{\partial z}{\partial x}-y.\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{xz\,g'\left(\frac{x}{z}\right)}{x g'\left(\frac{x}{z}\right)+yz^2}+\frac{yz^3}{x g'\left(\frac{x}{z}\right)+yz^2}=\frac{z\cancel{\left(x g'\left(\frac{x}{z}\right)+yz^2\right)}}{\cancel{x g'\left(\frac{x}{z}\right)+yz^2}}=z \checkmark$$

---

(*) $\frac{(2,05)^2}{(0,95)^2}$ sayısını a) lineerleştirme ile b) diferansiyel hesap ile } yaklaşık olarak hesaplayın.

$f(x,y)=\frac{x^2}{y^2}$ $\quad x_0=2 \quad y_0=1$ olsun.

a) $L(x,y)=f(x_0,y_0)+f_x(x_0,y_0).(x-x_0)+f_y(x_0,y_0).(y-y_0)$

$f_x=\frac{2x}{y^2}$ $\quad f_x(2,1)=4$ $\quad f_y=-\frac{2x^2}{y^3}$ $\quad f_y(2,1)=-8$ $\quad f(2,1)=4$

$L(x,y)=4+4(x-x_0)-8(y-y_0)\approx f(x,y) \Rightarrow f(2,05,\ 0,95)\approx L(2,05,\ 0,95)$

$=4+4(2,05-2)-8(0,95-1)$

$=4+4.(0,05)-8.(0,05)=4,6$

---

b) $dz=f_x(x_0,y_0)\,dx+f_y(x_0,y_0)\,dy$ $\quad x_0=2 \quad y_0=1$

$f_x(2,1)=4$ $\quad f_y(2,1)=-8$ $\quad x=2,05 \quad y=0,95$

$dx\cong \underbrace{x-x_0}_{\Delta x}=2,05-2=0,05$ $\quad dy\cong\Delta y=y-y_0=0,95-1=-0,05$

$dz\cong\Delta z=f(2,05,\ 0,95)-f(2,1)=\frac{(2,05)^2}{(0,95)^2}-4$

bulduklarımızı yerine koyalım:

$$\frac{(2,05)^2}{(0,95)^2}-4\cong 4.(0,05)-8.(-0,05) \Rightarrow \frac{(2,05)^2}{(0,95)^2}\cong 4+0,2+0,4=4,6$$

(*) $w = x^2y^2 + yz - z^3$ ve $x^2+y^2+z^2=6$ ise $(w,x,y,z)=(4,2,1,-1)$ noktasında a) $\left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)_y = ?$ b) $\left(\frac{\partial w}{\partial z}\right)_y = ?$

a) $\left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)_y \Rightarrow$ x,y : bağımsız değişken
w,z : bağımlı "

$w = x^2y^2+yz-z^3 \Rightarrow \frac{\partial w}{\partial x} = 2xy^2 + y\underbrace{\frac{\partial z}{\partial x}}_{-\frac{x}{z}} - 3z^2 \cdot \underbrace{\frac{\partial z}{\partial x}}_{-\frac{x}{z}}$

$f: x^2+y^2+z^2-6=0 \Rightarrow \frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{f_x}{f_z} = -\frac{2x}{2z} = -\frac{x}{z}$

$\frac{\partial w}{\partial x} = 2xy^2 + y\cdot\left(-\frac{x}{z}\right) + 3zx \Rightarrow \left.\frac{\partial w}{\partial x}\right|_{(4,2,1,-1)} = 2.2.1 - \frac{1.2}{-1} + 3.(-1).2 = \underline{\underline{0}}$

b) $\left(\frac{\partial w}{\partial z}\right)_y \Rightarrow$ z,y : bağımsız
w,x : bağımlı

$w = x^2y^2+yz-z^3 \Rightarrow \frac{\partial w}{\partial z} = 2xy^2 \cdot \frac{\partial x}{\partial z} + y - 3z^2$

$f: x^2+y^2+z^2-6=0 \Rightarrow \frac{\partial x}{\partial z} = -\frac{f_z}{f_x} = -\frac{2z}{2x} = -\frac{z}{x}$

$\frac{\partial w}{\partial z} = -2y^2z + y - 3z^2 \Rightarrow \left.\frac{\partial w}{\partial z}\right|_{(4,2,1,-1)} = -2.1.(-1)+1-3 = \underline{\underline{0}}$

**3.a)** $\lim_{x\to 0}\dfrac{e^{1-\cos x}-1}{\sin^2 x}$ limitini fonksiyonların kuvvet seri temsillerinden faydalanarak hesaplayınız (L'Hopital kullanmayınız).

$$1-\cos x = 1-\left(1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}-\frac{x^6}{6!}+\cdots\right)=\frac{x^2}{2!}-\frac{x^4}{4!}+\frac{x^6}{6!}-\cdots \quad 2$$

$$e^x = 1+x+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\cdots \Rightarrow e^{1-\cos x}=1+(1-\cos x)+\frac{(1-\cos x)^2}{2!}+\cdots \quad 1 \quad 2$$

$$e^{1-\cos x}=1+\left(\frac{x^2}{2!}-\frac{x^4}{4!}+\frac{x^6}{6!}+\cdots\right)+\left(\frac{x^2}{2!}-\frac{x^4}{4!}+\frac{x^6}{6!}+\cdots\right)^2+\cdots \quad 2$$

$$e^{1-\cos x}-1=\left(\frac{x^2}{2!}-\frac{x^4}{4!}+\frac{x^6}{6!}+\cdots\right)+\left(\frac{x^2}{2!}-\frac{x^4}{4!}+\frac{x^6}{6!}+\cdots\right)^2+\cdots$$

$$\sin^2 x=\left(x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}+\cdots\right)^2 = x^2\cdot\left(1-\frac{x^2}{3!}+\frac{x^4}{5!}+\cdots\right)^2 \Big\} \quad 1 \quad 2$$

$$e^{1-\cos x}=x^2\left[\left(\frac{1}{2!}-\frac{x^2}{4!}+\frac{x^4}{6!}+\cdots\right)+\left(\frac{x}{2!}-\frac{x^3}{4!}+\frac{x^5}{6!}+\cdots\right)^2+\cdots\right]\Big\} \quad 2$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\cancel{x^2}\left[\left(\frac{1}{2!}-\frac{x^2}{4!}+\frac{x^4}{6!}+\cdots\right)+\left(\frac{x}{2!}-\frac{x^3}{4!}+\frac{x^5}{6!}+\cdots\right)^2+\cdots\right]}{\cancel{x^2}\left(1-\frac{x^2}{3!}+\frac{x^4}{5!}+\cdots\right)^2}=\frac{1}{2} \Big\} \quad 3$$

**b)** $g$ türevlenebilir bir fonksiyon ve $g(0)=2$ olmak üzere, $z=xy.g\left(\dfrac{y}{x}\right)$ yüzeyine $P(1,0,0)$ noktasında teğet olan düzlem denklemini bulunuz.

$$0 = xy\cdot g\left(\tfrac{y}{z}\right)-z$$

$$f(x,y)=xy\,g\left(\frac{y}{x}\right)$$

$$f_x\big|_p\cdot(x-x_0)+f_y\big|_p(y-y_0)-(z-z_0)=0 \Big\} \quad 2$$

$$f_x = y\,g\left(\frac{y}{x}\right)+xy\,g'\left(\frac{y}{x}\right)\cdot\left(-\frac{y}{x^2}\right)=y\,g\left(\frac{y}{x}\right)-\frac{y^2}{x}g'\left(\frac{y}{x}\right)\Big\} \quad 2$$

$$f_y = x\,g\left(\frac{y}{x}\right)+xy\cdot g'\left(\frac{y}{x}\right)\left(\frac{1}{x}\right)=x\,g\left(\frac{y}{x}\right)+y\,g'\left(\frac{y}{x}\right)\Big\} \quad 2$$

$$f_x\big|_p = 0.g(0)-0.g'(0)=0 \Big\} \quad 1$$

$$f_y\big|_p = 1.g(0)+0.g'(0)=1.g(0)=1.2=2 \Big\} \quad 1$$

$$0.(x-1)+2.(y-0)-(z-0)=0$$

$$\boxed{2y=z} \Big\} \quad 2$$

$$\nabla f = \cancel{x}$$

44

(*) $f(x,y,z) = xe^{yz}$ fonksiyonunun $C: \left\{ \begin{array}{l} x=t^2 \\ y=t+1 \\ z=2t \end{array} \right\}$ eğrisinin $(4,3,4)$ noktasındaki teğeti boyunca $(4,3,4)$ noktasındaki türevini hesaplayınız.

$\nabla f = e^{yz}\vec{i} + xze^{yz}\vec{j} + xye^{yz}\vec{k}$ $\qquad \nabla f\big|_{(4,3,4)} = \langle e^{12}, 16e^{12}, 12e^{12} \rangle$

C eğrisi : $\vec{r}(t) = t^2\vec{i} + (t+1)\vec{j} + 2t\vec{k}$

$\downarrow$ Teğeti

$\vec{r}'(t) = 2t\vec{i} + \vec{j} + 2\vec{k}$ $\qquad$ $(4,3,4)$ noktası için $t=2$ olur.

$\vec{r}'(2) = \langle 4,1,2 \rangle$ $\qquad |\vec{r}'(2)| = \sqrt{16+1+4} = \sqrt{21}$

$$\vec{u} = \frac{\vec{r}'(2)}{|\vec{r}'(2)|} = \left\langle \frac{4}{\sqrt{21}}, \frac{1}{\sqrt{21}}, \frac{2}{\sqrt{21}} \right\rangle$$

$$(D_u f)\big|_{(4,3,4)} = \nabla f\big|_{(4,3,4)} \cdot \vec{u} = \langle e^{12}, 16e^{12}, 12e^{12} \rangle \left\langle \frac{4}{\sqrt{21}}, \frac{1}{\sqrt{21}}, \frac{2}{\sqrt{21}} \right\rangle = \underline{\underline{\frac{44}{\sqrt{21}} e^{12}}}$$

---

(*) $x^3+y^3+z^3-3xyz=4$ yüzeyinin $(1,1,2)$ noktasındaki teğet düzlemi ve normal doğrusu?

$F: x^3+y^3+z^3-3xyz-4=0$

$\nabla F = F_x\vec{i} + F_y\vec{j} + F_z\vec{k} = \langle 3x^2-3yz, 3y^2-3xz, 3z^2-3xy \rangle$

$\nabla F\big|_{(1,1,2)} = \langle \underset{a}{-3}, \underset{b}{-3}, \underset{c}{9} \rangle$ $\rightarrow$ Teğet düzleme normal

$\rightarrow$ Normal doğruya paralel

$(\underset{x_0}{1}, \underset{y_0}{1}, \underset{z_0}{2})$

**Teğet Düzlem**

$-3(x-1) - 3(y-1) + 9(z-2) = 0$

**Normal Doğru**

$x = 1-3t$
$y = 1-3t$
$z = 2+9t$

(*) $\left.\begin{aligned} x^2-y^2+u^2-v^3+3=0 \\ xy+y^2-u^3+2v^2-9=0 \end{aligned}\right\}$ a) $\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_y\Big|_{\substack{(1,2,-1,1)\\ x,y,u,v}}=?$ b) $\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)_x\Big|_{\substack{(1,2,-1,1)\\ x,y,u,v}}=?$

a) $\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_y \Rightarrow$ u,v → bağımlı
x,y → bağımsız

$x^2-y^2+u^2-v^3+3=0 \xrightarrow[\text{türev}]{x\text{'e göre}} 2x+2u.u_x-3v^2v_x=0 \xrightarrow{(1,2,-1,1)} \boxed{2u_x+3v_x=2}$

$xy+y^2-u^3+2v^2-9=0 \xrightarrow[\text{türev}]{x\text{'e göre}} y-3u^2.u_x+4vv_x=0 \xrightarrow{(1,2,-1,1)} \boxed{2=3u_x-4v_x}$

$+4/\ 2u_x+3v_x=2$
$+3/\ 3u_x-4v_x=2$
$+$
$17u_x=14 \rightarrow u_x=\frac{\partial u}{\partial x}=\underline{\underline{\frac{14}{17}}}$

---

b) $\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)_x \rightarrow$ u,v → bağımlı d.
x,y → bağımsız d.

$x^2-y^2+u^2-v^3+3=0 \xrightarrow[\text{türev}]{y\text{'e göre}} -2y+2u.u_y-3v^2v_y=0 \xrightarrow{(1,2,-1,1)} \boxed{4=-2u_y-3v_y}$

$xy+y^2-u^3+2v^2-9=0 \xrightarrow[\text{türev}]{y\text{'ye g.}} x+2y-3u^2u_y+4vv_y=0 \xrightarrow{(1,2,-1,1)} \boxed{-5=-3u_y+4v_y}$

$4/\ -2u_y-3v_y=4$
$3/\ -3u_y+4v_y=-5$
$+$
$-17u_y=1 \rightarrow u_y=\frac{\partial u}{\partial y}=\underline{\underline{-\frac{1}{17}}}$

(*) Eğer $f$ ve $g$ iki kez türevlenebilir tek değişkenli fonksiyonlar ise $w=f(x-ct)+g(x+ct)$ için $\frac{\partial^2 w}{\partial t^2}=c^2\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}$ olduğunu gösterin.

$$\frac{\partial w}{\partial t}=-cf'(x-ct)+cg'(x+ct) \Rightarrow \frac{\partial^2 w}{\partial t^2}=c^2 f''(x-ct)+c^2 g''(x+ct)$$

$$\frac{\partial w}{\partial x}=f'(x-ct)+g'(x+ct) \Rightarrow \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}=f''(x-ct)+g''(x+ct)$$

$$\frac{\partial^2 w}{\partial t^2}=c^2\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}$$

---

(*) $z=x^2-4xy-2y^2+12x-12y-1$ yüzeyine teğet olan yatay düzlem hangisidir? Teğet noktasını bulunuz.

Bir düzlem eğer denklemi $z=k$ formunda ise yataydır. Bu ise denklemin $x$ ve $y$ den bağımsız olduğunu yani $\frac{\partial F}{\partial x}=\frac{\partial F}{\partial y}=0$ olduğunu gösterir.

$F: z-x^2+4xy+2y^2-12x+12y+1=0$

$$\left.\begin{aligned} F_x&=-2x+4y-12=0 \\ F_y&=4x+4y+12=0\end{aligned}\right\} \quad \begin{aligned} x&=-4 \\ y&=1\end{aligned} \Rightarrow z=-31 \text{ bulunur.}$$

Aranan düzlem $z=-31$, nokta ise $(-4,1,-31)$ noktasıdır.

---

(*) $f(x,y)=\sqrt{2x^2+e^{2y}}$ fonksiyonu verilsin. $f(2.2,-0.2)$ için yaklaşık bir değer bulunuz.

$(2,0)$ noktasında lineerleştirme yapalım. $x_0=2$ $y_0=0$

$f(2,0)=3$

$f_x=\dfrac{4x}{2\sqrt{2x^2+e^{2y}}}$ $\quad f_x(2,0)=\dfrac{4}{3}$

$f_y=\dfrac{2e^{2y}}{2\sqrt{2x^2+e^{2y}}}$ $\quad f_y(2,0)=\dfrac{1}{3}$

$L(x,y)=3+\frac{4}{3}(x-2)+\frac{1}{3}(y-0)$

$f(x,y)\approx L(x,y) \Rightarrow f(2.2,-0.2) \approx L(2.2,-0.2)$

$L(2.2,-0.2)=3+\frac{4}{3}.(2.2-2)+\frac{1}{3}.(-0.2)$

$=3.2$

⊛ $z = \text{Arctan}(x^2 - xy)$ yüzeyinin $(0,-1)$ deki teğet düzlemini bulunuz.

$x=0,\ y=-1 \Rightarrow z = \text{Arctan}\,0 = 0 \Rightarrow$ Nokta $(0,-1,0)$

$\nabla F\big|_{(0,-1,0)} \to$ Teğet düzleme dik vektör $\quad (F: \text{Arctan}(x^2-xy) - z = 0)$

$$f_x\Big|_{(0,-1,0)} = \frac{2x-y}{1+(x^2-xy)^2}\Big|_{(0,-1,0)} = \frac{1}{1} = 1$$

$$f_y\Big|_{(0,-1,0)} = \frac{-x}{1+(x^2-yx)^2}\Big|_{(0,-1,0)} = 0 \qquad f_z\Big|_{(0,-1,0)} = -1$$

$$\nabla F\Big|_{(0,-1,0)} = \vec{i} - \vec{k}$$

Teğet Düzlem: $1(x-0) + 0(y+1) - 1(z-0) = 0 \Rightarrow \boxed{x = z}$

---

⊛ $z = \sin(x+y^2)$ nin $(\pi, 0)$ deki teğet düzlemi? Normal doğrusu?

$x=\pi,\ y=0 \Rightarrow z=0 \Rightarrow$ Nokta: $(\pi,0,0)$

$F: \sin(x+y^2) - z = 0 \Rightarrow \nabla F\big|_{(\pi,0,0)} \to$ Düzlemin normali

$$\nabla F\Big|_{(\pi,0,0)} = \cos(x+y^2)\Big|_{(\pi,0,0)}\vec{i} + 2y.\cos(x+y^2)\Big|_{(\pi,0,0)} - \vec{k} = -\vec{i} - \vec{k}$$

T. Düzlem: $-1.(x-\pi) + 0.(y-0) - 1.(z-0) = 0$

$$-x+\pi-z = 0 \Rightarrow \boxed{x+z=\pi}$$

$\nabla F\big|_{(\pi,0,0)} \to$ Doğruya paralel vektör

N. Doğru: $\begin{cases} x = \pi - t \\ y = 0 + 0t = 0 \\ z = 0 - t = -t \end{cases}$ $\quad x = \pi - t,\ y = 0,\ z = -t$

(*) $f(x,y) = x + y\sin x \quad (0 \le x \le \pi)$ fonksiyonunun ekstremumlarını inceleyin.

$f_x = 1 + y\cos x = 0$ ①

$f_y = \sin x = 0$ ② $\rightarrow$ $x = 0$ ↓① $\boxed{y=-1}$ ↓ $(0,-1)$ ; $x = \pi$ ↓① $\boxed{y=1}$ ↓ $(\pi,1)$ $\rightarrow$ Kritik noktalar

$A = f_{xx} = -y\sin x \qquad B = f_{xy} = \cos x \qquad C = f_{yy} = 0$

| | $A=-y\sin x$ | $B=\cos x$ | $C=0$ | $B^2-AC$ |
|---|---|---|---|---|
| $(0,-1)$ | 0 | 1 | 0 | $1^2-0=1>0 \rightarrow (0,-1)$ Eyer N. |
| $(\pi,1)$ | 0 | $-1$ | 0 | $(-1)^2-0=1>0 \rightarrow (\pi,1)$ Eyer N. |

---

(*) $x = u^2 + v^2$, $y = u.v$ ise $(u,v) = (\sqrt{2}, 1)$ noktasında $\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)_x = ?$

$\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)_x \Rightarrow$ $x,y \rightarrow$ bağımsız değişken
$u,v \rightarrow$ bağımlı değişken

$x = u^2 + v^2 \xrightarrow{\text{y'ye göre türev}} 0 = 2u.u_y + 2v.v_y$

$y = uv \xrightarrow{\text{y'ye göre türev}} 1 = v.u_y + u.v_y$

$\left.\begin{array}{l} u=\sqrt{2} \\ v=1 \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{array}{l} 0 = 2\sqrt{2}u_y + 2v_y \\ 1 = u_y + \sqrt{2}v_y \end{array}$

$-\sqrt{2}/ \quad 2\sqrt{2}u_y + 2v_y = 0$

$2/ \quad u_y + \sqrt{2}v_y = 1$

$+$ ―――――――――

$-2u_y = 2 \rightarrow u_y = \frac{\partial u}{\partial y} = \underline{\underline{-1}}$

(*) $x^3+3x^2y^2+y^3+4xy-z^2=0$ yüzeyi ile $x^2+y^2+z^2=11$ yüzeyinin kesişiminden oluşan eğriye $P(1,1,3)$ noktasında teğet olan doğrunun parametrik denklemi?

Teğet doğru P'de hem 1. yüzeyin hem de 2. yüzeyin gradyenine diktir.

$F: x^3+3x^2y^2+y^3+4xy-z^2=0 \Rightarrow \nabla F = F_x\vec{i}+F_y\vec{j}+F_z\vec{k}$

$F_x = 3x^2+6xy^2+4y \qquad F_x|_P = 13$

$F_y = 6x^2y+3y^2+4x \qquad F_x|_P = 13$

$F_z = -2z \qquad F_z|_P = -6$

$\nabla F|_P = \langle 13, 13, -6\rangle$

$G: x^2+y^2+z^2-11=0$

$\nabla G = G_x\vec{i}+G_y\vec{j}+G_z\vec{k}$

$G_x = 2x, \quad G_y = 2y \quad G_z = 2z$

$G_x|_P = 2 \quad G_y|_P = 2 \quad G_z|_P = 6$

$\nabla G|_P = \langle 2, 2, 6\rangle$

$$\vec{v} = \nabla G|_P \times \nabla F|_P = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 13 & 13 & -6 \\ 2 & 2 & 6 \end{vmatrix} = 90\vec{i} - 90\vec{j} = \langle \overset{a}{90}, \overset{b}{-90}, \overset{c}{0}\rangle \rightarrow \text{Doğrunun yön vektörü}$$

$P(\overset{x_0}{1}, \overset{y_0}{1}, \overset{z_0}{3})$

$x = x_0 + at = 1+90t$

$y = y_0 + bt = 1-90t$

$z = z_0 + ct = 3$

$$\left\{\begin{array}{l} x = 1+90t \\ y = 1-90t \\ z = 3 \end{array}\right\} \text{teğet doğru}$$

YTÜ - Fen-Edebiyat Fakültesi
**2015-2016 Bahar Dönemi-Final Sınavı Soru ve Cevap Kağıdı**

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| **Adı Soyadı** | | | | | |
| **Öğrenci No** | | **Grup No** | | | |
| **Bölümü** | | | **Sınav Tarihi** | 30/05/2016 | |
| **Dersin Adı** | **MAT1072 MATEMATİK 2** | **Süre** | 100dk | **Derslik** | |
| **Öğretim Üyesinin Adı Soyadı** | | | **İmza** | | |

**NOT TABLOSU**

| 1. S | 2.S | 3.S | 4.S | TOPLAM |
|---|---|---|---|---|
| | | | | |

YÖK nun 2547 sayılı Kanunun ***Öğrenci Disiplin Yönetmeliğinin*** 9. Maddesi olan ***"Sınavlarda kopya yapmak ve yaptırmak veya buna teşebbüs etmek"*** fiili işleyenler **bir veya iki yarıyıl uzaklaştırma** cezası alırlar.

**1-a)** $\{a_n\} = \left\{\left(\dfrac{n+1}{n+2}\right)^n\right\}$ **dizisinin limitini bulunuz.** $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ **serisinin karakterini belirleyiniz.(12 Puan)**

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n+1}{n+2}\right)^n = \lim_{n\to\infty}\left[\left(1-\frac{1}{n+2}\right)^{n+2}\right]^{\frac{n}{n+2}} = e^{-1}$$

$$\lim_{n\to\infty} a_n = e^{-1} \neq 0 \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{ serisi Iraksak bir seridir.}$$

**1-b)** $f$ **fonksiyonu, tek değişkenli ve türevlenebilir bir fonksiyon olmak üzere,** $z = x f\left(\dfrac{y}{x}\right)$ **yüzeyi üzerinde herhangi bir** $P_0(x_0, y_0, z_0)$ **noktasında, yüzeye teğet olan düzlemin orijinden geçtiğini gösteriniz.(13 Puan)**

$$F = x f\left(\frac{y}{x}\right) - z$$

$$F_x = 1\cdot f\left(\frac{y}{x}\right) + \left(-\frac{y}{x^{\cancel{2}}}\right)\cdot f'\left(\frac{y}{x}\right)\cdot\cancel{x}, \quad F_x(P_0) = f\left(\frac{y_0}{x_0}\right) - \left(\frac{y_0}{x_0}\right) f'\left(\frac{y_0}{x_0}\right)$$

$$F_y = x\cdot\frac{1}{\cancel{x}} f'\left(\frac{y}{x}\right), \quad F_y(P_0) = f'\left(\frac{y_0}{x_0}\right)$$

$$F_z = -1$$

Teğet Düzlem

$$\left(f\left(\frac{y_0}{x_0}\right) - \left(\frac{y_0}{x_0}\right)\cdot f'\left(\frac{y_0}{x_0}\right)\right)(x-x_0) + f'\left(\frac{y_0}{x_0}\right)(y-y_0) - \left(z - x_0 f\left(\frac{y_0}{x_0}\right)\right) =$$

(0,0,0)da sağlamalıdır.

$$-\left(f\left(\frac{y_0}{x_0}\right) - \left(\frac{y_0}{x_0}\right)\cdot f'\left(\frac{y_0}{x_0}\right)\right)x_0 + f'\left(\frac{y_0}{x_0}\right)(-y_0) - \left(-x_0 f\left(\frac{y_0}{x_0}\right)\right) = 0$$

$$\cancel{-f\left(\frac{y_0}{x_0}\right)\cdot x_0} + \left(\frac{y_0}{\cancel{x_0}}\right) f'\left(\frac{y_0}{x_0}\right)\cancel{x_0} - f'\left(\frac{y_0}{x_0}\right) y_0 + \cancel{x_0 f\left(\frac{y_0}{x_0}\right)} = 0 \quad //$$

2016- final

**3- a)** $\sin[\pi(0.01)(1.05)+\ln(1.05)]$ nin yaklaşık değerini toplam diferansiyel veya lineer yaklaşım kullanarak hesaplayınız. *(12 Puan)*

$f(x,y)=\sin(\pi xy+\ln y)$ $\quad f(0,1)=0$ $\quad h=\Delta x=0.01$

$k=\Delta y=0.05$

$\frac{\partial f}{\partial x}=\pi y\cos(\pi xy+\ln y)$, $\quad \frac{\partial f(0,1)}{\partial x}=\pi$

$\frac{\partial f}{\partial y}=\left(\pi x+\frac{1}{y}\right)\cos(\pi xy+\ln y)$ $\quad \frac{\partial f(0,1)}{\partial y}=1$

$f(0{,}01;1{,}05)\cong 0+0{,}01.\pi+0{,}05.1\cong 0.08141$

**3-b)** $f(x,y)=xy+\frac{1}{x}+\frac{8}{y}$ fonksiyonunun kritik noktalarını bulunuz ve sınıflandırınız. *(13 Puan)*

bulunuz.(13 Puan)

$f_x=y-\frac{1}{x^2}=0 \Rightarrow y=\frac{1}{x^2}$

$f_y=x-\frac{8}{y^2}=0 \Rightarrow x=\frac{8}{y^2}$

$\Rightarrow x=\frac{8}{\left(\frac{1}{x^4}\right)} \Rightarrow x-8x^4=0$

$x=0 \quad x=1/2$

Kritik N.

$x=0\notin D_f$

$P(1/2,4)$ için

$f_{xx}=\frac{2}{x^3}\quad f_{yy}=\frac{16}{y^3}\quad f_{xy}=1$

$f_{xx}\cdot f_{yy}-f_{xy}^2=\frac{1}{\left(\frac{1}{2}\right)^3}\cdot\frac{16}{4^3}-1=3>0$

$f_{xx}=16>0$ $\Rightarrow P(1/2,4)$ lokal min noktadır.

2b) $f$ in tanım kümesi $D=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid x\geq 0\}$

$x=0$ iken $f_x$ tanımsız old. dan, $\forall b\in\mathbb{R}$ için $(0,b)$ şeklindeki noktalar kritik noktalar

S. 2-a) Bir $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ fonksiyonu, parçalı olarak,

Tüm kritik noktalarda $f(x,y)=0$ ve $\forall (x,y)\in D$ için $f(x,y)\geq 0$ old. dan, tüm kritik noktalar min. noktasıdır ve min değer $0$'dır

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{1-\cos\left(\sqrt{x^2+y^2}\right)}{x^2+y^2}, & (x,y)\neq(0,0)\\[2ex] \dfrac{1}{2}, & (x,y)=(0,0)\end{cases}$$

$f_x=f_y=0 \Leftrightarrow y=0$. O halde $\forall a>0$ için $(a,0)$ şeklindeki noktalar kritik noktalar

ile veriliyor. $f$ nin $\mathbb{R}^2$ üzerinde **sürekli** olup-olmadığını araştırınız. (13 P)

$(x,y)\neq(0,0)$ için $f(x,y)=\dfrac{1-\cos\sqrt{x^2+y^2}}{x^2+y^2}$ olup

$f$, $\mathbb{R}^2-\{(0,0)\}$ da süreklidir. $(x,y)=(0,0)$ da

$\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)=f(0,0)$ ise $f$, $\mathbb{R}^2$ de sürekli olur.

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)=\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{1-\cos\sqrt{x^2+y^2}}{x^2+y^2}$$

$\left[\begin{array}{l} u=x^2+y^2 \\ (x,y)\to(0,0) \text{ iken } u\to 0^+ \\ u\to 0^+ \text{ iken } x^2+y^2\to 0 \end{array}\right.$

$$=\lim_{u\to 0^+}\frac{1-\cos u}{u^2}$$

$$\overset{L}{=}\lim_{u\to 0^+}\frac{\sin u}{2u}=\frac{1}{2}=f(0,0)$$ old. dan $f$, $\mathbb{R}^2$ de süreklidir.

S. 2-b) $f(x,y)=y^2\cdot\sqrt{x}$ ile tanımlı $f$ fonksiyonunun bütün **kritik noktalarını** ve varsa **ekstremum** (maksimum-minimum) değer(ler)ini bulunuz. (12 P)

$$\left.\begin{array}{l} f_x=\dfrac{y^2}{2\sqrt{x}} \\ f_y=2y\sqrt{x}\end{array}\right\} \quad \left.\begin{array}{l} f_x=0 \Rightarrow \forall x>0 \text{ için } y=0 \\ f_y=0 \Rightarrow x=0 \text{ veya } y=0\end{array}\right\}$$

$(0,b)$ için $f_x$ tanımsız old. dan $(0,b)$ kritik nokta

$a\geq 0$ olmak üzere $(a,0)$ kritik noktalar

$\forall x\geq 0$ ve $y$ için

$f(x,y)-f(a,0)=y^2\sqrt{x}\geq 0 \Rightarrow f(a,0)=0$ bir yerel minimumdur.

$\to f(x,y)-f(0,b)=y^2\sqrt{x}\geq 0 \Rightarrow f(0,b)=0$ yerel minimum

**S.2-a)** Kabul edelim ki $z$, $x$ ve $y$'nin diferansiyellenebilen bir fonksiyonu olarak $y\frac{\partial z}{\partial x}-x\frac{\partial z}{\partial y}=0$ denklemini sağlamaktadır. Kutupsal koordinatlara geçildiğinde $\frac{\partial z}{\partial \theta}$ ne olur?

$$\left.\begin{array}{l} x = r\cos\theta \\ y = r\sin\theta \end{array}\right\}$$

$$\frac{dz}{d\theta} = \frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial \theta} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial \theta}$$

$$= \frac{\partial z}{\partial x}(-r\sin\theta) + \frac{\partial z}{\partial y}(r\cos\theta)$$

$$= -y\frac{\partial z}{\partial x} + x\frac{\partial z}{\partial y} = 0 //$$

**-b)** $f(x,y)=\sqrt{1+x^2y^2}$ ile verilen $f$ fonksiyonunun bütün kritik noktalarını belirleyiniz ve ekstremum değerlerini bulunuz.

$$\left.\begin{array}{l} f_x = \dfrac{xy^2}{\sqrt{1+x^2y^2}} \\ f_y = \dfrac{x^2y}{\sqrt{1+x^2y^2}} \end{array}\right\}$$

$\nabla f = \vec{0} \Rightarrow$ Kritik noktalar $(a,0)$ ve $(0,b)$

$\forall x,y \in \mathbb{R}^2$ için $\sqrt{1+x^2y^2} \geq 1$ old. dan

$f(a,0) = 1 = f(0,b)$ bir min değerdir

$$\left[\begin{array}{l} f(x,y) \geq f(a,0) \\ f(x,y) \geq f(0,b) \end{array}\right]$$