

## DİFERANSİYEL DENKLEMLER

### Diferansiyel Denklemlerin Sınıflandırılması Kaynağı ve Uygulaması

**Tanım:** Bir veya birkaç bağımsız değişkene bağlı bilinmeyen bağımlı değişkenin türev veya diferansiyelini içeren eşitliklere diferansiyel denklem denir.

Örnekler:

1.  $\frac{d^2y}{dx^2} + xy \frac{dy}{dx} = 0$ , aranan (bilinmeyen) fonksiyon  $y = y(x)$
2.  $\frac{d^4x}{dt^4} + 5 \frac{d^2x}{dt^2} + 3x = \sin t$ , bilinmeyen fonksiyon  $x = x(t)$
3.  $\frac{\partial v}{\partial s} + \frac{\partial v}{\partial t} = v$ , bilmeyen fonksiyon  $v = v(s, t)$
4.  $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 0$ , bilmeyen fonksiyon  $u = u(x, y, z)$

**Tanım:** Yalnız adi türev içeren diferansiyel denklemlere “*adi diferansiyel denklemler*” denir. Örneğin, yukarıda verilen 1 ve 2 numaralı diferansiyel denklemler.

**Tanım:** Kısmi türev içeren diferansiyel denklemlere “*kısmi türevli diferansiyel denklemler*” denir. Örneğin, yukarıda verilen 3 ve 4 numaralı diferansiyel denklemler.

**Tanım:** Diferansiyel denklemlerde en yüksek türev mertebesine, diferansiyel denklemin “*mertebesi*” (derecesi) denir. Örneğin örneklerde verilen 1 nolu diferansiyel denklem 2. mertebeden; 2 nolu diferansiyel denklem 4. mertebededir.

**Tanım:** Diferansiyel denklemde bağımlı değişken (aranan fonksiyonun) her terimde kendisi ve türevlerinin dereceleri toplamı 1 (1 den farklı ) ise diferansiyel denkleme lineer (nonlineer) diferansiyel denklem adı verilir.

Örnekler:

$$\frac{d^2y}{dx^2} + 5 \frac{dy}{dx} + 6y = 0, 2. \text{ mertebeden } \underline{\text{lineer}} \text{ diferansiyel denklem.}$$

$$\frac{d^4y}{dx^4} + x^2 \frac{d^3y}{dx^3} + x^3 \frac{dy}{dx} = xe^x, 4. \text{ mertebeden } \underline{\text{lineer}} \text{ diferansiyel denklem.}$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} + 5 \left( \frac{dy}{dx} \right)^3 + 6y = 0, 2. \text{ mertebeden } \underline{\text{nonlineer}} \text{ diferansiyel denklem.}$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} + 5y \frac{dy}{dx} + 6y = \tan x, 2. \text{ mertebeden } \underline{\text{nonlineer}} \text{ diferansiyel denklem.}$$

## Diferansiyel Denklemlerin Kaynağı ve Uygulaması

Diferansiyel denklem pek çok fiziksel ve mühendislik olayının matematik modelini oluşturmada kullanılırlar. Örneğin,

1. Objelerin hareket denklemlerinin oluşturmak,
2. Elektrik devrelerin şarj ve deşarj olması,
3. Isı iletimi problemleri,
4. Titreşim problemleri,
5. Kimyasal reaksiyonların matematiksel incelenmesi,
6. Belirli geometrik özelliklere sahip eğrilerin belirlenmesi vb.

### Çözüm

Genel olarak n. mertebeden bir adi diferansiyel denklem

$$F(x, y, \frac{dy}{dx}, \dots, \frac{d^n y}{dx^n}) = 0, \quad x \in I \subset \mathbb{R} \quad (1)$$

şeklinde yazılabilir. (1)'de I, Reel sayılar kümesinin bir alt kümesi olan çözüm bölgesidir ve F, n+2 argümandan bağımlı bir fonksiyondur. Öyle bir f(x) fonksiyonu var ve aşağıdaki koşulları sağlıyor olsun. Yani,

- i)  $f(x), \forall x \in I$  bölgesinde tanımlı reel bir fonksiyon,
- ii)  $\forall x \in I$  için  $f(x)$  in n. mertebeden türevi vardır,
- iii)  $F(x, f(x), \frac{df(x)}{dx}, \dots, \frac{d^n f(x)}{dx^n}) = 0$  sağlıyor,

bu durumda  $y=f(x)$  fonksiyonu, (1) diferansiyel denkleminin **açık** çözümüdür. Eğer çözüm  $g(x,y)=0$  şeklinde veriliyorsa bu çözüme **kapalı** çözüm denir.

**Örnek:**  $f(x) = 2 \sin x + 3 \cos x$  fonksiyonu  $\frac{d^2 y}{dx^2} + y = 0, \quad x \in \mathbb{R}$ , diferansiyel denkleminin açık çözümüdür. Yani  $f(x)$  fonksiyonu için

$$f(x) = 2 \sin x + 3 \cos x, \quad \frac{df(x)}{dx} = f'(x) = 2 \cos x - 3 \sin x, \quad \frac{d^2 f(x)}{dx^2} = f''(x) = -2 \sin x - 3 \cos x$$

İfadeleri diferansiyel denklemde yerine yazılırsa,

$$\frac{d^2 y}{dx^2} + y = 0, \Rightarrow (-2 \sin x - 3 \cos x) + (2 \sin x + 3 \cos x) = 0$$

verilen diferansiyel denklemi özdeşlikle sağlar. Bu nedenle **kesin çözüm** 'de denilmektedir.

**Örnek:**  $x^2 + y^2 = 25$  fonksiyonu  $x + y \frac{dy}{dx} = 0, \quad x \in I = (-5 < x < 5)$ , diferansiyel denkleminin **kapalı** çözümüdür.

$x^2 + y^2 = 25 \Rightarrow y = \sqrt{25 - x^2}$  şeklinde açık çözüm haline getirilebilir ve çözüm kümesinin Reel sayılarda anlamlı olabilmesi için  $-5 < x < 5$  olmalıdır. (Not:  $x=5$  veya  $x=-5$  olması durumunda türev ( $dy/dx$ ) tanımsız olduğundan, bu değerler çözüm kümesine dahil edilmemiştir.)

Diğer taraftan,  $x^2 + y^2 = -25$  için de verilen diferansiyel denklem sağlanır ancak,  $x^2 + y^2 = -25 \Rightarrow y = \sqrt{-25 - x^2}$  durumu için karekök ifadesi tüm  $x$  değerleri için negatif olduğundan anlamı yoktur, Reel sayılar kümesinde  $x^2 + y^2 = -25$  fonksiyonu verilen diferansiyel denklemin **formal çözümü** olsa da gerçek çözüm olamaz.

**Örnek:**  $\frac{dy}{dx} = 2x$  diferansiyel denklemini ele alalım.  $f_0(x) = x^2$ ,  $x \in \mathbb{R}$  için diferansiyel

denklemin çözümüdür. Diğer taraftan  $f(x) = x^2 + C$ ,  $\forall C \in \mathbb{R}$  için de verilen diferansiyel denklemin çözümü olur. Her  $C$  sabiti için diferansiyel denklem sağlandığından  $f(x)$  çözümüne **genel çözüm** denir. Eğer  $C$  değeri belirli bir sayı değeri olarak alınırsa yani,  $f(x) = x^2 + 3$ , ( $C=3$  için) elde edilen bu çözüme özel çözüm adı verilir.

**Örnek:**  $\frac{d^2y}{dx^2} + y = 0$  denkleminin çözümü  $f(x) = C_1 \sin x + C_2 \cos x$  dir. Burada  $C_1$  ve  $C_2$  reel sabitlerdir. Bu çözüm, genel çözüm'dür.  $C_1$  ve  $C_2$  değer verilerek elde edilen çözüm özel çözüm olur. Örneğin,  $C_1 = 1$  ve  $C_2 = -1$  için bir özel çözüm,  $f(x) = \sin x - \cos x$  dir.

**Tanım:**  $F(x, y, \frac{dy}{dx}, \dots, \frac{d^n y}{dx^n}) = 0$  diferansiyel denklemini sağlayan bir  $f(x)$  çözümü için

- i.  $n$  adet sabit (integral sabiti) içeren çözüme **genel çözüm**,
- ii. genel çözümde integral sabitlerine değer verilerek elde edilen çözüme **özel çözüm**,
- iii. genel çözümünden elde edilemeyen ancak diferansiyel denklemi sağlayan çözüme **tekil çözüm** denir.

**Örnek:**  $\frac{d^2y}{dx^2} - 3\frac{dy}{dx} + 2y = 0$  diferansiyel denkleminin genel çözümü  $f(x) = C_1 e^x + C_2 e^{2x}$  dir.

**Örnek:**  $f(x) = C_1 e^x + C_2 e^{-x} + C_3 \sin x + C_4 \cos x$  fonksiyonunun  $\frac{d^4 y}{dx^4} - y = 0$  diferansiyel denkleminin genel çözümü olduğunu gösteriniz.

**Örnek:**  $f(x) = (x + C)^2$  fonksiyonu  $\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 - 4y = 0$  diferansiyel denkleminin genel çözümü olur.

Bununla beraber  $y = g(x) = 0$  çözümü verilen diferansiyel denklemin tekil çözümü olur ve genel çözümünden elde edilemez.

**Tanım:**  $\frac{dy}{dx} = f(x, y)$  diferansiyel denkleminin çözümü  $y = F(x, c)$  'nin grafiklerine integral eğrileri denir. Örneğin,  $y_0 = f(x_0, c)$ ,  $(x_0, y_0)$  noktasından geçen integral eğrisidir.

### **Başlangıç Değer Problemi, Sınır Değer Problemi ve Çözümün varlığı,**

**Başlangıç değer problemi**, çözüm bölgesinin herhangi bir noktasında (başlangıç noktasında) verilen başlangıç koşullarını ve geri kalan her yerde verilen yönetici denklemi sağlayacak şekilde modellenen problemlerdir.

**Sınır değer problemi**, çözüm bölgesinin içinde yönetici denklemi ve çözüm bölgesinin sınırında verilen sınır koşullarının sağlayacak şekilde modellenen problemlerdir.

Problem:  $\frac{dy}{dx} = 2x$  diferansiyel denklemin  $x=1$  ve  $y=4$  sağlayan çözümünü bulunuz.

Dolayısıyla verilen problem başlangıç değer problemi olup

$$\begin{cases} \frac{dy}{dx} = 2x \\ y(1) = 4 \end{cases}$$

şeklinde yazılır. Verilen diferansiyel denklemin genel çözümü:  $y(x) = x^2 + C$  dir. Başlangıç koşulları çözümde yerine yazılırsa,  $C=3$  bulunur. Dolayısıyla başlangıç değer probleminin çözümü  $y(x) = x^2 + 3$  olur.