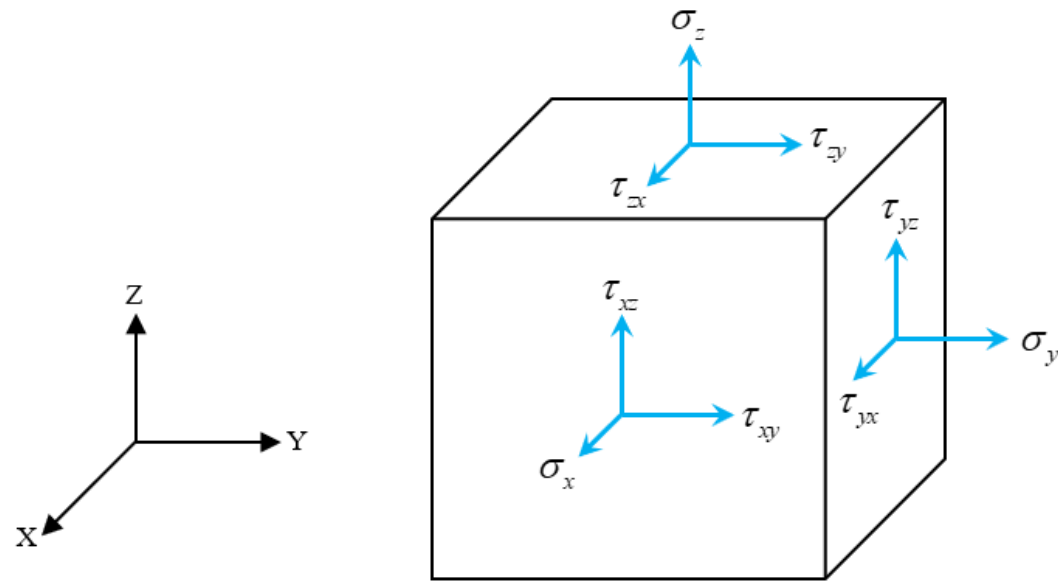


Gerilme-şekil değiştirme iliřkisi

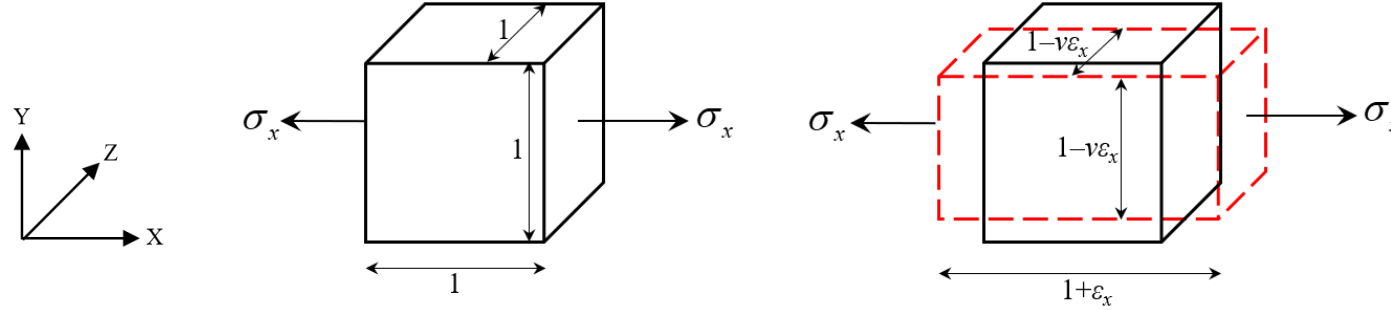
Şekil deęiřtirmelerin ölçümü



$$[\sigma] = \begin{bmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \sigma_y & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_z \end{bmatrix}$$

$$\tau_{ij} = \tau_{ji}$$

Yapılan çalışmalar göstermiştir ki, bazı elastik cisimler için, belirli yük sınırları arasında, gerilme-şekil değiştirme bağıntıları lineer alınabilir (Robert Hooke. 1676).



Cismin kuvvete paralel kenarları ϵ_x kadar uzadığı halde, kuvvete dik kenarları kısalmır ve bu kenarların şekil değiştirme oranları olan ϵ_y ve ϵ_z birbirine eşittir. ϵ_x ve σ_x arasındaki bağıntı aşağıdaki gibi yazılabilir.

$$\epsilon_x = \frac{\sigma_x}{E}$$

Kuvvete dik kenarlardaki kısaltmalar da kuvvet doğrultusundaki değerle karşılaştırılırsa, aşağıdaki gibi yazılabilir.

$$\epsilon_y = \epsilon_z = -\nu\epsilon_x = -\nu\frac{\sigma_x}{E}$$

Basit çekme altında cisimlerin hacminin arttığı (ya da bazı malzemeler için sabit kaldığı) gözlenmiştir. Cisimdeki hacim değişimi (θ) aşağıdaki gibi yazılabilir.

$$\theta = \epsilon_x + \epsilon_y + \epsilon_z = \frac{\sigma_x}{E} - \nu\frac{\sigma_x}{E} - \nu\frac{\sigma_x}{E} = \frac{\sigma_x}{E}(1 - 2\nu)$$

Buradan, $\nu \leq 0,5$ olması gerektiği görülmektedir.

Çok eksenli gerilme haline ait şekil değiştirme yasaları, süperpozisyon ilkesinden yararlanılarak bulunabilir. Üç eksenli gerilme hali üç tane birbirine dik doğrultuda tek eksenli gerilme problemine ayrıştırılarak çözülebilir. Sonrasında, bulunan bu değerler süperpozisyon ilkesi uygulanarak toplanır. Buna göre, birbirine dik üç doğrultudaki σ_x , σ_y ve σ_z asal gerilmeleri ile verilen bir durumda asal şekil değiştirmeler aşağıdaki gibi yazılabilir.

$$\varepsilon_x = \left(\frac{\sigma_x}{E} \right) + \left(-\nu \frac{\sigma_y}{E} \right) + \left(-\nu \frac{\sigma_z}{E} \right) = \frac{1}{E} \left[\sigma_x - \nu (\sigma_y + \sigma_z) \right]$$

$$\varepsilon_y = \left(-\nu \frac{\sigma_x}{E} \right) + \left(\frac{\sigma_y}{E} \right) + \left(-\nu \frac{\sigma_z}{E} \right) = \frac{1}{E} \left[\sigma_y - \nu (\sigma_x + \sigma_z) \right]$$

$$\varepsilon_z = \left(-\nu \frac{\sigma_x}{E} \right) + \left(-\nu \frac{\sigma_y}{E} \right) + \left(\frac{\sigma_z}{E} \right) = \frac{1}{E} \left[\sigma_z - \nu (\sigma_x + \sigma_y) \right]$$

Üç eksenli şekil değiştirme her zaman asal uzama oranları ile verilemez. Bir noktanın yakınında seçilen x , y , z dik doğrultuları asal doğrultularla üst üste düşmezse, cismin şekil değiştirmesini tanımlayabilmek için yalnızca kenarlarındaki ε_x , ε_y , ε_z uzama oranları yetersiz kalacaktır. Cismin açıları da bozulacağı için kayma şekil değiştirmelerinin de verilmesi gerekir.

$$[\varepsilon] = \begin{bmatrix} \varepsilon_x & \gamma_{xy} & \gamma_{xz} \\ \gamma_{yx} & \varepsilon_y & \gamma_{yz} \\ \gamma_{zx} & \gamma_{zy} & \varepsilon_z \end{bmatrix}$$

τ ile γ arasında lineer bir bağıntı vardır ve aşağıdaki gibi gösterilir. G sabiti malzemenin kayma modülü olup E ve ν sabitleri cinsinden yazılabilir.

$$\gamma = \frac{\tau}{G} \quad G = \frac{E}{2(1+\nu)}$$

Yukarıda verilen genel Hooke yasaları, gerilmeler yerine şekil değiştirmeler cinsinden aşağıdaki gibi yazılabilmektedir.

$$\sigma_x = \frac{E\nu}{(1+\nu)(1-2\nu)}(\varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z) + 2G\varepsilon_x$$

$$\frac{E\nu}{(1+\nu)(1-2\nu)} = \lambda \quad \text{Lame sabiti}$$

$$\sigma_y = \frac{E\nu}{(1+\nu)(1-2\nu)}(\varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z) + 2G\varepsilon_y$$

$$\sigma_z = \frac{E\nu}{(1+\nu)(1-2\nu)}(\varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z) + 2G\varepsilon_z$$

$$\tau_{xy} = G\gamma_{xy}$$

$$\tau_{xz} = G\gamma_{xz}$$

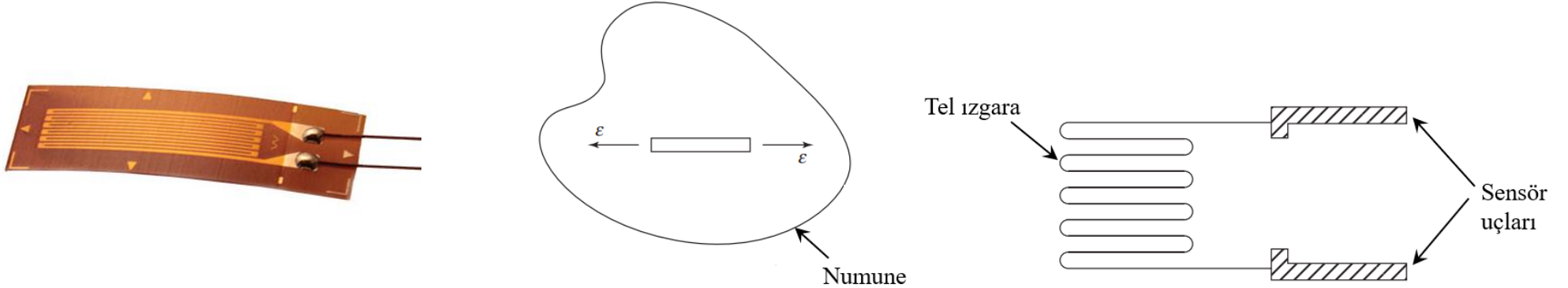
$$\tau_{yz} = G\gamma_{yz}$$

Görüldüğü üzere, homojen ve izotrop olan elastik bir cisim için gerilme-şekil değiştirme bağıntıları en genel halde iki fiziksel sabitle ifade edilebilmektedir: E ve ν

Anizotrop malzemeler için elastik sabitlerin sayısı artar ve en genel halde bu sabitleri sayısı 21'dir.

Gerinim Ölçer

Gerinim ölçer (gerinim pulu), (strain gage) bir noktadaki şekil değiştirmeyi ölçmek için kullanılan elektriksel sensörlerdir. Dış yük altında elektriksel dirençlerinde değişiklik meydana gelir, bu da şekil değiştirme değeri ile orantılı olmaktadır. Gerinim ölçerler kesiti çok küçük iletken bir telin çok ince bir şerit üzerinde tekrarlı sarımlar halinde yerleştirilmesi ile elde edilir. Şekil değiştirmenin ölçülmesi istenen yüzeye yapıştırılır ve yapıştırılan bu yüzeye aynı deformasyona uğrar. Gerinim ölçerden alınan negatif elektriksel gerilim basınç yüklemesine, pozitif elektriksel gerilim ise çekme yüklemesine karşılık gelmektedir.



Elektriksel dirençli gerinim ölçerler, bir iletkenin direncinin (R), şekil değiştirmenin (ϵ) bir fonksiyonu olarak değiştiği ilkesine dayanır.

$$R = \rho \frac{L}{A}$$

ρ : iletkenin öz direnci

L : iletkenin uzunluğu

A : iletkenin kesit alanı

ρ , L ve A 'daki değişimlerden kaynaklanan R 'deki değişiklik şu şekilde yazılır:

$$\Delta R = \Delta \rho \frac{L}{A} + \rho \frac{\Delta L}{A} - \rho \frac{L}{A^2} \Delta A$$

Her iki taraf R 'ye bölünürse:

$$\frac{\Delta R}{R} = \frac{\Delta \rho}{\rho} + \frac{\Delta L}{L} - \frac{\Delta A}{A}$$

İletkenin direncindeki değişimin, sadece iletken üzerindeki eksenel şekil değiştirmenin (ε) sonucu olduğu göz önüne alınır. $\varepsilon = \Delta L/L$ olup $\Delta A = (1-\nu\varepsilon)^2 A - A = \nu^2 \varepsilon^2 A - 2\nu\varepsilon A$ olarak yazılır. Şekil değiştirmeler küçük olduğundan, $\varepsilon^2 \approx 0$ ve $\Delta A/A = -2\nu\varepsilon$ olur. Böylece denklem aşağıdaki gibi yazılabilir.

$$\frac{\Delta R}{R} = (1 + 2\nu) \varepsilon + \frac{\Delta \rho}{\rho}$$

Eğer, iletkenin direncindeki değişim sadece uygulanan şekil değiştirmeden kaynaklanıyorsa, denklem aşağıdaki gibi yazılabilir.

$$\frac{\Delta R}{R} = S_A \varepsilon$$

$S_A = 1 + 2\nu + \frac{\Delta \rho / \rho}{\varepsilon}$ olup iletkenin şekil değiştirmeye karşı duyarlılığıdır. Gösterge faktörü (gauge factor) (GF) olarak da bilinen bu değer, satın alınan gerinim ölçerler için paket üzerinde belirtilmekte olup genellikle 2 civarındadır.

Şekil değiştirme ölçümü gerçekleştirilecek bölgede bir veya daha fazla doğrultuda ölçüm gerçekleştirilmesi gerekebilir. Bu durumlarda birden fazla gerinim ölçer ile ölçüm alınacağı gibi birden fazla gerinim ölçerin tek bir taban malzemesinde birlikte kullanımını da mümkün olmaktadır. Bu şekilde tasarlanan gerinim ölçerler **gerinim ölçer rozetler** olarak adlandırılmaktadır.

Elastik teoriye göre, θ doğrultusundaki bir noktada gerinim değeri, x - y düzleminde iki dik eksenindeki normal ve kayma geriniminin bir fonksiyonu olarak ifade edilebilir.

$\varepsilon_x = \Delta x/x$ şekil değiştirmesi θ yönü boyunca aşağıdaki katkıyı verir:

$$\varepsilon_a = \frac{\Delta a}{a} = \frac{\Delta x \cos \theta}{x/\cos \theta} = \varepsilon_x \cos^2 \theta$$

$\varepsilon_y = \Delta y/y$ şekil değiştirmesi θ yönü boyunca aşağıdaki katkıyı verir:

$$\varepsilon_a = \frac{\Delta a}{a} = \frac{\Delta y \sin \theta}{y/\sin \theta} = \varepsilon_y \sin^2 \theta$$

γ_{xy} kayma şekil değiştirmesi θ yönü boyunca aşağıdaki katkıyı verir:

$$\varepsilon_a = \frac{\Delta a}{a} = \frac{\gamma_{xy} a \sin \theta \cos \theta}{a} = \gamma_{xy} \sin \theta \cos \theta = \frac{\gamma_{xy}}{2} \sin 2\theta$$

Böylece, θ yönü boyunca toplam şekil değiştirme aşağıdaki gibi yazılır.

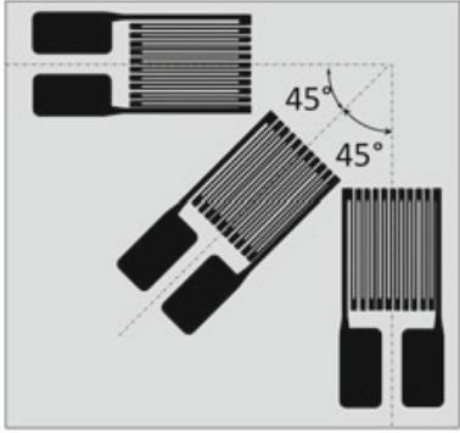
$$\varepsilon_a = \varepsilon_x \cos^2 \theta + \varepsilon_y \sin^2 \theta + \frac{\gamma_{xy}}{2} \sin 2\theta$$

ya da

$$\varepsilon_a = \frac{\varepsilon_x + \varepsilon_y}{2} + \frac{\varepsilon_x - \varepsilon_y}{2} \cos 2\theta + \frac{\gamma_{xy}}{2} \sin 2\theta$$

ε_x , ε_y ve γ_{xy} değerlerini elde etmek için üç farklı θ yönü boyunca ölçüm yapılması gerekmektedir.

$$\left. \begin{aligned} \varepsilon_a &= \frac{\varepsilon_x + \varepsilon_y}{2} + \frac{\varepsilon_x - \varepsilon_y}{2} \cos 2\theta_a + \frac{\gamma_{xy}}{2} \sin 2\theta_a \\ \varepsilon_b &= \frac{\varepsilon_x + \varepsilon_y}{2} + \frac{\varepsilon_x - \varepsilon_y}{2} \cos 2\theta_b + \frac{\gamma_{xy}}{2} \sin 2\theta_b \\ \varepsilon_c &= \frac{\varepsilon_x + \varepsilon_y}{2} + \frac{\varepsilon_x - \varepsilon_y}{2} \cos 2\theta_c + \frac{\gamma_{xy}}{2} \sin 2\theta_c \end{aligned} \right\}$$



0°-45°-90° Rozetler

Bu durumda θ açıları aşağıdaki gibi olmaktadır.

$$\theta_a = 0^\circ$$

$$\theta_b = 45^\circ$$

$$\theta_c = 90^\circ$$

Böylece:

$$\varepsilon_a = \frac{\varepsilon_x + \varepsilon_y}{2} + \frac{\varepsilon_x - \varepsilon_y}{2} = \varepsilon_x$$

$$\varepsilon_b = \frac{\varepsilon_x + \varepsilon_y}{2} + \frac{\gamma_{xy}}{2}$$

$$\varepsilon_c = \frac{\varepsilon_x + \varepsilon_y}{2} - \frac{\varepsilon_x - \varepsilon_y}{2} = \varepsilon_y$$

$$\varepsilon_x = \varepsilon_a$$

$$\gamma_{xy} = 2\varepsilon_b - \varepsilon_a - \varepsilon_c$$

$$\varepsilon_y = \varepsilon_c$$

Asal şekil değiştirmeler:

$$\varepsilon_1, \varepsilon_2 = \frac{\varepsilon_x + \varepsilon_y}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\varepsilon_x - \varepsilon_y}{2}\right)^2 + \left(\frac{\gamma_{xy}}{2}\right)^2}$$

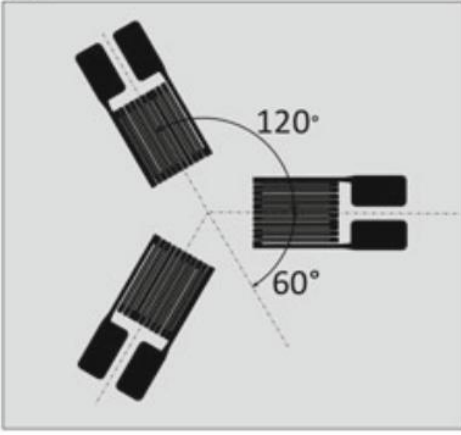
$$\tan 2\phi = \frac{\gamma_{xy}}{\varepsilon_x - \varepsilon_y}$$

ϕ : 1no'lu asal eksen ile x eksenini arasındaki açı

Asal gerilmeler:

$$\sigma_1 = \frac{E}{1-\nu^2}(\varepsilon_1 + \nu\varepsilon_2)$$

$$\sigma_2 = \frac{E}{1-\nu^2}(\varepsilon_2 + \nu\varepsilon_1)$$



0°-120°-240° ve 0°-60°-120° Rozetler

0°-120°-240° için θ açıları aşağıdaki gibi olmaktadır.

$$\theta_a = 0^\circ$$

$$\theta_b = 120^\circ$$

$$\theta_c = 240^\circ$$

Böylece:

$$\varepsilon_a = \frac{\varepsilon_x + \varepsilon_y}{2} + \frac{\varepsilon_x - \varepsilon_y}{2} = \varepsilon_x$$

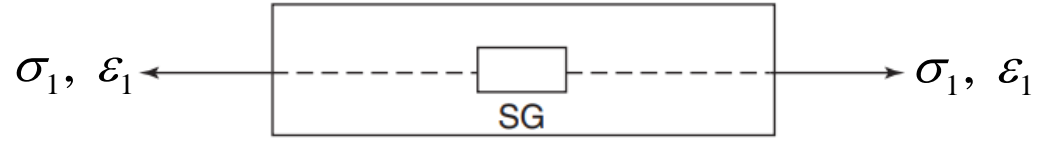
$$\varepsilon_b = \frac{\varepsilon_x + \varepsilon_y}{2} + \frac{\varepsilon_x - \varepsilon_y}{2}(-0,5) + \frac{\gamma_{xy}}{2} \left(-\frac{\sqrt{3}}{2} \right)$$

$$\varepsilon_c = \frac{\varepsilon_x + \varepsilon_y}{2} + \frac{\varepsilon_x - \varepsilon_y}{2}(-0,5) + \frac{\gamma_{xy}}{2} \left(\frac{\sqrt{3}}{2} \right)$$

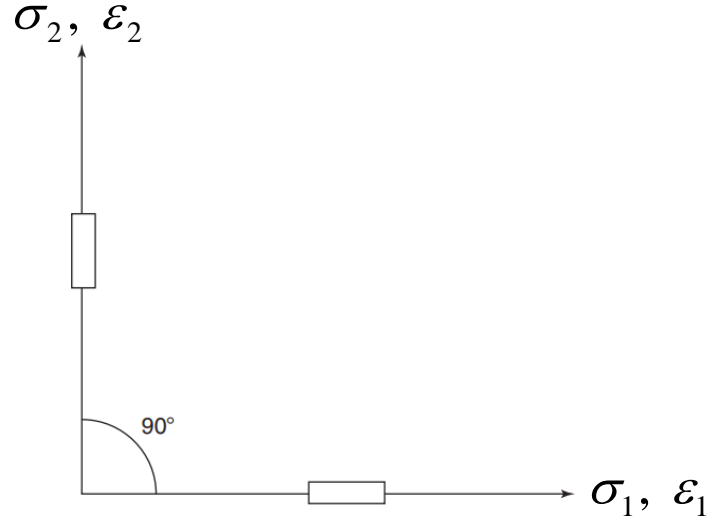
$$\varepsilon_x = \varepsilon_a$$

$$\gamma_{xy} = \frac{2}{\sqrt{3}}(\varepsilon_c - \varepsilon_b)$$

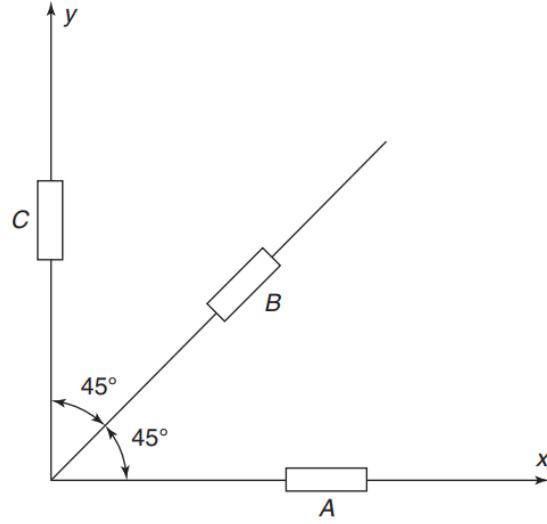
$$\varepsilon_y = \frac{1}{3} \left[2(\varepsilon_b + \varepsilon_c) - \varepsilon_a \right]$$



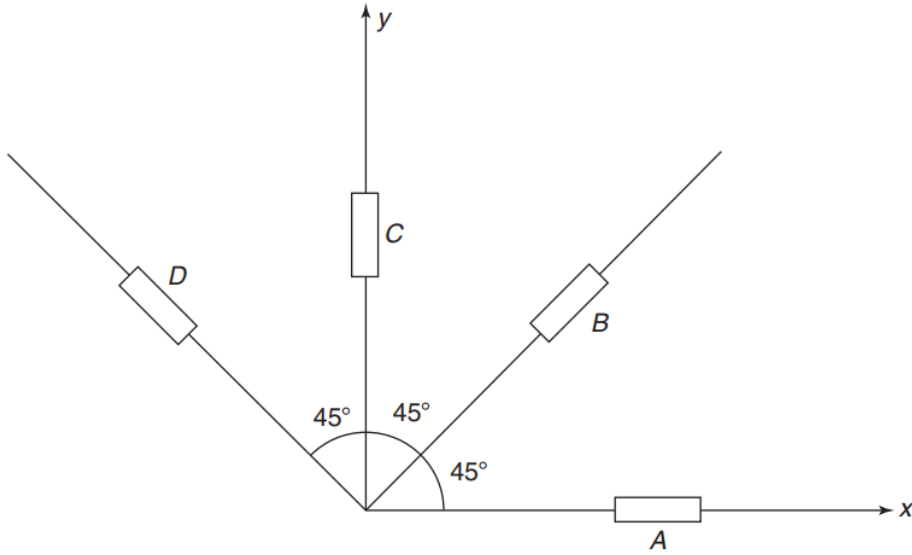
Bir asal gerilmenin yönü biliniyorsa ve diğer asal gerilme sıfırsa tek bir gerinim ölçer kullanılabilir.



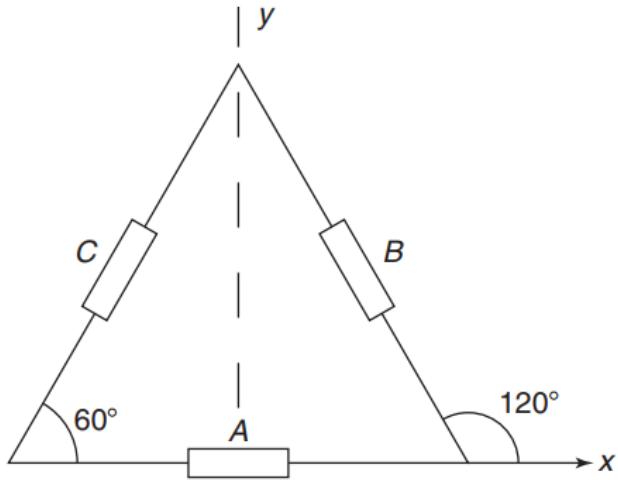
İki elemanlı rozet, her iki asal gerilmenin yönlerinin bilindiği ve 0'dan farklı olduğu durumlarda kullanılır.



Bilinmeyen gerinim alanını tamamen belirlemek için üç elemanlı dikdörtgen rozet kullanılır.



Rozet analizinin doğruluğunu teyit etmek için dört elemanlı dikdörtgen bir rozet kullanılabilir. Yandaki şekilde gösterildiği gibi 45°'lik aralıklarla dört gerinim ölçer kullanılır. Eğer $\varepsilon_A + \varepsilon_C = \varepsilon_B + \varepsilon_D$ ise analiz doğrudur.

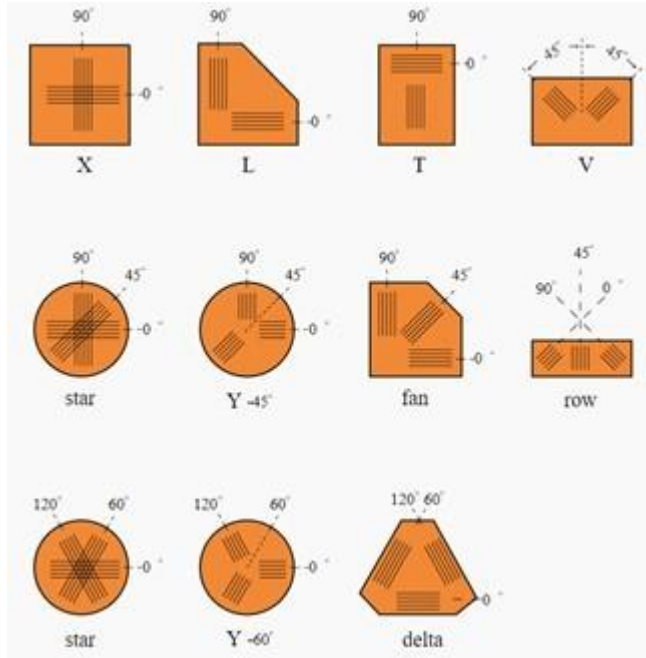


Yandaki şekilde üç elemanlı bir delta rozet görülmektedir.

$$\varepsilon_A = \varepsilon_x$$

$$\varepsilon_B = \frac{\varepsilon_x}{4} + \frac{3}{4}\varepsilon_y - \frac{\sqrt{3}}{4}\gamma_{xy}$$

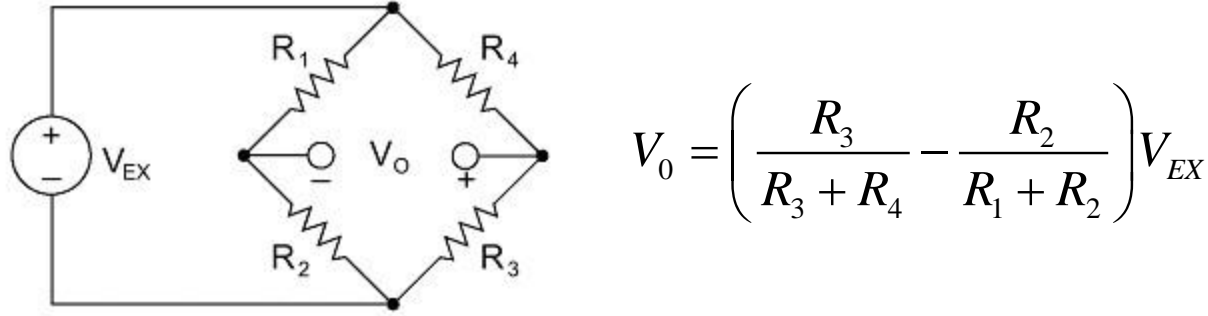
$$\varepsilon_C = \frac{\varepsilon_x}{4} + \frac{3}{4}\varepsilon_y + \frac{\sqrt{3}}{4}\gamma_{xy}$$



Yandaki şekilde farklı uygulamalar için farklı geometrilerde oluşturulmuş gerinim ölçerler görülmektedir.

Gerinimi ölçmek için, gerinim ölçer direncindeki değişimi ölçmek gerekir. Bunun için de dirençteki değişikliğin bir voltaja dönüştürülmesi gerekir. Bu, bir **Wheatstone köprüsü** kullanılarak gerçekleştirilir. Wheatstone köprüsü, dirençteki küçük değişiklikleri algılayabilen iki paralel gerilim bölücü devrenin elektriksel eşdeğeridir.

R_1 ve R_2 bir gerilim bölücü devreyi, R_4 ve R_3 ise ikinci gerilim bölücü devreyi oluşturur. Wheatstone köprüsünün çıkışı V_o , iki gerilim bölücünün orta düğümleri arasında ölçülür.

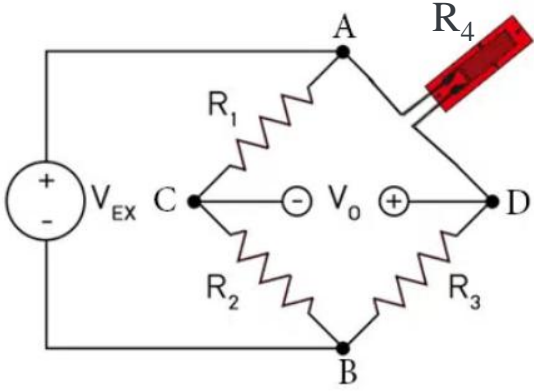


Bu denklemden, $R_1 R_3 = R_2 R_4$ olduğunda, V_o gerilim çıkışının sıfır olduğunu görülür. Bu koşullar altında köprünün dengeli olduğu söylenir. Köprünün herhangi bir kolundaki dirençteki herhangi bir değişiklik, sıfır olmayan bir çıkış voltajıyla sonuçlanır. Bu nedenle, Şekildeki R_4 aktif bir gerinim ölçer ile değiştirilirse, gerinim ölçer direncindeki herhangi bir değişiklik köprünün dengesini bozar ve gerinimin bir fonksiyonu olan sıfır olmayan bir çıkış voltajı üretir. Sonrasında, gerinim aşağıdaki denklemle elde edilir.

$$\frac{V_o}{V_{EX}} = \frac{S_A N \varepsilon}{4}$$

N : Wheatstone köprüsündeki ölçer sayısı.

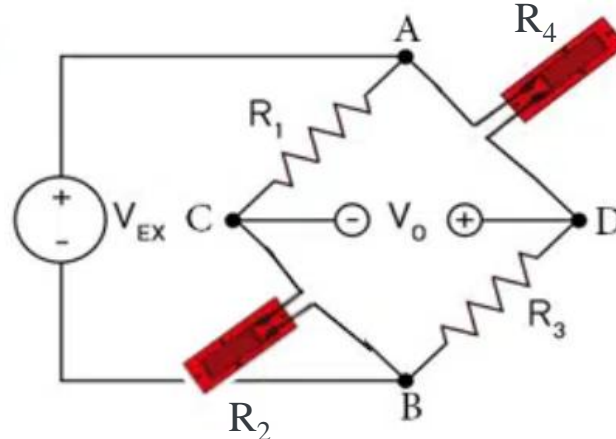
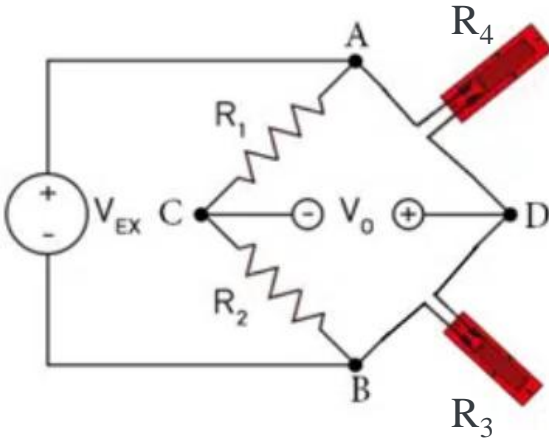
Çeyrek Köprü



Çeyrek köprü, bir aktif gerinim puluna ve üç yüksek hassasiyetli dirence sahiptir. Çeyrek köprü, yalnızca bir ölçerin kurulumunu gerektirdiğinden en yaygın gerinim ölçer konfigürasyonudur. Ancak, çeyrek köprü diğer konfigürasyonlardan daha düşük bir hassasiyete sahiptir ve ölçer üzerindeki termal etkilerden kaynaklanan hataları telafi edemez. Çeyrek köprü, yalnızca bir nesne üzerindeki birleşik gerinimi ölçebilir. Eğilme ve eksenel gerinimleri birbirinden ayıramaz.

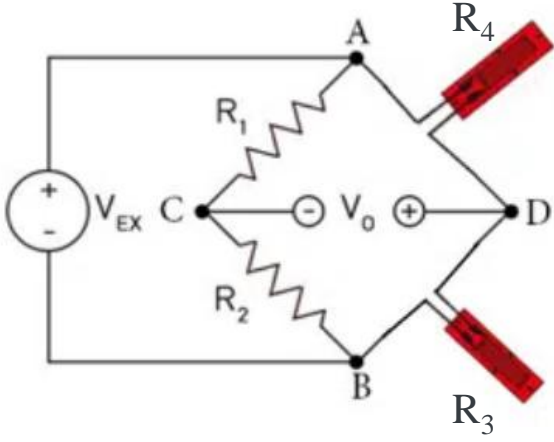
$$\frac{V_0}{V_{EX}} = \frac{S_A \epsilon}{4}$$

Yarım Köprü

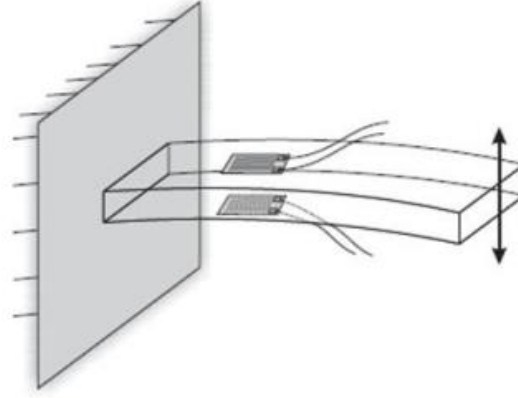


Yarım köprü, iki aktif gerinim pulu ve iki yüksek hassasiyetli dirence sahiptir. Yarım köprü, kurulum için çeyrek köprüden daha fazla çaba gerektirir ancak daha yüksek bir ölçüm hassasiyetine sahiptir.

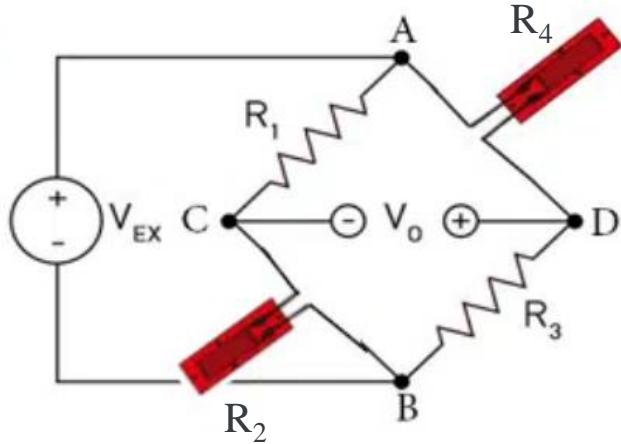
$$\frac{V_0}{V_{EX}} = \frac{S_A \epsilon}{2}$$



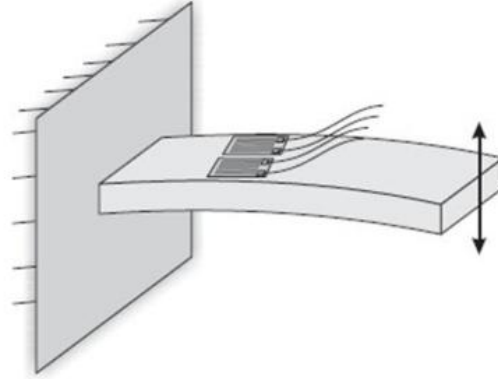
Ardışık kollar



Bu durumda uzama ölçer dirençlerindeki değişim birbirlerini dengelemektedirler. Bunlar aynı değerde fakat zıt yönlü bir ölçüm yapmaktadırlar. Bir tanesi kısalmayı ölçerken diğeri uzamayı ölçmektedir. Bu şekildeki kullanım, çeyrek köprü bağlantısına göre iki kat daha çok çıkış vermektedir.

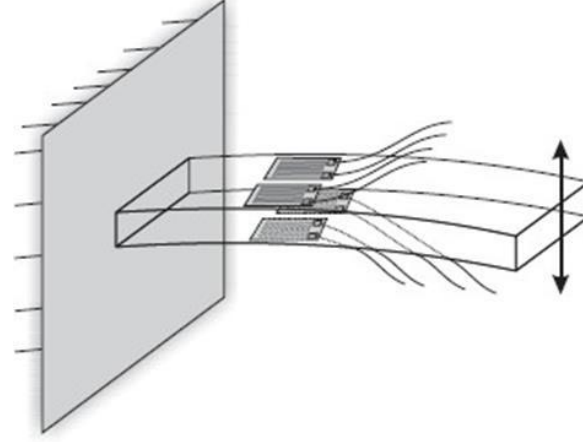
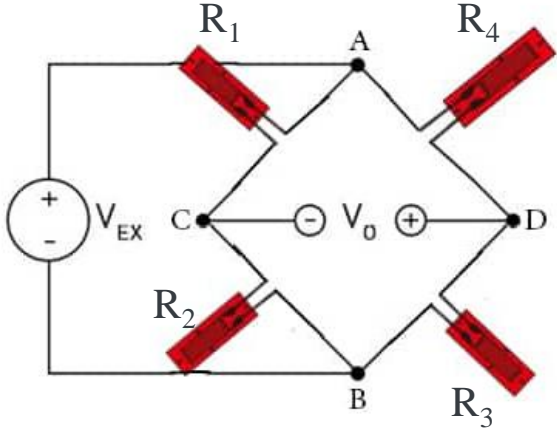


Karşıt kollar



Eğer R_2 ve karşısındaki R_4 dirençleri aynı oranda artarsa, tek bir direncin değişimi sonucu oluşacak olan voltaj farkının iki katı kadar bir değişim olmaktadır. Bu da daha fazla çıkış böylelikle daha fazla hassas sonuç alınmasını sağlamaktadır. Her bir uzama ölçer diğerinin karşısına bağlanarak aynı uzamalar ölçülmektedir yani dirençlerinde aynı doğrultuda bir değişim olmaktadır. Böylelikle aynı bölge için iki uzama ölçer, aynı uzamaları ölçmektedir.

Tam Köprü



$$\frac{V_0}{V_{EX}} = \frac{S_A}{4} (\epsilon_1 - \epsilon_2 + \epsilon_3 - \epsilon_4)$$

Bir tam köprüde dört aktif gerinim pulu bulunur. Tam köprü, ölçüm için en fazla çabayı gerektiren konfigürasyondur, ancak en yüksek hassasiyete sahiptir. Tam köprü, termal etkileri telafi edebilir ve ortak mod zayıflatması ile elektromanyetik etkileşimin etkilerini azaltabilir.