Dinamik Uygulama

Ders: 2

Öğr. Gör. Doğan SAĞLAM

1.1. Bir maddesel noktanın hareketi $s = 2t^3 - 15t^2 + 36t - 10$ bağıntısı ile tanımlanmıştır; denklemde s metre ve t saniye olarak alınacaktır. $t = 4$ san iken yeri, hızı ve ivmeyi bulunuz.

$$s = 2t^3 - 15t^2 + 36t - 10$$

$$v = \frac{ds}{dt} = 6t^2 - 30t + 36$$

$$a = \frac{dv}{dt} = 12t - 30$$

$t = 4$ san de:

$$s = 2(4)^3 - 15(4)^2 + 36(4) - 10 \qquad s = 22\,m$$

$$v = 6(4)^2 - 30(4) + 36 \qquad v = 12\ m/san$$

$$a = 12(4) - 30 \qquad a = 18\ m/san^2$$

1.5. Bir maddesel noktanın ivmesi $a = -5\ \mathrm{m/san^2}$ bağıntısı ile tanımlanmıştır. $t = 0$ iken $v = +20\ \mathrm{m/san}$ ve $s = 0$ olduğuna göre $t = 6$ san iken hızı, yeri ve gidilen toplam yolu bulunuz.

$$\frac{dv}{dt} = a = -5 \ m/san^2$$

$$\int_{20}^{v} dv = \int_{0}^{t} -5 \, dt$$

$$v - 20 = -5t \qquad v = 20 - 5t$$

$$\frac{ds}{dt} = v = 20 - 5t \qquad \int_{0}^{s} ds = \int_{0}^{t} (20 - 5t) \, dt$$

$$s = 20t - \frac{5}{2} t^2$$

$t = 6$ san iken $\quad s_6 = 20(6) - \frac{5}{2}(6)^2 \quad s_6 = +30 m$

$$v_6 = 20 - 5(6) \qquad v_6 = -10 \ m/san$$

$v = 0$ iken

$$v = 0 = 20 - 5t \qquad t = 4 san$$

$$s_4 = 20(4) - \frac{5}{2}(4)^2 \quad s_4 = 40 m$$

$0 < t < 4 san$: Uzaklık $= s_4 - s_0 = 40 - 0 = 40 m \longrightarrow$

$4 san < t < 6 san$ Uzaklık $= s_6 - s_4 = 30 - 40 = -10 = 10 m \longleftarrow$

Alınan toplam yol $= 40 + 10 = 50 m$

1.8. Bir maddesel noktanın ivmesi $a = 9 - 3\,t^2$ bağıntısı ile tanımlanmıştır. Maddesel nokta $t = 0$ da $v = 0$ ve $s = -3$ m olmak üzere harekete başlıyor. *(a)* Hızın tekrar sıfır olduğu zamanı, *(b)* $t = 4$ san iken yeri ve hızı, *(c)* $t = 0$ dan $t = 4$ san ye kadar maddesel noktanın gittiği toplam yolu bulunuz.

$$a = 9 - 3t^2$$

$$\frac{dv}{dt} = a = 9 - 3t^2$$

$$\int_0^v dv = \int_0^t (9 - 3t^2)\, dt$$

(a) $v = 9t - t^3$

$v = 0$ iken $0 = 9t - t^3$ $t = 3$ san

(b) $\frac{ds}{dt} = v = 9t - t^3$

$$\int_{-3}^{s} ds = \int_0^t (9t - t^3)\, dt$$

$$s - (-3) = \frac{9}{2} t^2 - \frac{1}{4} t^4$$

$$s = -3 + \frac{9}{2} t^2 - \frac{1}{4} t^4$$

$t = 3$ iken $s_3 = -3 + \frac{9}{2}(3)^2 - \frac{1}{4}(3)^4$ $s_3 = 17{,}25\ m$

$t = 4$ iken $s_4 = -3 + \frac{9}{2}(4)^2 - \frac{1}{4}(4)^4$ $s_4 = 5\ m$

$V_4 = 9(4) - (4)^3$ $V_4 = -28\ m/san$

(c) Gidilen toplam yol

$0 < t < 3$ san : Uzaklık $= s_3 - s_0 = 17{,}25 - (-3) = 20{,}25\ m \rightarrow$

3 san $< t < 4$ san : Uzaklık $= s_4 - s_3 = 5 - 17{,}25 = -12{,}25 = 12{,}25 m$

Gidilen toplam yol $= 20{,}25 + 12{,}25 = 32{,}5\ m$

1.10. Bir maddesel noktanın ivmesi $a = 25 - 3s^2$ bağıntısı ile tanımlanmıştır; denklemde a . m/san^2 ve s, metre olarak alınacaktır. Maddesel nokta $s = 0$ yerinden, ilk hızı olmadan harekete başlıyor. *(a)* $s = 2$ m iken hızı, *(b)* hızın tekrar sıfır olduğu yeri, *(c)* hızın maksimum olduğu yeri bulunuz.

$a = 25 - 3s^2 \qquad v\frac{dv}{ds} = 25 - 3s^2$

$\int_0^v v\,dv = \int_0^s (25 - 3s^2)\,ds \qquad \frac{1}{2}v^2 = 25s - s^3$

(a) $s = 2m$ de $\quad \frac{1}{2}v^2 = 25(2) - (2)^3$

$v^2 = 84 \qquad v = \pm\, 9{,}17$ m/san

(b) $v = 0$ için $\quad 0 = 25s - s^3$

$0 = s\,(25 - s^2) \qquad s = 5m$

Not: Diğer $s = -5\,m$ kökü, başlangıç şartları $s = 0$ da $v = 0$ olduğu zaman, erişilemiyen bir konumu gösterir.

$a = 0 = 25 - 3s^2 \qquad s = 2{,}89\,m$

1.13. Bir maddesel noktanın ivmesi $a = -0{,}002\, v^2$ bağıntısı ile tanımlanmıştır; burada a ivmedir ve m/san^2 ile, v hızdır ve m/san ile ölçülmektedir. Maddesel noktaya bir v_0 ilk hızı verildiğine göre, *(a)* hızı ilk hızının yarısına düşünceye kadar, *(b)* duruncaya kadar maddesel noktanın gittiği yolu bulunuz.

$$a = -0.002\, v^2$$

$$v \frac{dv}{ds} = -0.002\, v^2$$

$$\int_{v_0}^{v} \frac{dv}{v} = -0.02 \int_0^s ds \qquad \ln v - \ln v_0 = -0.002\, s$$

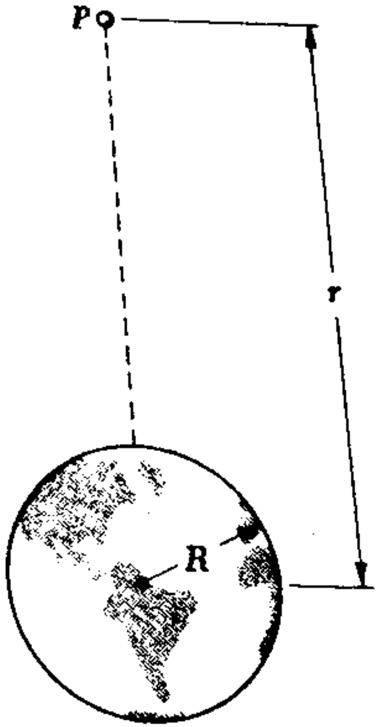
$$s = 500 \ln \frac{v_0}{v}$$

(a) $v = v_0/2$ için $s = 500 \ln \frac{v_0}{v_0/2} = 500 \ln 2 = 500\,(0,6931)$

$$s = 347\, m$$

(b) $v = 0$ için $s = 500 \ln \frac{v_0}{0} = 500 \ln \infty = \infty$

Maddesel nokta hiç durmayacaktır. $s = \infty$



Şek. P 1.19

1.19. Dünyaya doğru düşen bir maddesel noktanın ivmesi $a = -gR^2/r^2$ dir; burada r, maddesel noktanın dünyanın *merkezinden* uzaklığı, R dünyanın yarıçapı ve g ise yerin çekimi nedeniyle yeryüzündeki ivmedir. *Kaçış hızı*, yani maddesel noktanın dünyaya geri dönmemesi için düşey olarak atılması gereken minimum hız için bir bağıntı çıkarınız. (*Bilgi:* $r = \infty$ için $v = 0$ dır)

$$a = v\frac{dv}{dr} = -g\frac{R^2}{r^2}$$

$$\int_{v_0}^{v} v\,dv = -gR^2\int_{R}^{\infty}\frac{dr}{r^2}$$

$$\frac{1}{2}\left| v^2 \right|_{v_0}^{0} = gR^2\left|\frac{1}{r}\right|_{R}^{\infty}$$

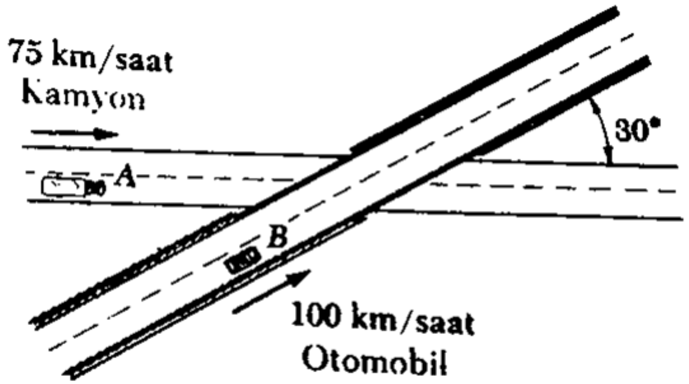
$$\frac{1}{2}\left(0 - v_0^2\right) = gR^2\left(\frac{1}{\infty} - \frac{1}{R}\right)$$

$$v_0^2 = 2gR$$

$$v_0 = \sqrt{2gR}$$

<u>Not:</u> Kaçış hızı, başlangıç hızının doğrultusundan bağımsızdır (bkz Böl. 3)

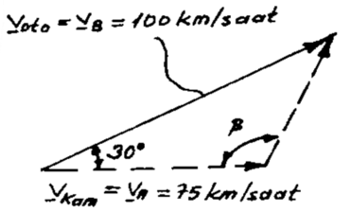
Bu problemde r dünyanın merkezinden ölçülür. Prob. 1.20 de, yerçekim ivmesi, dünya yüzünden ölçülen uzaklık cinsinden ifade edilmiştir.



Şek. P 1.104

1.104. *A* kamyonu ile *B* otomobili sabit hızlarla şekilde görüldüğü gibi yol almaktadırlar. Kamyon üst geçidin altından geçtikten beş saniye sonra, otomobil aynı geçidin üstünden geçiyor. *(a)* Otomobilin kamyona göre bağıl hızını, *(b)* on saniyelik süre içinde, kamyona göre, otomobilin konumundaki değişmeyi, *(c)* kamyonun, üst geçidin altından geçmesinden 10 saniye sonra kamyon ile otomobil arasındaki uzaklığı hesaplayınız.

$\underline{v}_B = \underline{v}_A + \underline{v}_{B/A}$



Cosinüs teoremi

$$(v_{B/A})^2 = 100^2 + 75^2 - 2(100)(75)\cos 30°$$
$$= 10000 + 5625 - 12990$$
$$= 2635$$
$$v_{B/A} = 51{,}3 \text{ Km/saat}$$

Sinüs teoremi

$$\frac{\sin\beta}{100} = \frac{\sin 30°}{51{,}3} \qquad \sin\beta = 0{,}97466$$
$$\beta = 102{,}9°$$
$$180° - \beta = 77{,}1°$$

otomobilin kamyona göre bağıl hızı

$$\underline{v}_{B/A} = 51{,}3 \text{ Km/saat} \measuredangle 77{,}1° \blacktriangleleft$$

(b) sabit hızlar:

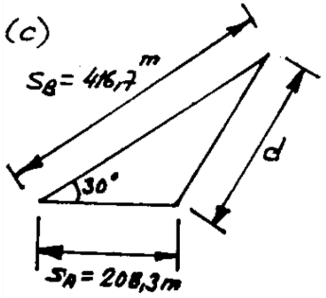
$v_{B/A} = 51{,}3$ km/saat $= 14{,}25$ m/san

$s_{B/A} = (v_{B/A})t = 14{,}25(10) = 142{,}5$ m

Kamyona göre otomobilin konumundaki değişme

$$\underline{s}_{B/A} = 142{,}5 \text{ m} \measuredangle 77{,}1° \blacktriangleleft$$

(c)



Otomobil: $t = 10 + 5 = 15$ san

$v_B = v_{oto} = 100$ km/saat $= 27{,}78$ m/san

$s_B = s_{oto} = 27{,}78(15) = 416{,}7$ m

Kamyon: $t = 10$ san

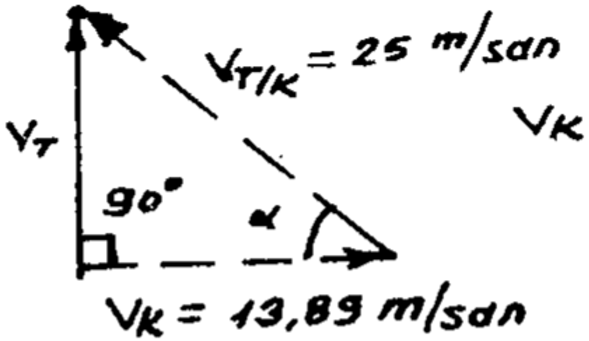
$v_A = v_{kam} = 75$ km/saat $= 20{,}83$ m/san

$s_A = s_{kam} = 20{,}83(10) = 208{,}3$ m

Cosinüs teoremi

$$d^2 = (416{,}7)^2 + (208{,}3)^2 - 2(416{,}7)(208{,}3)\cos 30° = 66692{,}6$$
$$d = 258{,}2 \text{ m}$$

1.105. Harekette bulunan kamyondaki bir adam bir taşı, kamyona göre 25 m/san lik yatay bir bağıl hızla önünden geçtiği bir direğe doğru fırlatıyor. Kamyonun hızının 50 km/saat olduğu bilindiğine göre, *(a)* taşın fırlatılması gereken doğrultuyu, *(b)* taşın yere göre yatay hızını hesaplayınız.



$V_K = 50$ km/saat
$= 13,89$ m/san

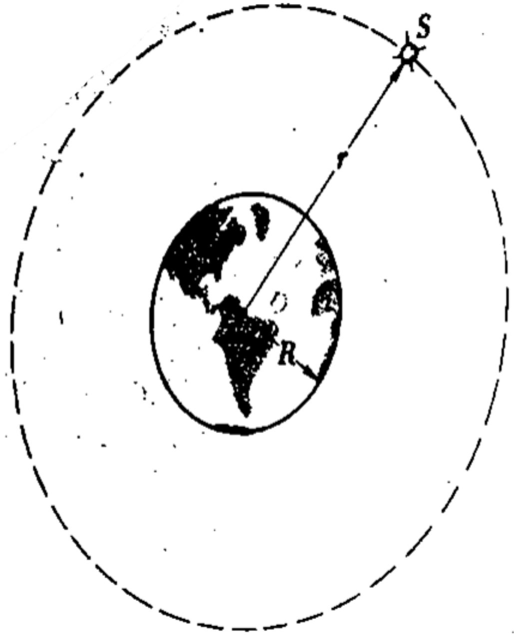
$$\underline{V}_T = \underline{V}_K + \underline{V}_{T/K}$$

Dik üçgenden

(a) $\cos\alpha = \dfrac{13,89}{25} = 0,555,6$ $\quad \alpha = 56,3^\circ$

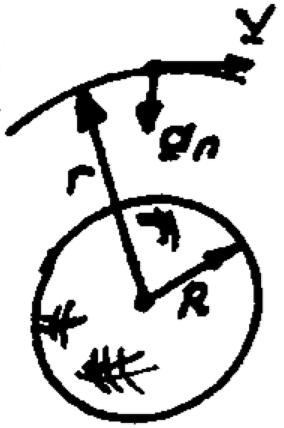
kamyonun arkasından

(b) $V_T = 25(\sin 56,3^\circ)$ $\quad V_T = 25(0,8320)$ $\quad V_T = 20,8$ m/san $\uparrow$



Şek. P 1.123

1.123. Bir yapma uydu, ivmesinin normal bileşeni $g\ (R/r)$ ye eşit ise dünya etrafında dairesel bir yörünge üzerinde sonsuz süre dönmeye devam eder; burada $g = 9{,}81$ m/san^2, R = dünyanın yarıçapı = 6370 km ve r = dünyanın merkezinden uyduya olan uzaklıktır. Dünya etrafında 24000 km/saat hızı ile sonsuz süre dönen böyle bir uydunun, dünyanın yüzünden olan yüksekliğini hesaplayınız.



$$V = 24000 \text{ km/saat} = 6666{,}67 \text{ m/san}$$

$$a_n = g\left(\frac{R}{r}\right)^2 = 9{,}81\,\frac{(6370000)^2}{r^2}$$

Oysa $a_n = \dfrac{V^2}{r}$

$$9{,}81\,\frac{(6370000)^2}{r^2} = \frac{(6666{,}67)^2}{r}$$

$$r = \frac{9{,}81\,(6370000)^2}{(6666{,}67)^2} = 8956334\text{ m} \cong 8956\text{ km}$$

Yükseklik $8956 - 6370 = 2586$ km

1.124. Dünyanın yüzünden 480 km uzaklıkta ve dairesel bir yörünge üzerinde dönen bir yapma uydunun hızını hesaplayınız. (Prob. 1.123 de verilen bilgilere bkz.)

$$a_n = \frac{V^2}{r} \qquad V^2 = r\,a_n$$

$a_n = g\,(R/r^2)$ koyarak $V^2 = rg\left(\frac{R}{r}\right)^2 = \frac{gR^2}{r}$

Veriler $r = (6370 + 480) = 6850$ km

$R = 6370$ km $\qquad g = 9{,}81$

$$V = \sqrt{\frac{g}{r}} \cdot R = \sqrt{\frac{9{,}81}{6850\,000}} \cdot 6370\,000 =$$

$V = 1{,}2 \cdot 6370 = 7644$ m/san

$V = 27520$ km/saat

1.125. Ayın yörüngesi, yarıçapı 384 000 km olan bir daire kabul edilirse, ayın dünyaya göre bağıl hızı ne olur? (Prob. 1.123 de verilen bilgilere bkz.)

$r = 384000\ km = 384\,000\,000\ m = 3{,}84 \times 10^8\ m$

$R = 6370\ km = 6\,370\,000\ m = 6{,}37 \times 10^6\ m$

Ay yörüngesindeki hız:

$$a_n = g\left(\frac{R}{r}\right)^2 = g\left(\frac{6{,}37\times10^6}{3{,}84\times10^8}\right)^2 = 9{,}81\ \frac{40{,}5769\ (10)^{12}}{14{,}7456\ (10)^{16}}$$

$a_n = 0{,}0026995\ m/san^2 \qquad a_n = \frac{V^2}{r}$

$V^2 = 0{,}00270\ (3{,}84)(10)^8 = 0{,}010366\,(10)^8 \qquad V = 1018\ m/san$

$V = 3665\ km/saat$

Başka bir çözüm

$$a_n = \frac{V^2}{\rho} \qquad a_n = g\left(\frac{R}{r}\right)^2 \qquad a_n = a_n$$

$$\frac{V^2}{r} = g\left(\frac{R}{r}\right)^2 \qquad V^2 = \frac{gR^2}{r}$$

$$V^2 = \frac{9{,}81\ (6{,}37)(10^6)^2}{3{,}84\times10^8} = \frac{39{,}8059\ (10)^{13}}{3{,}84\ (10^8)}$$

$V = 1018\ m/san$

$V = 3665\ km/saat$

1.130. Bir maddesel noktanın iki boyutlu bir hareketi $r = k(1 + \cos \frac{1}{2}\pi t)$ ve $\theta = \frac{1}{2}\pi t$ bağıntıları ile verilmektedir. (*a*) $t = 1$, (*b*) $t = 2$ için maddesel noktanın hız ve ivmesini hesaplayınız.

$$r = k\left(1+\cos\frac{\pi}{2}t\right) \qquad \theta = \frac{\pi}{2}t$$

$$\frac{dr}{dt} = \frac{\pi}{2}k\left(-\sin\frac{\pi}{2}t\right) \qquad \frac{d\theta}{dt} = \frac{\pi}{2}$$

$$\frac{d^2r}{dt^2} = \frac{\pi^2}{4}k\left(-\cos\frac{\pi}{2}t\right) \qquad \frac{d^2\theta}{dt^2} = 0$$

$$v_r = \frac{dr}{dt} = -\frac{\pi k}{2}\sin\frac{\pi}{2}t \qquad v_\theta = r\frac{d\theta}{dt} = \frac{\pi k}{2}\left(1+\cos\frac{\pi}{2}t\right)$$

$$a_r = \frac{d^2r}{dt^2} - r\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2 = -\frac{\pi^2}{4}k\cos\frac{\pi}{2}t - \frac{\pi^2}{4}k\left(1+\cos\frac{\pi}{2}t\right)$$

$$a_\theta = r\frac{d^2\theta}{dt^2} + 2\frac{dr}{dt}\frac{d\theta}{dt} = 0 - 2\frac{\pi^2}{4}k\sin\frac{\pi}{2}t$$

(a) <u>$t=1$ ise</u> $\quad \sin\frac{\pi}{2}=1\ ,\ \cos\frac{\pi}{2}=0$

$$v_r = -\frac{\pi}{2}k \qquad v_\theta = \frac{\pi}{2}k$$

$$v = \sqrt{v_r^2+v_\theta^2} = \sqrt{2}\,\frac{\pi}{2}k = \frac{\pi k}{\sqrt{2}} \qquad tg\,\gamma = \frac{v_r}{v_\theta} = -1 \quad \gamma = 135^\circ$$

$$\underline{v} = \frac{\pi k}{\sqrt{2}}\ ,\ \gamma = 135^\circ$$

$$a_r = -\frac{\pi^2}{4}k \qquad a_\theta = -2\frac{\pi^2}{4}k$$

$$a = \sqrt{a_r^2+a_\theta} = \sqrt{5}\,\frac{\pi^2}{4}k \qquad tg\,\gamma = \frac{a_r}{a_\theta} = \frac{-\frac{\pi}{4}k}{-2\frac{\pi}{4}k} = \frac{1}{2}\ ,\ \gamma = -116{,}5$$

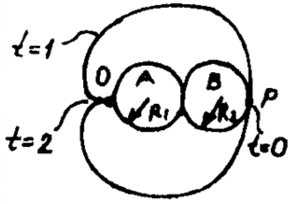
$$\underline{a} = \sqrt{5}\,\frac{\pi^2}{4}k\ ,\ \gamma = -116{,}5^\circ$$

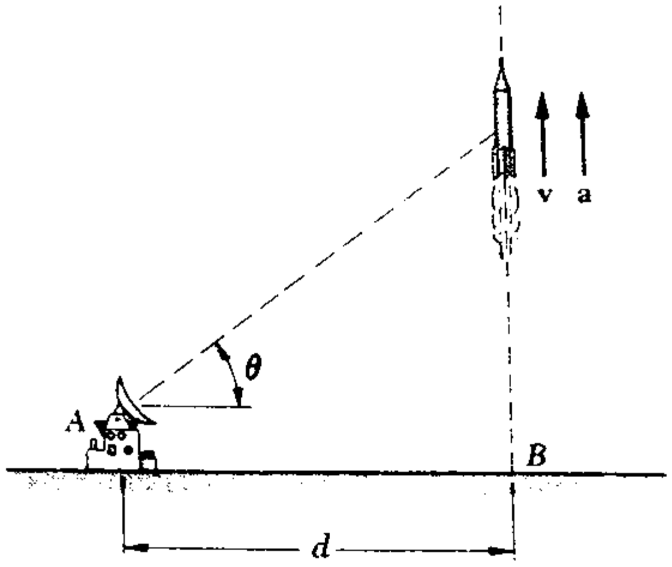
(b) <u>$t=2$ ise</u> $\quad \sin\pi = 0\ ,\ \cos\pi = -1$

$$v_r = 0\ ,\ v_\theta = 0\ ,\ \underline{v} = 0$$

$$a_r = -\frac{\pi^2}{4}k(-1) - \frac{\pi^2}{4}k(0) = +\frac{\pi^2}{4}k \qquad a_\theta = 0 \qquad \underline{a} = \frac{\pi^2}{4}k\ ,\ \gamma = 0$$

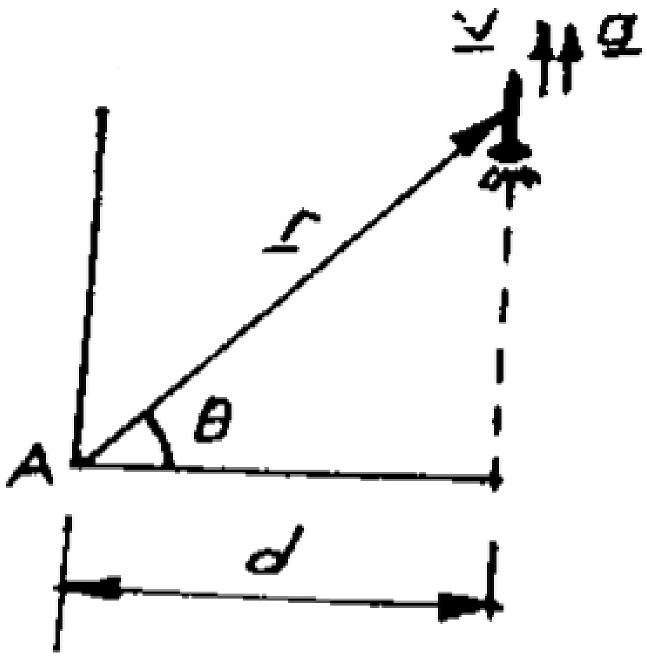
<u>Not:</u> Yörünge bir Kardoid veya bir episikloid dir $R_1 = R_2$ dir. B çemberi sabit A çemberi üzerinde yuvarlanırken B nin A noktası bu eğri-yi çizer.





Şek. P 1.131

1.131. *B* de bulunan bir rampadan düşey olarak fırlatılan bir roketin hareketi, *A* da bulunan bir radar ile izleniyor. Roketin hızını, *d*, θ ve $d\theta/dt$ cinsinden hesaplayınız.



$$r = \frac{d}{\cos\theta} = d\sec\theta$$

$$V_r = \frac{dr}{dt} = d\sec\theta \, tg\theta \, \frac{d\theta}{dt}$$

$$V_\theta = r\frac{d\theta}{dt} = d\sec\theta \frac{d\theta}{dt}$$

$$V = \sqrt{V_r^2 + V_\theta^2}$$

$$V = d\sec\theta \sqrt{1 + tg^2\theta} \, \frac{d\theta}{dt}$$

Oysa $\sec\theta = \sqrt{1 + tg^2\theta}$

$$\underline{v} = d\sec^2\theta \, \frac{d\theta}{dt} \uparrow$$

1.139. Bir maddesel noktanın üç boyutlu bir hareke $R = A\,(1 - e^{-t})$, $\theta = 2\pi t$ ve $z = B\,(1 - e^{-t})$ denklemleriyle veri liyor. *(a)* $t = 0$, *(b)* $t = \infty$ için hız ve ivmenin şiddetini hesaplayı nız.

$$R = A(1-e^{-t}) \qquad \theta = 2\pi t \qquad z = B(1-e^{-t})$$

$$\dot{R} = Ae^{-t} \qquad \dot{\theta} = 2\pi \qquad \dot{z} = Be^{-t}$$

$$\ddot{R} = -Ae^{-t} \qquad \ddot{\theta} = 0 \qquad \ddot{z} = -Be^{-t}$$

Hız: (Denk. 1.49)

$$\underline{V} = \dot{R}\underline{i}_R + R\dot{\theta}\underline{i}_\theta + \dot{z}\underline{k}$$

$$\underline{V} = Ae^{-t}\underline{i}_R + A(1-e^{-t})2\pi\underline{i}_\theta + Be^{-t}\underline{k}$$

$t=0$ ise : $e^{-t} = e^0 = 1$ $\quad \underline{V} = A\underline{i}_R + B\underline{k}$

$$V = \sqrt{A^2+B^2}$$

$t=\infty$ ise : $e^{-t} = e^{-\infty} = 0$

$$V = 2\pi A\underline{i}_\theta \qquad V = 2\pi A$$

İvme: (Denk. 1.50)

$$\underline{a} = (\ddot{R} - R\dot{\theta}^2)\underline{i}_R + (R\ddot{\theta} + 2\dot{R}\dot{\theta})\underline{i}_\theta + \ddot{z}\underline{k}$$

$$\underline{a} = [-Ae^{-t} - A(1-e^{-t})4\pi^2]\underline{i}_R + [0 + 2Ae^{-t}(2\pi)]\underline{i}_\theta - Be^{-t}\underline{k}$$

$t=0$ ise: $e^{-t} = e^0 = 1$ $\quad \underline{a} = A\underline{i}_R + 4\pi A\underline{i}_\theta - B\underline{k}$

$$a = \sqrt{A^2 + (4\pi A)^2 + B^2} \qquad a = \sqrt{(1+16\pi^2)A^2 + B^2}$$

$t = -\infty$: $e^{-\infty} = 0$ $\quad \underline{a} = -4\pi^2 A\underline{i}_R \qquad a = 4\pi^2 A$

1.151. Deneysel bir iyon - tahrikli makina, bir uzay aracına $0,003 \ m/san^{-2}$ lik sabit bir ivme verebilecek niteliktedir. Uzay aracı 30000 km/saat hızı ile yol alırken makina işletilmeye başlatıldığına göre aracın hızının 35000 km/saat değerine çıkması için gerekli zamanı bulunuz. Aracın, güneş veya herhangi bir gezegenden uzakta ve bir doğru boyunca hareket ettiği kabul ediliyor.

DÜZGÜN HAREKET

$a = 0.003 \ m/san^2$

$V = V_0 + at$

$V - V_0 = at$

$V - V_0 = 35000 - 30000 = 5000 \ km/saat = 1388,89 \ m/san$

$1388,89 = (0,003)t$

$t = 462963 \ san$

$t = 128,6 \ saat$