Dinamik Uygulama

Ders: 3

Öğr. Gör. Doğan SAĞLAM

1.124. Dünyanın yüzünden 480 km uzaklıkta ve dairesel bir yörünge üzerinde dönen bir yapma uydunun hızını hesaplayınız. (Prob. 1.123 de verilen bilgilere bkz.)

$a_n = \frac{V^2}{r} \qquad V^2 = r\,a_n$

$a_n = g\,(R/r^2)$ koyarak $V^2 = r g \left(\frac{R}{r}\right)^2 = \frac{gR^2}{r}$

Veriler $r = (6370 + 480) = 6850$ km

$R = 6370$ km $\qquad g = 9{,}81$

$V = \sqrt{\frac{g}{r}} \cdot R = \sqrt{\frac{9{,}81}{6850\,000}} \cdot 6370\,000 =$

$V = 1{,}2 \cdot 6370 = 7644$ m/san

$V = 27520$ km/saat

1.125. Ayın yörüngesi, yarıçapı 384 000 km olan bir daire kabul edilirse, ayın dünyaya göre bağıl hızı ne olur? (Prob. 1.123 de verilen bilgilere bkz.)

$r = 384\,000\ km = 384\,000\,000\ m = 3{,}84 \times 10^8\ m$

$R = 6370\ km = 6\,370\,000\ m = 6{,}37 \times 10^6\ m$

Ay yörüngesindeki hız :

$$a_n = g\left(\frac{R}{r}\right)^2 = g\left(\frac{6{,}37 \times 10^6}{3{,}84 \times 10^8}\right)^2 = 9{,}81\ \frac{40{,}5769\ (10)^{12}}{14{,}7456\ (10)^{16}}$$

$a_n = 0{,}0026995\ m/san^2 \qquad a_n = \frac{V^2}{r}$

$V^2 = 0{,}00270\ (3{,}84)\ (10)^8 = 0{,}010366\ (10)^8 \qquad V = 1018\ m/san$

$V = 3665\ km/saat$

<u>Başka bir çözüm</u>

$a_n = \frac{V^2}{\rho} \qquad a_n = g\left(\frac{R}{r}\right)^2 \qquad a_n = a_n$

$\frac{V^2}{r} = g\left(\frac{R}{r}\right)^2 \qquad V^2 = \frac{gR^2}{r}$

$$V^2 = \frac{9{,}81\ (6{,}37)(10^6)^2}{3{,}84 \times 10^8} = \frac{39{,}8059\ (10)^{13}}{3{,}84\ (10^8)}$$

$V = 1018\ m/san$

$V = 3665\ km/saat$

1.130. Bir maddesel noktanın iki boyutlu bir hareke
$r = k(1 + \cos \frac{1}{2}\pi t)$ ve $\theta = \frac{1}{2}\pi t$ bağıntıları ile verilmekte
(a) $t = 1$, (b) $t = 2$ için maddesel noktanın hız ve ivmesini hesa
layınız.

$r = k\left(1 + \cos\frac{\pi}{2}t\right)$ $\qquad \theta = \frac{\pi}{2}t$

$\frac{dr}{dt} = \frac{\pi}{2}k\left(-\sin\frac{\pi}{2}t\right)$ $\qquad \frac{d\theta}{dt} = \frac{\pi}{2}$

$\frac{d^2r}{dt^2} = \frac{\pi^2}{4}k\left(-\cos\frac{\pi}{2}t\right)$ $\qquad \frac{d^2\theta}{dt^2} = 0$

$V_r = \frac{dr}{dt} = -\frac{\pi k}{2}\sin\frac{\pi}{2}t$ $\qquad V_\theta = r\frac{d\theta}{dt} = \frac{\pi k}{2}\left(1 + \cos\frac{\pi}{2}t\right)$

$a_r = \frac{d^2r}{dt^2} - r\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2 = -\frac{\pi^2}{4}k\cos\frac{\pi}{2}t - \frac{\pi^2}{4}k\left(1+\cos\frac{\pi}{2}t\right)$

$a_\theta = r\frac{d^2\theta}{dt^2} + 2\frac{dr}{dt}\frac{d\theta}{dt} = 0 - 2\frac{\pi^2}{4}k\sin\frac{\pi}{2}t$

(a) $\underline{t=1 \text{ ise}}$ $\qquad \sin\frac{\pi}{2} = 1$, $\cos\frac{\pi}{2} = 0$

$V_r = -\frac{\pi}{2}k$ $\qquad V_\theta = \frac{\pi}{2}k$

$V = \sqrt{V_r^2 + V_\theta^2} = \sqrt{2}\,\frac{\pi}{2}k = \frac{\pi k}{\sqrt{2}}$ $\qquad tg\,\gamma = \frac{V_r}{V_\theta} = -1$ $\qquad \gamma = 135°$

$\underline{V} = \frac{\pi k}{\sqrt{2}}$, $\gamma = 135°$

$a_r = -\frac{\pi^2}{4}k$ $\qquad a_\theta = -2\frac{\pi^2}{4}k$

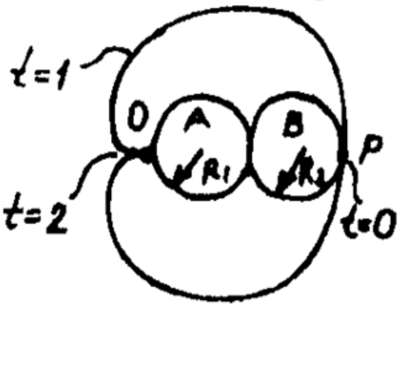
$a = \sqrt{a_r^2 + a_\theta^2} = \sqrt{5}\,\frac{\pi^2}{4}k$ $\qquad tg\,\gamma = \frac{a_r}{a_\theta} = \frac{-\frac{\pi}{4}k}{-2\frac{\pi}{4}k} = \frac{1}{2}$, $\gamma = -116{,}5$

$\underline{a} = \sqrt{5}\,\frac{\pi^2}{4}k$, $\gamma = -116{,}5°$

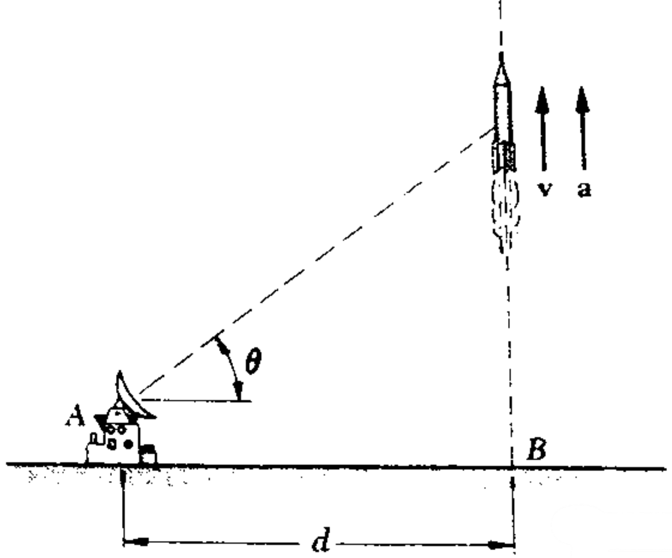
(b) $\underline{t=2 \text{ ise}}$ $\qquad \sin\pi = 0$, $\cos\pi = -1$

$V_r = 0$, $V_\theta = 0$, $\underline{V} = 0$

$a_r = -\frac{\pi^2}{4}k(-1) - \frac{\pi^2}{4}k(0) = +\frac{\pi^2}{4}k$ $\qquad a_\theta = 0$ $\qquad \underline{a} = \frac{\pi^2}{4}k$, $\gamma = 0$

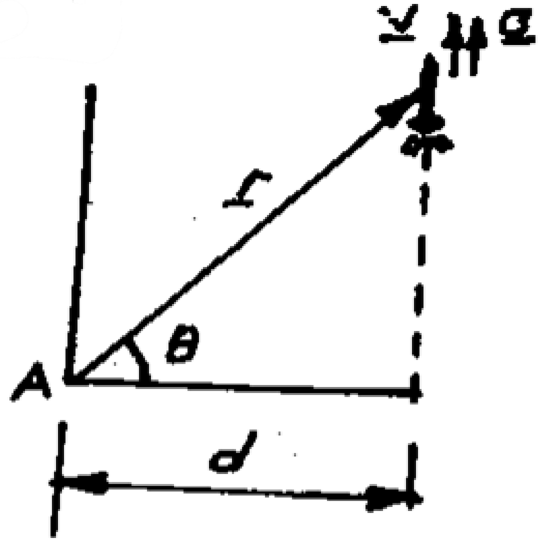


__Not:__ Yörünge bir Kardoid veya bir episikloid dir $R_1 = R_2$ dir. B çemberi sabit A çemberi üzerinde yuvarlanırken B nin A noktası bu eğriyi çizer.



Şek. P 1.131

1.131. *B* de bulunan bir rampadan düşey olarak fırlatılan bir roketin hareketi, *A* da bulunan bir radar ile izleniyor. Roketin hızını, *d*, *θ* ve *dθ/dt* cinsinden hesaplayınız.



$$r = \frac{d}{\cos\theta} = d\sec\theta$$

$$V_r = \frac{dr}{dt} = d\sec\theta\, tg\theta\, \frac{d\theta}{dt}$$

$$V_\theta = r\frac{d\theta}{dt} = d\sec\theta \frac{d\theta}{dt}$$

$$V = \sqrt{V_r^2 + V_\theta^2}$$

$$V = d\sec\theta\sqrt{1+tg^2\theta}\ \frac{d\theta}{dt}$$

Oysa $\sec\theta = \sqrt{1+tg^2\theta}$

$$\underline{V} = d\sec^2\theta\ \frac{d\theta}{dt} \uparrow$$

1.139. Bir maddesel noktanın üç boyutlu bir hareke $R = A(1 - e^{-t})$, $\theta = 2\pi t$ ve $z = B(1 - e^{-t})$ denklemleriyle veri liyor. *(a)* $t = 0$, *(b)* $t = \infty$ için hız ve ivmenin şiddetini hesaplayı nız.

$R = A(1-e^{-t})$ $\qquad \theta = 2\pi t$ $\qquad z = B(1-e^{-t})$

$\dot{R} = Ae^{-t}$ $\qquad \dot{\theta} = 2\pi$ $\qquad \dot{z} = Be^{-t}$

$\ddot{R} = -Ae^{-t}$ $\qquad \ddot{\theta} = 0$ $\qquad \ddot{z} = -Be^{-t}$

Hız: (Denk. 1.49)

$$\underline{V} = \dot{R}\,\underline{i}_R + R\dot{\theta}\,\underline{i}_\theta + \dot{z}\,\underline{k}$$

$$\underline{V} = Ae^{-t}\,\underline{i}_R + A(1-e^{-t})\,2\pi\,\underline{i}_\theta + Be^{-t}\,\underline{k}$$

$t=0$ ise : $e^{-t} = e^{0} = 1$ $\quad \underline{V} = A\,\underline{i}_R + B\,\underline{k}$

$$V = \sqrt{A^2+B^2}$$

$t=\infty$ ise : $e^{-t} = e^{-\infty} = 0$

$V = 2\pi A\,\underline{i}_\theta$ $\quad V = A\,\hat{i}_R + 2\pi A\,\hat{i}_\theta$

$$V = 2\pi A$$

İvme: (Denk. 1.50)

$$\underline{a} = (\ddot{R} - R\dot{\theta}^2)\,\underline{i}_R + (R\ddot{\theta} + 2\dot{R}\dot{\theta})\,\underline{i}_\theta + \ddot{z}\,\underline{k}$$

$$\underline{a} = [-Ae^{-t} - A(1-e^{-t})4\pi^2]\,\underline{i}_R + [0 + 2Ae^{-t}(2\pi)]\,\underline{i}_\theta - Be^{-t}\,\underline{k}$$

$t=0$ ise: $e^{-t} = e^{0} = 1$ $\quad \underline{a} = A\,\underline{i}_R + 4\pi A\,\underline{i}_\theta - B\,\underline{k}$

$a = \sqrt{A^2 + (4\pi A)^2 + B^2}$ $\qquad a = \sqrt{(1+16\pi^2)A^2 + B^2}$

$t = -\infty$: $e^{-\infty} = 0$ $\quad \underline{a} = -4\pi^2 A\,\underline{i}_R$ $\quad a = 4\pi^2 A$

1.151. Deneysel bir iyon - tahrikli makina, bir uzay aracına $0,003\ m/san^2$ lik sabit bir ivme verebilecek niteliktedir. Uzay aracı 30000 km/saat hızı ile yol alırken makina işletilmeye başlatıldığına göre aracın hızının 35000 km/saat değerine çıkması için gerekli zamanı bulunuz. Aracın, güneş veya herhangi bir gezegenden uzakta ve bir doğru boyunca hareket ettiği kabul ediliyor.

DÜZGÜN HAREKET $\qquad a = 0.003\ m/san^2$

$$v = v_0 + at \qquad v - v_0 = at$$

$$v - v_0 = 35000 - 30000 = 5000\ km/saat = 1388,89\ m/san$$

$$1388,89 = (0,003)t \qquad t = 462963\ san$$

$$t = 128,6\ saat$$

1. Bir parçacığın konum vektörü

$$\mathbf{r} = 2e^{-\omega t}\mathbf{i} + e^{\omega t}\mathbf{j} + \omega t\mathbf{k}$$

ile verilmektedir. Burada ω , $1/T$ boyutunda bir sabittir. Parçacığın teğetsel ve normal ivme bileşenleri aranmaktadır.

Önce hızı bulalım.

$$\mathbf{v} = \dot{\mathbf{r}} = \omega(-2e^{-\omega t}\mathbf{i} + e^{\omega t}\mathbf{j} + \mathbf{k})$$

ve

$$v = |\mathbf{v}| = \omega\ (1 + e^{2\omega t} + 4e^{-2\omega t})^{1/2}$$

olur. Öte yandan eğrilik

$$\frac{1}{\rho} = \frac{|\dot{\mathbf{r}} \times \ddot{\mathbf{r}}|}{|\dot{\mathbf{r}}|^3} = \frac{(16 + e^{2\omega t} + 4e^{-2\omega t})^{1/2}}{(1 + e^{2\omega t} + 4e^{-2\omega t})^{3/2}}$$

ile verileceğinden

$$a_t = \frac{dv}{dt} = \omega^2 \frac{e^{2\omega t} - 4e^{-2\omega t}}{(1 + e^{2\omega t} + 4e^{-2\omega t})^{1/2}}$$

$$a_n = \frac{v^2}{\rho} = \omega^2 \left[\frac{16 + e^{2\omega t} + 4e^{-2\omega t}}{1 + e^{2\omega t} + 4e^{-2\omega t}}\right]^{1/2}$$

elde edilir.

(2) Bir parçacık a yarıçaplı bir dairesel helis üzerinde hareket etmektedir. Parçacığın helis üzerinde $(a, 0, 0)$ noktasından itibaren aldığı yol $s = (k/2)\,t^2$ fonksiyonu ile verilmektedir. Hızı ve ivmeyi belirleyiniz.

u bir parametre olmak üzere helisin denklemi

$$\mathbf{r} = a \cos u\,\mathbf{i} + a \sin u\,\mathbf{j} + bu\,\mathbf{k}$$

ile verilmektedir. Burada $2\pi b$ helisin adımıdır.

$$ds = (a^2 + b^2)^{1/2}\, du$$

yazılabileceğinden $u = 0$ için $s = 0$ koşulu ile

$$u = \frac{s}{(a^2 + b^2)^{1/2}}$$

bulunur.

Hızın büyüklüğü

$$v = \frac{ds}{dt} = kt$$

olur. İvmenin teğetsel bileşeni hemen

$$a_t = \frac{dv}{dt} = k$$

çıkar. Normal bileşeni ise eğriliğin $1/\rho = a/(a^2 + b^2)$ olduğu hatırlanırsa

$$a_n = \frac{av^2}{a^2 + b^2} = \frac{ak^2t^2}{a^2 + b^2}$$

elde edilir. Hareket denklemleri de şimdi

$$x = a \cos\left(\frac{kt^2}{2\,(a^2 + b^2)^{1/2}}\right), \quad y = a \sin\left(\frac{kt^2}{2\,(a^2 + b^2)^{1/2}}\right), \quad z = \frac{bkt^2}{2\,(a^2 + b^2)^{1/2}}$$

şeklinde yazılabilir.

3) Bir parçacığın konum vektörü

$$\mathbf{r} = a\cos\omega t\,\mathbf{i} + a\sin\omega t\,\mathbf{j} + bt^2\mathbf{k}$$

ile verilmekte ve ivmenin teğetsel ve normal bileşenleri aranmaktadır. Kartezyen koordinatlarda

dır. Kartezyen koordinatlarda

$$\mathbf{v} = \dot{\mathbf{r}} = -a\omega\sin\omega t\,\mathbf{i} + a\omega\cos\omega t\,\mathbf{j} + 2bt\mathbf{k}$$

$$\mathbf{a} = \ddot{\mathbf{r}} = -a\omega^2\cos\omega t\,\mathbf{i} - a\omega^2\sin\omega t\,\mathbf{j} + 2b\mathbf{k}$$

yazılabileceğinden hız ve ivmenin büyüklükleri

$$v = |\mathbf{v}| = (a^2\omega^2 + 4b^2t^2)^{1/2} \quad , \quad |\mathbf{a}| = (a^2\omega^4 + 4b^2)^{1/2}$$

olur. Dolayısıyla ivmenin teğetsel bileşeni

$$a_t = \mathbf{a}\cdot\frac{\mathbf{v}}{v} = \frac{4b^2t}{(a^2\omega^2 + 4b^2t^2)^{1/2}}$$

ve normal bileşeni de

$$a_n = (|\mathbf{a}|^2 - a_t^2)^{1/2} = a\omega\left(\frac{a^2\omega^4 + 4b^2 + 4b^2\omega^2t^2}{a^2\omega^2 + 4b^2t^2}\right)^{1/2}$$

bulunur.

6. Bir parçacık uzayda silindirik koordinatlarda zaman saniye ile ölçülmek üzere

$$r = 4t^2\,(\mathrm{m}), \qquad \theta = 2\pi t^2\,(\mathrm{rad}), \qquad z = 2t^3\,(\mathrm{m})$$

denklemlerine göre hareket etmektedir. Hız ve ivme bileşenlerini bulunuz.

$$\dot{r}=8t, \quad \ddot{r}=8; \quad \dot{\theta}=4\pi t, \quad \ddot{\theta}=4\pi; \quad \dot{z}=6t^2, \quad \ddot{z}=12t$$

ifadelerinden

$$v_r = 8t, \quad v_\theta = 4t^2 . 4\pi t = 16\pi t^3, \qquad v_z = 6t^2\,(\mathrm{m/sn})$$

$$a_r = 8-4t^2 . 16\pi^2 t^2 = 8(1-8\pi^2 t^4),$$

$$a_\theta = 4t^2 . 4\pi + 2.8\,t . 4\pi t = 80\pi t^2, \qquad a_z = 12t\,(\mathrm{m/sn^2})$$

bulunur.