

Sonlu bölgede Dirichlet sınır değer problemlerinin çözümleri

A sonlu alana sahip bir bölge olmak üzere iki boyutta Poisson denklemini için Dirichlet sınır değer problemi

$$(6) \begin{cases} (a) & \nabla^2 u = F(x,y) & (x,y) \in A \\ (b) & u = k(x,y) & (x,y) \in \partial(A) \end{cases}$$

$\frac{\partial G}{\partial N}$

şeklinde dir. Eğer $k(x,y) \equiv 0$ ise çözüm (3) integrali ile elde edilir. Aşağıdaki teoremi G'nin normal türevini içeren bir eğrisel integralin sıfır olmayan k 'yı içerdiğini gösterir.

Teorem: $G(x,y; \lambda, \gamma)$ (6) problemi için Green fonksiyonu olduğunda çözüm $\frac{\partial G}{\partial N}$, G'nin (λ, γ)

değişkenlerine göre dış doğru normal doğru yönündeki yönlü türev olmak üzere

$$\left(\frac{\partial G}{\partial N} = \nabla G \cdot \frac{\vec{N}}{|\vec{N}|}, \vec{N} \text{ birim vektör dölse} \right)$$

$$(7) \quad u(x,y) = \iint_A G(x,y; \lambda, \gamma) F(\lambda, \gamma) dA + \oint_{\partial(A)} k(x,y) \frac{\partial G}{\partial N} ds$$

şeklinde dir.

İSPAT 7: Green teoremi için $u = G(x, y; \bar{x}, \bar{y})$ ve $v = u(x, y)$ alalım.

$$\iint_A (u \nabla^2 G - G \nabla^2 u) dA = \oint_{\partial(A)} (u \nabla G - G \nabla u) \cdot \vec{n} \, ds$$

$$\left. \begin{array}{l} A \text{ da } \nabla^2 u = F(x, y), \nabla^2 G = \delta(x - \bar{x}, y - \bar{y}) \\ \partial(A) \text{ da } u = k(x, y) \quad G = 0 \end{array} \right\} \text{ olduğundan}$$

$$\iint_A [u(x, y) \cdot \delta(x - \bar{x}, y - \bar{y}) - G(x, y; \bar{x}, \bar{y}) F(x, y)] dA = \oint_{\partial(A)} k(x, y) \nabla G \cdot \underbrace{\vec{n}}_{\text{birim normal vektör}} ds$$

$$u(\bar{x}, \bar{y}) - \iint_A G(x, y; \bar{x}, \bar{y}) F(x, y) dA = \oint_{\partial(A)} k(x, y) \frac{\partial G}{\partial N} ds$$

$$\Rightarrow u(x, y) = \iint_A G(x, y; \bar{x}, \bar{y}) F(\bar{x}, \bar{y}) dA + \oint_{\partial(A)} k(x, y) \frac{\partial G}{\partial N} ds$$

Çözüm (7) deki integralleri fiziksel olarak yorumlayalım:

1. Elektrostatikte

Problem (6), $F(x,y)$ alan yük yoğunluğunu ve $K(x,y)$ bir sınır potansiyelini tanımlamak üzere bir A alanındaki potansiyeli ifade eder. (7)'deki ilk integral potansiyelin iç yükten kaynaklanan kısmını ifade eder ve ikinci integralde sınır potansiyel katkısıdır. $G(x,y;\xi,\eta)$ Green fonksiyonu, $\beta(A)$ sınırı üzerindeki potansiyel ortadan kalktığında (ξ,η) 'deki bir birim yükten dolayı (x,y) noktasındaki potansiyeldir. (Topraklanmış bir metal yüzey)

2. Isı İletiminde

Problem (6), $F(x,y)$ iç ısı oluşumuna, $K(x,y)$ sınır sıcaklığına bağlı olarak A bölgesindeki sabit durum sıcaklığını açıklar. Burada da (7) deki ilk integral iç kaynaklardan kaynaklanan sıcaklığı temsil eder. Green fonksiyonu, sınır sıcaklığı ortadan kalktığında (ξ,η) 'deki bir birim kaynağa bağlı olarak (x,y) konumundaki sıcaklıktır. İkinci integral ise uygulanan sınır sıcaklıklarının etkisini temsil eder.

3. Gergin bir zarın statik sapmasında

Burada da iki katlı integral, uygulanan kuvvetlerden kaynaklanan etkiyi, eğrisel integralde, sınır yer değiştirmelerinin etkisini temsil eder.

