

$$u(r, \theta; R, \theta) = \frac{1}{4\pi} \ln [r^2 + R^2 - 2rR \cos(\theta - \theta)] \rightarrow \text{boş-alan Green fonksiyonu}$$

$$G = u + g$$

$$\begin{cases} \nabla^2 g = 0 & 0 < r < r_0, -\pi < \theta < \pi \\ g(r, \theta; R, \theta) = -u = -\frac{1}{4\pi} \ln [r^2 + R^2 - 2rR \cos(\theta - \theta)] & -\pi < \theta < \pi \end{cases}$$

g bu problemi sağlar. Kısui türevli; dif. denklemler üzerindeki değişkenlerin ayrılması, $r=0$ daki sınırlılıkla birlikte, problemin çözümü

$$g(r, \theta; R, \theta) = \frac{a_0}{\sqrt{2\pi}} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n r^n \frac{\cos n\theta}{\sqrt{\pi}} + b_n r^n \frac{\sin n\theta}{\sqrt{\pi}} \right)$$

$$g(r, \theta; R, \theta) = R(r) \Theta(\theta)$$

$$\nabla^2 = \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right)$$

$$\begin{aligned} x &= r \cos \theta & X &= R \cos \theta \\ y &= r \sin \theta & Y &= R \sin \theta \end{aligned}$$

$$\nabla^2 g = \frac{\partial^2 g}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial g}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 g}{\partial \theta^2} = 0$$

$$\begin{aligned} g_r' &= R' \Theta & g_r' &= R' \Theta \\ g_\theta &= R \Theta' & g_\theta &= R \Theta' \end{aligned} \Rightarrow R'' \Theta + \frac{1}{r} R' \Theta + \frac{1}{r^2} R \Theta'' = 0$$

$$r^2 \frac{R'' \Theta}{R \Theta} + r \frac{R' \Theta}{R \Theta} + \frac{R \Theta''}{R \Theta} = 0 \Rightarrow r^2 \frac{R''}{R} + r \frac{R'}{R} = -\frac{\Theta''}{\Theta} = \lambda$$

$$1) r^2 R'' + r R' = \lambda R \Rightarrow r^2 R'' + r R' - \lambda R = 0 \quad (\text{Cauchy-Euler dif. denk})$$

2 şekilde çözülür.

$$\begin{cases} 1) r = e^t \rightarrow \\ 2) R = r^m \rightarrow \end{cases}$$

$$r = e^t \Rightarrow t = \ln r$$

$$\frac{dR}{dr} = \frac{dR}{dt} \cdot \frac{dt}{dr} = \frac{dR}{dt} \cdot \frac{1}{r} = e^{-t} \frac{dR}{dt}$$

$$\frac{d}{dt} = D$$

$$\frac{d^2 R}{dr^2} = \frac{d}{dr} \left(\frac{dR}{dr} \right) \cdot \frac{dt}{dr} = \frac{d}{dt} \left(\frac{dR}{dr} \right) \cdot \frac{1}{r} = \frac{d}{dt} \left[e^{-t} \frac{dR}{dt} \right] \cdot \frac{1}{e^t} = \left[-e^{-t} \frac{dR}{dt} + e^{-t} \frac{d^2 R}{dt^2} \right] \cdot e^{-t} = e^{-2t} \left[\frac{d^2 R}{dt^2} - \frac{dR}{dt} \right]$$

$$= e^{-2t} D(D-1)R$$

$$e^{2t} \cdot e^{-2t} D(D-1)R + e^t \cdot e^{-t} D R - \lambda R = 0 \Rightarrow (D^2 - D + D - \lambda)R = 0 \Rightarrow R'' - \lambda R = 0$$

k.d: $r^2 - \lambda = 0 \Rightarrow r^2 = \lambda \Rightarrow r_{1,2} = \pm \sqrt{\lambda}$

$$R = A \cdot e^{-\lambda t} + B \cdot e^{\lambda t} = \frac{A}{r^\lambda} + B r^\lambda \rightarrow A r^{-\lambda} + B r^\lambda$$

$\boxed{\lambda=0}$

$$R(r) = \begin{cases} A + B \ln r & n=0 \\ A r^n + B r^{-n} & n \geq 1 \end{cases}$$

$$-\frac{\theta''}{\theta} = \lambda \Rightarrow -\theta'' - \lambda \theta = 0$$

$$\theta'' + \lambda \theta = 0$$

$$\text{K.D.: } r^2 + \lambda = 0$$

$$r^2 = -\lambda$$

$$r = \pm \sqrt{\lambda} i$$

$$\theta = c_1 \cos \sqrt{\lambda} \theta + c_2 \sin \sqrt{\lambda} \theta$$

$$\theta' = -c_1 \sqrt{\lambda} \sin \sqrt{\lambda} \theta + c_2 \sqrt{\lambda} \cos \sqrt{\lambda} \theta$$

$$\theta(\pi) = c_1 \cos \sqrt{\lambda} \pi + c_2 \sin \sqrt{\lambda} \pi$$

$$\theta(-\pi) = c_1 \cos \sqrt{\lambda} \pi - c_2 \sin \sqrt{\lambda} \pi$$

$$2c_2 \sin \sqrt{\lambda} \pi = 0$$

$$\sin \sqrt{\lambda} \pi = 0 \Rightarrow \sqrt{\lambda} \pi = n\pi$$

$$\lambda = n^2 \quad (n > 0)$$

$$\lambda = 0 \Rightarrow \theta = c_1 \cdot 1 + c_2 \cdot 0 \Rightarrow \theta = c_1$$

$$\left(\int_{-\pi}^{\pi} \frac{1 + \cos 2n\theta}{2} d\theta \right)^{1/2} = \left(\frac{\theta}{2} \Big|_{-\pi}^{\pi} + \frac{1}{4n} \sin 2n\theta \Big|_{-\pi}^{\pi} \right)^{1/2}$$

$$= \left\{ \left[\frac{\pi}{2} - \left(-\frac{\pi}{2} \right) \right] + \frac{1}{4n} [\sin 2n\pi + \sin 2n\pi] \right\}^{1/2}$$

$$= \sqrt{\pi}$$

$$\theta(-\pi) = \theta(\pi), \quad \theta'(-\pi) = \theta'(\pi)$$

$$\theta = c_1 \cos n\theta + c_2 \sin n\theta \quad n > 1$$

Ortonormalleştirilmesi:

$$\left(\int_{-\pi}^{\pi} (\cos n\theta)^2 d\theta \right)^{1/2} = \frac{1}{\sqrt{\pi}}$$

$$\left(\int_{-\pi}^{\pi} (\sin n\theta)^2 d\theta \right)^{1/2} = \frac{1}{\sqrt{\pi}}$$

$$2c_1 \sqrt{\lambda} \sin \sqrt{\lambda} \pi = 0$$

$$\downarrow \lambda = n^2$$

$$\lambda = 0 \Rightarrow \theta = c_1 \rightarrow \left(\int_{-\pi}^{\pi} 1 d\theta \right)^{1/2} = \left(\theta \Big|_{-\pi}^{\pi} \right)^{1/2} = \frac{(2\pi)^{1/2}}{\sqrt{2\pi}}$$

$$g = R\theta$$

$$= \frac{A_0}{\sqrt{2\pi}} + \sum_{n=1}^{\infty} r^n \left(A_n \frac{\cos n\theta}{\sqrt{\pi}} + B_n \frac{\sin n\theta}{\sqrt{\pi}} \right)$$

$$g(r_0, \theta; R, \Theta) = -\frac{1}{4\pi} \ln [r_0^2 + R^2 - 2r_0 R \cos(\theta - \Theta)]$$

$$\left(\frac{A_0}{\sqrt{2\pi}} \right) + \sum_{n=1}^{\infty} \left(A_n r_0^n \frac{\cos n\theta}{\sqrt{\pi}} + B_n r_0^n \frac{\sin n\theta}{\sqrt{\pi}} \right)$$

Not:

$$-\frac{1}{2} \ln(1 + \alpha^2 - 2\alpha \cos \phi) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\alpha^n \cos n\phi}{n}$$

$$(|\alpha| < 1)$$

$$\ln(1 + \alpha^2 - 2\alpha \cos \phi) = \ln \left(1 + \alpha^2 - 2\alpha \frac{e^{i\phi} + e^{-i\phi}}{2} \right)$$

$$= \ln(1 + \alpha^2 - \alpha(e^{i\phi} + e^{-i\phi}))$$

$$(1 - \alpha e^{i\phi})(1 - \alpha e^{-i\phi})$$

$$= \ln(1 - \alpha e^{i\phi}) + \ln(1 - \alpha e^{-i\phi})$$

$$R = \begin{cases} A + B \ln r & n=0 \\ A r^n + B r^{-n} & n \geq 1 \end{cases}$$

$$\theta = \frac{C_1}{\sqrt{2\pi}} + \sum_{n=1}^{\infty} C_1 \frac{\cos n\theta}{\sqrt{\pi}} + C_2 \frac{\sin n\theta}{\sqrt{\pi}}$$

$$\frac{AC_1}{\sqrt{2\pi}} + \frac{BC_1 \ln r}{\sqrt{2\pi}} = \frac{C_1 (A + B \ln r)}{\sqrt{2\pi}} \rightarrow A_0 \quad n=0$$

$$(A r^n + B r^{-n}) \left(\sum_{n=1}^{\infty} C_1 \frac{\cos n\theta}{\sqrt{\pi}} + C_2 \frac{\sin n\theta}{\sqrt{\pi}} \right)$$

$$= -\frac{1}{4\pi} \ln [r_0^2 + R^2 - 2r_0 R \cos(\theta - \Theta)]$$

$$= -\frac{1}{4\pi} \ln \left[r_0^2 \left(1 + \left(\frac{R}{r_0} \right)^2 - 2 \left(\frac{R}{r_0} \right) \cos(\theta - \Theta) \right) \right]$$

$$= -\frac{1}{4\pi} \ln r_0^2 - \frac{1}{4\pi} \ln \left[1 + \left(\frac{R}{r_0} \right)^2 - 2 \left(\frac{R}{r_0} \right) \cos(\theta - \Theta) \right]$$

$$= -\frac{1}{4\pi} \ln r_0^2 + \frac{1}{2\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\left(\frac{R}{r_0} \right)^n \cos n(\theta - \Theta)}{n}$$

$$= -\frac{1}{4\pi} \ln r_0^2 + \frac{1}{2\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\left(\frac{R}{r_0} \right)^n}{n} (\cos n\theta \cos n\Theta + \sin n\theta \sin n\Theta)$$

$$= -\frac{1}{4\pi} \ln r_0^2 + \frac{1}{2\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{\left(\frac{R}{r_0} \right)^n}{n} \cos n\Theta \cdot \cos n\theta + \frac{\left(\frac{R}{r_0} \right)^n}{n} \sin n\Theta \cdot \sin n\theta \right]$$

$$\frac{A_0}{\sqrt{2\pi}} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(A_n r_0^n \frac{\cos n\theta}{\sqrt{\pi}} + B_n r_0^n \frac{\sin n\theta}{\sqrt{\pi}} \right) = -\frac{1}{4\pi} \ln r_0^2 + \frac{1}{2\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \left[\left(\frac{R}{r_0} \right)^n \cos n\theta \cdot \cos n\theta + \left(\frac{R}{r_0} \right)^n \sin n\theta \cdot \sin n\theta \right]$$

$$\Rightarrow \frac{A_0}{\sqrt{2\pi}} = -\frac{1}{4\pi} \ln r_0^2, \quad \frac{A_n r_0^n}{\sqrt{\pi}} = \frac{\left(\frac{R}{r_0} \right)^n \cos n\theta}{2\pi n}, \quad \frac{B_n r_0^n}{\sqrt{\pi}} = \frac{\left(\frac{R}{r_0} \right)^n \sin n\theta}{2\pi n}$$

$$A_0 = \frac{-1}{2\sqrt{2\pi}} \ln r_0^2 = \frac{-1}{\sqrt{2\pi}} \ln r_0, \quad A_n = \frac{\left(\frac{R}{r_0} \right)^n \cos n\theta}{2\sqrt{\pi} r_0^n n}, \quad B_n = \frac{\left(\frac{R}{r_0} \right)^n \sin n\theta}{2\sqrt{\pi} r_0^n n}$$

$$g(r, \theta; R, \theta) = \frac{-1}{2\pi} \ln r_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{\left(\frac{R}{r_0} \right)^n \cos n\theta}{2\sqrt{\pi} r_0^n n} \cdot \frac{r^n}{\sqrt{\pi}} \cos n\theta + \frac{\left(\frac{R}{r_0} \right)^n \sin n\theta}{2\sqrt{\pi} r_0^n n} \cdot \frac{r^n}{\sqrt{\pi}} \sin n\theta \right]$$

$$= \frac{-1}{2\pi} \ln r_0 + \frac{1}{2\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\left(\frac{rR}{r_0^2} \right)^n}{n} \left[\cos n(\theta - \theta) \right]$$

$$G = U + g$$

Bu yöntem bir boyutlu problemler için Green fonksiyonları ile çok boyutlu problemler için olan Green fonksiyonları arasındaki belirgin bir farklılığı işaret eder. Bir boyutlu sınır değer problemi için Green fonksiyonu 1. mertebe türevin sıçramalı süreksizliğe sahip olduğu x noktasında sürekli olan bir fonksiyondur. Çok boyutlu sınır değer problemleri için Green fonksiyonu ise bir boş-alan Green fonksiyonu olan u fonksiyonu ile düzensiz kısmı gösteren g fonksiyonunun toplamı şeklinde ifade edilebilir. Boş-alan Green fonksiyonu daima kaynak noktasında tekli'dir. Bu nedenle, çok değışkenli Green fonksiyonları kaynak noktalarında daima süreksizdirler.

4) Görüntü Yöntemi

Bu yöntem, bölme yöntemindeki g fonksiyonunu elde etmede basit bir fiziksel mantık ve iyi bir varsayımdır. Sadece basit geometrik Laplace denkleminde çalışır.

A bölgesi için Green fonksiyonu $u+g$ şeklinde ifade edildiğinde u , boş alan Green fonksiyonu A bölgesinin içindeki bir birim nokta kaynağından dolayı potansiyel olarak kabul edilebilir. Bu kaynak kendi başına $\partial(A)$ sınırı üzerinde sıfır oluşturan bir potansiyele neden olur. İhtiyaç olan şey, u nun $\partial(A)$ üzerindeki etkisini iptal edecek olan g potansiyelinin A bölgesinin dışındaki bir kaynak dağılımıdır.

Bu dağılımın bölgenin dışında olması bölgenin içinde $G=u+g$ 'nin $\nabla^2 G = f$ denklemini sağlanmasını garanti eder.

ör/ r_0 yarıçaplı kürede üç boyutlu Dirichlet problemi ile ilişkili Green fonksiyonunu bulunuz.

$G(r, \theta, \varphi; R, \Theta, \Phi)$ green fonk.

$$\left\{ \begin{array}{l} (a) \nabla^2 G = \frac{\delta(r-R) \delta(\theta-\Theta) \delta(\varphi-\Phi)}{r^2 \sin \varphi} \end{array} \right.$$

$$0 < r < r_0, -\pi < \theta \leq \pi, 0 < \varphi < \pi$$

$$\left\{ \begin{array}{l} (b) G(r_0, \theta, \varphi; R, \Theta, \Phi) = 0 \end{array} \right.$$

$$-\pi < \theta \leq \pi, 0 < \varphi < \pi$$

problemini sağlar.

$$u(x, y, z; X, Y, Z) = \frac{-1}{4\pi [(x-X)^2 + (y-Y)^2 + (z-Z)^2]^{1/2}}$$

$$u(r, \theta, \varphi; R, \Theta, \Phi) = \frac{-1}{4\pi [r^2 + R^2 - 2Rr [\cos \varphi \cos \Phi + \sin \varphi \sin \Phi \cos(\theta - \Theta)]]^{1/2}}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} x = r \sin \varphi \cos \theta \\ y = r \sin \varphi \sin \theta \\ z = r \cos \varphi \\ J = r^2 \sin \varphi \end{array} \right.$$

küresel koordinatlar.

$$\begin{aligned} X &= R \sin \Phi \cos \Theta \\ Y &= R \sin \Phi \sin \Theta \\ Z &= R \cos \Phi \end{aligned}$$

Bu yöntemin önerdiği şey kürenin dışında bir kaynak dağılımı bulmaktır ki bunun için g potansiyeli $G = u + g$ 'nin $r = r_0$ üzerinde yok olacağı şeklindedir.

Öncelikle bir (R^*, Θ^*, Φ^*) ($R^* > r_0$) noktasında q büyüklüğünün tek bir kaynak olarak yeterli olup olmayacağını göz önüne alabiliriz. Simetri böyle bir kaynağın, orijinden geçen doğru etrafında simetrik olan $r = r_0$ üzerindeki u 'yı ortadan kaldırabileceğini; ve ancak (R^*, Θ^*, Φ^*)

noktasının doğru üzerinde olması durumunda (R, θ, ϕ) 'yi ortadan kaldıracabileceğini ileri sürer.

Bu nedenle $\theta = \theta^*$, $\phi = \phi^*$ olduğunu varsayıyoruz. Bu durumda $r=r_0$ 'da $G=U+g$ 'nin sıfır olması koşulu

$$0 = \frac{-1}{4\pi [r_0^2 + R^2 - 2Rr_0 (\cos\psi \cos\phi + \sin\psi \sin\phi \cos(\theta - \theta))]^{1/2}} + \frac{-q}{4\pi [r_0^2 + R^{*2} - 2R^*r_0 (\cos\psi \cos\phi + \sin\psi \sin\phi \cos(\theta - \theta))]^{1/2}}$$

$$\Rightarrow [r_0^2 + R^{*2} - 2R^*r_0 (\cos\psi \cos\phi + \sin\psi \sin\phi \cos(\theta - \theta))]^{1/2} = -q [r_0^2 + R^2 - 2Rr_0 (\cos\psi \cos\phi + \sin\psi \sin\phi \cos(\theta - \theta))]^{1/2}$$

Bu eşitliğin tüm ψ ve θ 'lar için sağlanması gerektiğinden $\psi=0$ ve $\psi=\pi$ alırız.

$$-q \cdot [r_0^2 + R^2 - 2Rr_0 \cos\phi]^{1/2} = [r_0^2 + R^{*2} - 2R^*r_0 \cos\phi]^{1/2}$$

$$-q [r_0^2 + R^2 + 2Rr_0 \cos\phi]^{1/2} = [r_0^2 + R^{*2} + 2R^*r_0 \cos\phi]^{1/2}$$

$$\Rightarrow R^* = \frac{r_0^2}{R}, \quad q = \frac{-r_0}{R}$$

$$\Rightarrow G(r, \theta, \psi; R, \theta, \psi) = \frac{-1}{4\pi [r_0^2 + R^2 - 2Rr_0 (\cos\psi \cos\phi + \sin\psi \sin\phi \cos(\theta - \theta))]^{1/2}} + \frac{r_0}{4\pi R [r_0^2 + (\frac{r_0^2}{R})^2 - 2(\frac{r_0^2}{R})r_0 (\cos\psi \cos\phi + \sin\psi \sin\phi \cos(\theta - \theta))]^{1/2}}$$

