

Matematikte Bunalımlar



MATEMATİKTE BUNALIMLAR



❧ Bilimde olduğu gibi matematikte de kesinlik arayışı dogmatizm ya da beklenmedik değişiklik ya da gelişmeler karşısında bunalımlara yol açar.





- ❧ Tarih boyunca matematiğin geçirdiği bunalımlar şu şekilde özetlenebilir:
- ❧ 1)Rasyonel olmayan sayıların yol açtığı bunalım.
- ❧ 2)Başlangıçta sağlam bir temele oturtulamayan ve kavramsal belirsizlik içinde kalan diferansiyel ve integral hesabın yol açtığı bunalım.



- ❧ 3)Öklid'in 5. postülatına ilişkin kuşku ve doyumsuzluktan kaynaklanan , Öklid dışı geometrilerin ortaya çıkması ile büyüyen bunalım.
- ❧ 4)Kümeler kuramında başgösteren paradoksların yarattığı daha sonra Gödel teoremleriyle yeni bir boyut kazanan bunalım.





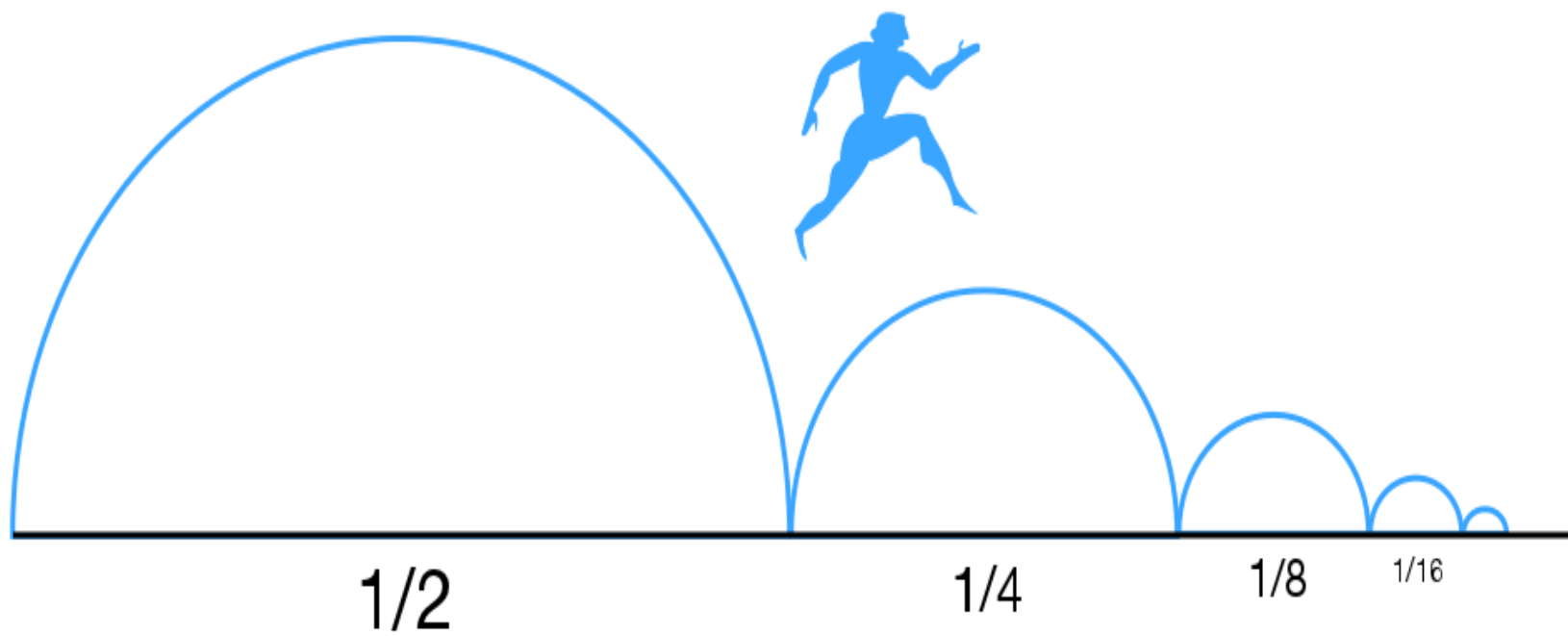


- ❧ Birinci bunalım Pisagor döneminde rasyonel olmayan sayıların varlığından duyulan huzursuzluk ile başlamıştı.
- ❧ Pisagorculara göre evrenin yapı taşları sayılardı. Evren kusursuz olduğu için sayılar da bu durumu yansıtıyordu.
- ❧ Evrendeki bütün nicelikler iki tam sayının oranı ile hesaplanabiliyordu.

- ❧ Bununla birlikte bir karenin köşegeninin uzunluğunu rasyonel sayılarla ifade edebilme olanağı bulunmamaktadır. 
- ❧ Bilindiği kadarı ile matematikte bilinen en eski bunalımlardan biri budur.



- ❧ Bir diğeri de Zenon Paradoksu (Çelmecesi) olarak verilebilir.
- ❧ Bu paradoksa göre A noktasından B noktasına ulaşmaya çalışan bir koşucu öncelikle gideceği yolun yarısını koşacak, daha sonra kalan yolun yarısını koşacak,..., bu şekilde varacağı hedefe asla ulaşamayacaktır.
- ❧ Zenon aritmetiksel olarak ifade edilecek olursa
- ❧ $\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \dots < 1$
- ❧ tezini savunmaktadır.





❧ Bu tezin bugün yanlış olduğu ve bu toplamın 1 olduğu geometrik seri formülünden yola çıkılarak ispatlanmış durumdadır.



❧ İkinci bunalım sonsuz küçüklükler hesabından kaynaklanmıştır.



❧ Newton ile Leibniz birbirlerinden bağımsız olarak Calculus hesabını geliştirdiler.

❧ 17. Yüzyılda ispat ölçütlerinin çoğunlukla göz ardı edildiğini görüyoruz. Matematik, mantıktan çok sezgi, imge ve deneyime bağlı bir çalışma görünümünü almıştı.



Leibniz, Bernoulli ve Euler gibi ünlü matematikçilerin sonsuz küçüklükler, ayrışık (divergent) diziler toplamı gibi konularda yanlışlığı bugün bilinen düşünceler ileri sürmekten geri kalmadıklarını biliyoruz.

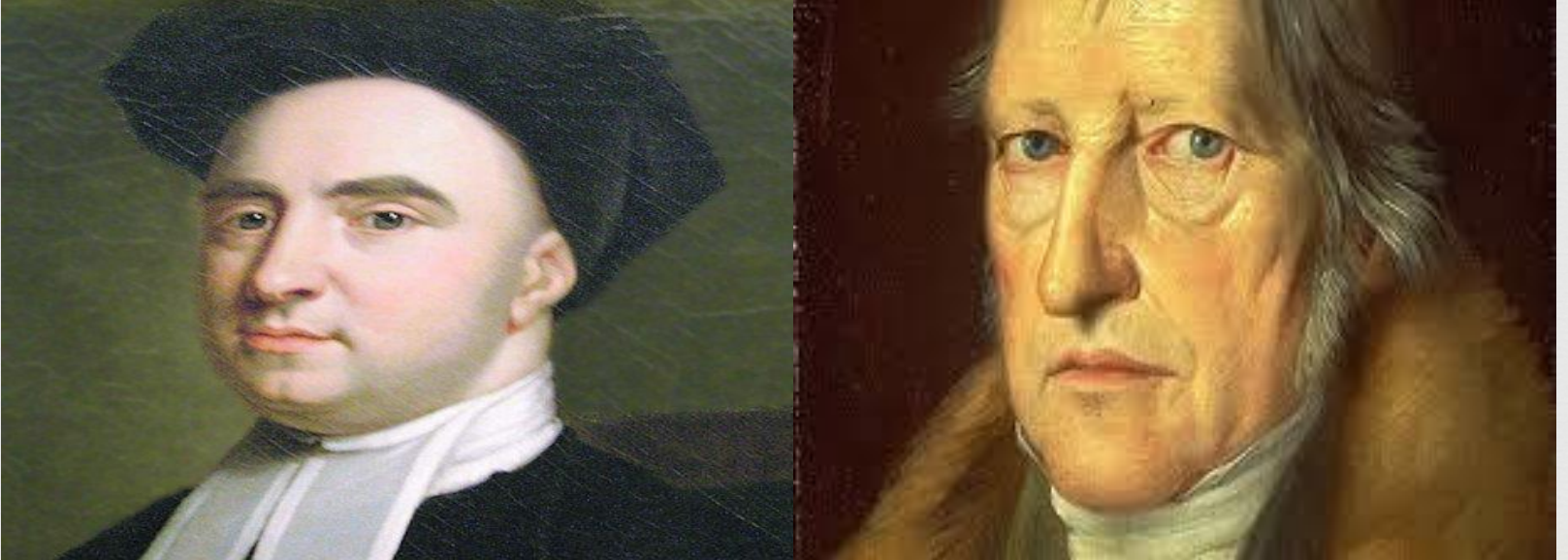


"To those who ask what the infinitely small quantity in mathematics is, we answer that it is actually zero. Hence there are not so many mysteries hidden in this concept as they are usually believed to be."

Leonhard Euler



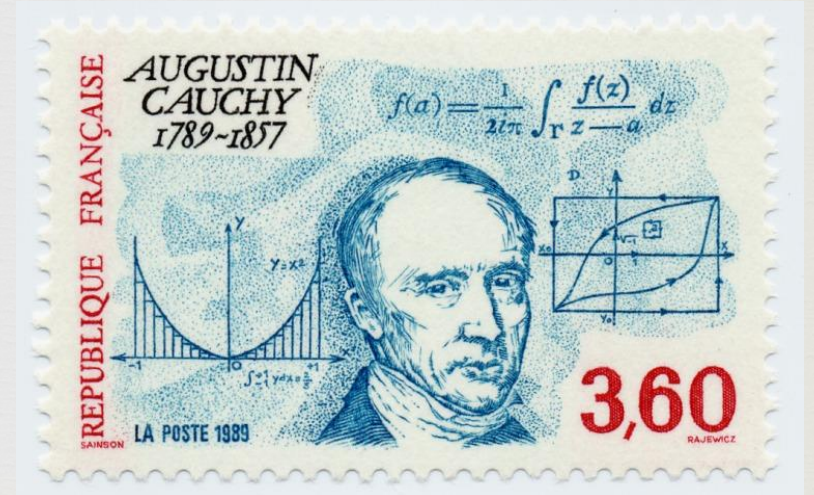
İlk eleştiriler Berkeley, ardından Hegel gibi idealist filozoflardan gelir. Özellikle diferansiyel kesirlerle, sonsuz küçüklükleri içeren işlemler kuşkuyla karşılanıyordu.





☞ Gauss' un çalışmasının önemli bir bölümü matematiği sağlam bir temele oturtma amacına yöneltmişti.

☞ Analizi gerçel sayılar alanından karmaşık sayılar alanına genişletme işini ise büyük ölçüde Cauchy'ye borçluyuz. Yine limit, süreklilik gibi kavramlar ilk kez onun elinde açık ve belirgin anlamlarını kazanmıştır.





Cauchy'nin limitler teorisi daha sonra Weierstrass'ın çalışmasıyla birleşerek sonsuz küçüklükler kavramını gereksiz kılar.



Ludwig Boltzmann

A mathematician will recognise Cauchy, Gauss, Jacobi or Helmholtz after reading a few pages, just as musicians recognise, from the first few bars, Mozart, Beethoven or Schubert.

❧ Daha önceden parçanın bütünden küçük olması gerektiği varsayımının yarattığı tartışmadan söz edilmişti.

❧ Örneğin çift tam sayılar kümesi, tüm tam sayılar kümesinin bir alt kümesidir. Bunula birlikte bu iki küme sonsuza dek uzatıldığında her çift tamsayıya karşılık bir tamsayı karşılık gelecektir:

❧ 2,4,6,8,10,12,...

❧ 1,2,3,4,5,6,...

❧ Bu durumda parçanın eleman sayısı ile bütünün eleman sayısı birbirine eşit olmakta ve bu durum bir çelişki yaratmaktadır.

❧ Cantor geliştirdiği sonsuz sayılar kuramında farklı büyüklükte sonsuz dizi ya da kümeler olduğunu göstermiştir.





❧ Üçüncü bunalım Öklid dışı geometrilerden kaynaklanmıştır.

❧ Kant'a göre bir tek geometriye olanak vardı. O da Öklid geometrisi idi.



❧ Daha çok gerçek sayılara ilişkin teorik çalışmasıyla tanınan Dedekind, diferansiyel ve integral hesapları aritmetik bir temele oturtmaya yöneldi.

❧ Peano, matematikte sağduyu ile sezgiye gereğinden fazla yer verilmesine karşı idi.



❧ Soyut matematik kendi içinde yeterli, formel ya da mantıksal bir sistem olmalıydı.



No number before zero. The numbers may go on forever, but like the cosmos, they have a beginning.

— *Giuseppe Peano* —

AZ QUOTES



Yirminci yüzyılın başında artık matematiğe bir yığın formül, teknik bilgi ve teorem ispatı içeren soyut bir çalışma olmanın ötesinde bir düşünme yöntemi gözüyle bakılmaya başlanır.



❧ Matematiğin temellerini yoklama ve kurmaya yönelik girişimler 1890'lı yıllarda Frege, Peano, Poincaré, Russell, Hilbert vb. düşünürlerin çalışmaları ile ortaya çıkar.

❧ Tartışmalar çok geçmeden “mantıkçılık”, “sezgicilik” ve “formalizm” adıyla bilinen üç öğreti çevresinde toplanır.



PARADOKSLAR



❧ Cantor Paradoksu(19. Yüzyıl sonu):Tüm kümelerin kümesini düşünelim ve buna T diyelim. T 'nin alt kümelerini içine alan kümeye A dersek, A 'nın kardinal sayısının T 'ninkinden büyük olduğunu biliyoruz.

❧ Oysa T , tanım gereği, tüm kümeleri kapsamaktadır. A 'nın kardinal sayısının daha büyük olması, tüm kümeleri kapsayan kümeden daha büyük bir kümenin olduğunu gösterir ki bu açık bir çelişki demektir.

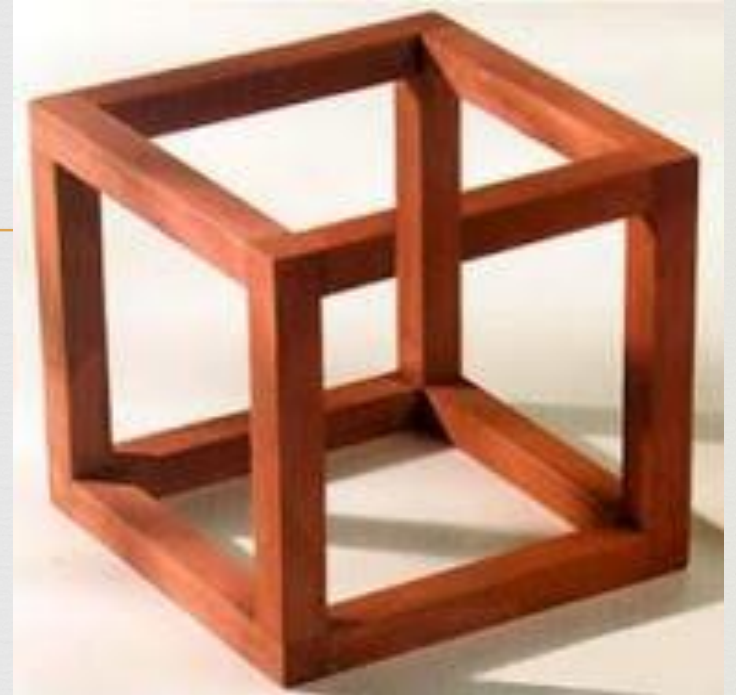


❧ Russell Paradoksu: Bertrand Russell `ın paradoksu küme üyeliğine ilişkindir. Bir küme ya kendisinin bir üyesidir, ya da değildir. Kendisinin bir üyesi olmayan kümelere "düzenli" diyelim. Örneğin, "İnsanların kümesi"nin kendisi, bir insan olmadığı için, kendisinin bir üyesi değildir.



❧ Kendisini içeren kümeleri "düzensiz" olarak adlandıralım. Örneğin "beş elemandan fazla elemanı olan kümelerin kümesi" düzenli midir yoksa düzensiz midir? Eğer düzenliyse; kendinin bir üyesi olamaz. Tüm düzenli kümeleri içerdiğine göre ve kendisinin de düzenli olduğunu kabul ettiğimiz için, kendisini içermelidir.

❧ Ama eğer kendisini
içeriyorsa, tanıma göre
düzensizdir. Düzenli ❧
olduğunu varsayıp,
düzensiz olduğu çelişkili
sonucuna vardık. Diğer
taraftan, eğer düzensiz ise,
kendisini elemanı olarak
içerir. Ama elemanlarının
sadece düzenli kümeler
olduğunu biliyoruz. Demek
ki düzensiz ise düzenli
olduğu sonucu ortaya
çıkıyor.

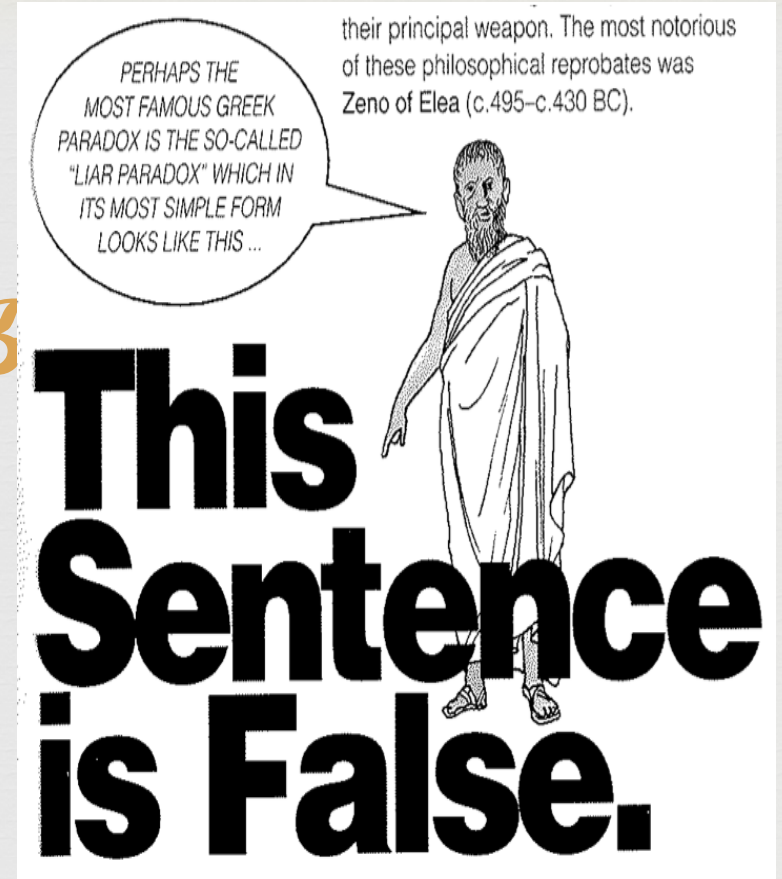


Benzer başka örnekler verilebilir. Örneğin kendisi Giritli olan Epimenides'in "tüm Giritliler yalancıdır" demesi gibi.



❧ *Epimenides'den iki yüzyıl sonra gelen Eubulides'in önermesi şöyle idi: "Bu söylediğim yanlıştır".

❧ Ya da bir kağıdın bir yüzüne "bu kağıdın arka yüzündeki önerme yanlıştır", diğer yüzüne de "bu kağıdın arka yüzündeki önerme doğrudur" yazılsa paradoksal bir durum ortaya çıkmaktadır.





- ❧ Paradokslardan kurtulmak için kümeler kuramının hiç kuşkuya yer vermeyecek şekilde aksiyomatik bir sistem olarak kurulması önerilmiştir.
- ❧ Paradokslar yol açanın tanımlardaki döngüsellikten ileri geldiği savunulmuştur (örneğin Poincaré).

- ❧ Sıkıntının kökenini mantıkta arayanlar da çıkmıştır. İki değerli standart mantık yerine üç değerli mantığı koyarak , çelişkiye yol açıcı “kendi kendine göndermeli” önermelerin doğruluk değerlerini belirsiz saymak yoluna da gidilebilir.
- ❧ Ancak bu çıkış yolu da yeterince ilgi çekmemiştir.
- ❧ Paradokslar sorununa henüz üzerinde herkesin birleştiği bir çözüm getirilememiştir.

