10.3.2021

1. Elastiklik

Tüm yapı malzemeleri belli bir dereceye kadar elastiklik özelliyine sahipler, yani, eğer yapıda deformasiya yapan dış kuvvetlerin ~~bu~~ değeri belirli bir limiti aşmırsa, onda bu kuvvetler qaldırıldıkdan sonra bu deformasiyalar yok oluyor. Deformasiya denildiğinde ise cismin hacım və formasının dış kuvvetlərin etkisinden değişmesi kast ediliyor.

Bu derste ~~tüm ye~~ ele alacağımız tüm konularda cisimlerin mükemmel elastik olduğunu, yani cisme etki eden kuvvetler kaldırıldıktan sonra cisim tamamile eski (ve ya başlanğıc) hacmine ve formasına döndüyünü varsayacağız ~~varsayacağız~~.

Genellikle, elastisite teorisinde cisimleri oluşturan malzemelerin molekulyar yapısına bakılmaz ve farz edilir ki, elastik cismin malzemesi homojendir və cismin hacminin ~~kapsadığı~~ uzay kısmına sürekli olarak yayılmıştır. Malzemenin (ve ya ~~mühitin~~ ortamın) homojen olması onun her bir noktasındakı mekanik və ya fiziksel özelliklerini belirten sabitlerin aynı olması anlamına gelir.

İleride ele alacağımız konuların anlaşılmasını kolaylaştırmak için, cismin malzemesinin izotrop olduğunu da, yani cismin mekanik özelliklerinin yönden bağımsız olduğunu da varsayacağız.

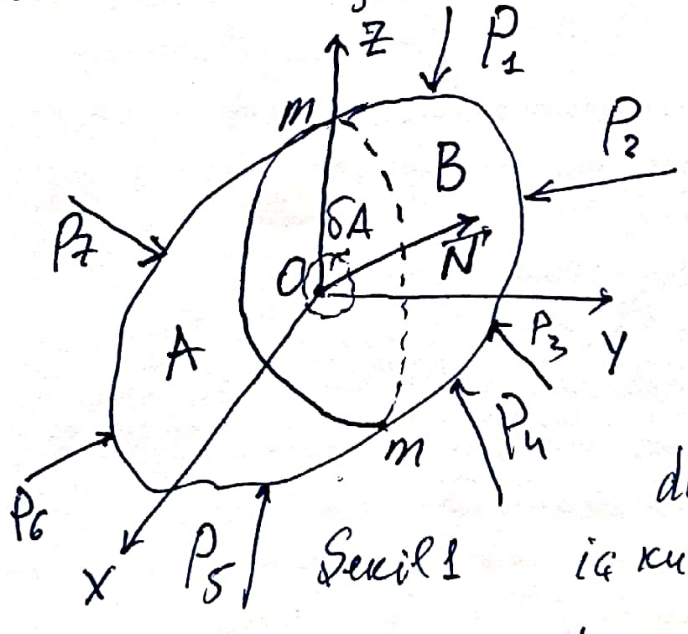
Belirtelim ki, mikroskopik boyutlarda yukarda söylenen homojenlik və izotropluk varsayımları hiç bir malzeme için gerçekleşmez. Mesela, çelik gibi çok yaygın kullanılan bir malzeme mikroskopik ~~mikroskop~~

boyutlarda homojenlik ve izotropluktan çok uzaktır. Yalnız, makro-ölçeklerde çelik için elastisi teorisi çerçevesinde elde edilen sonuçlar (yukarıdaki varsayımlar çerçevesinde elde edilen teorik sonuçlar) yüksek hassasiyetle deney sonuçları ile örtüşür.

Metal malzemelerin teknolojik işlemleri ~~zamanı~~ onda olan kristaller belirli bir yönde ~~düzen~~ sıralana bilirler. Bu durumlarda malzemeleri anizotropik olarak ele almak lazım gelir.

2. "Gerilme" kavramı

Farzedelim ki Şekil 1 dış kuvvetlerin etkisinde dengede olan bir cismi gösteriyor. Bu cisme $P_1, P_2, \ldots, P_7$ dış kuvvetleri etki gösteriyor. Bu kuvvetler cismin parçacıklarının bir-birine nazaran konumuna değiştirme eylemi gösterir ve cismin malzemesi bu eyleme direnç gösterir. Bu direnç iç kuvvetleri yaratır.



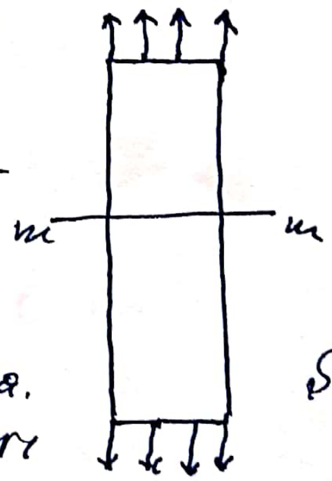
Şekil 1

Bu iç kuvvetlerinin büyüklüğünü belirtmek için, yani, iç kuvvetlerini tanımlamak için ~~cismin~~ dahilinden bir O noktası seçelim ve bu noktaya Oxyz Cartezian koordinat sistemi birleştirelim. Daha sonra, bu cismi hayalen O noktasından geçen ve normali $\vec{N}$ olan bir düzlem mm ile ~~ve~~ Şekil 1 de A ve B olarak işaret edilen iki hisseye bölelim.

(Bu varsayıma kesit prensipi denir)

Farz edelim ki, A ve B hisselerini bir-birinden ayırdık, onda A hissesine (veya B hissesine) B-nin (A-nın) tesirini mm dizleminde sürekli olarak yayılan iç kuvvetlerle yerdeyiştirebiliriz. Söz konusu olan "iç kuvvetlerin" değeri (veya büyüklüğü) onların ~~intensiv~~ yoğunluğu ile, yani üzerinde etki ettikleri düzlemin birim alanına düşen miktarı ile belirlenir. İç kuvvetlerin bu yoğunluğuna "Gerilme" denir.

Yukarıda söylenleri basit bir örnek misalinde de açıklamaya çalışalım. Farz edelim ki, prizmatik bir çubuk Şekil 2-de gösterilen uçlarından homojen (veya eşit) yayılı bir yükle çekilir.



Şekil 2

Onda bu çubuğun mm kesitinde de iç kuvvetler homojen yayılı olacak. Genel olarak, kirişin uçlarında etki eden kuvvetler eşit yayılı olmazsa ve bu kuvvetlerin total değeri her iki uçda P ise, onda mm kesitindeki iç kuvvetlerin yoğunluğunu (yani gerilmeni) P-ni mm kesitinin alanına (bu alanı A ile işaret edelim) bölerek ~~ol~~ buluruz. Yani, eğer gerilmeni σ ile işaret edersek, yukarıda söylenlere göre

$$\sigma = \frac{P}{A} \quad \text{olur.} \qquad (1)$$

Ele aldığımız basit örnekde gerilme seçdiğimiz mm kesiti (düzlemi) üzerinde eşit yayıldığından onun tanımı (1) formülü ile verilebilir

Yalnız genel durumda seçilen kesitlerde gerilmeler eşit yayılmaz. Mesela, Şekil 1-de gösterilen mm ~~kesitin~~ düzlem kesiti üzerindeki O noktası civarında ~~..~~ O noktasını da içeren bir δA ~~alanı~~ küçük alanına etki eden ~~toplam~~ iç kuvvetlerin toplamını $\delta \vec{P}$ ile işaret edersek, onda O noktasından keçen ve normalı $\vec{N}$ olan kesitin O noktası civarındaki ortalama gerilmeni

$$\vec{\sigma}_{\vec{N}.ort} = \frac{\delta \vec{P}}{\delta A} \qquad (2)$$

ile tanımlaya biliriz. Eğer (2)-de $\delta A \to 0$ olduğunda limite geçersek, O noktasındaki gerilmeni buluruz.

$$\vec{\sigma}_{\vec{N}} = \lim_{\delta A \to 0} \frac{\delta \vec{P}}{\delta A} \qquad (3)$$

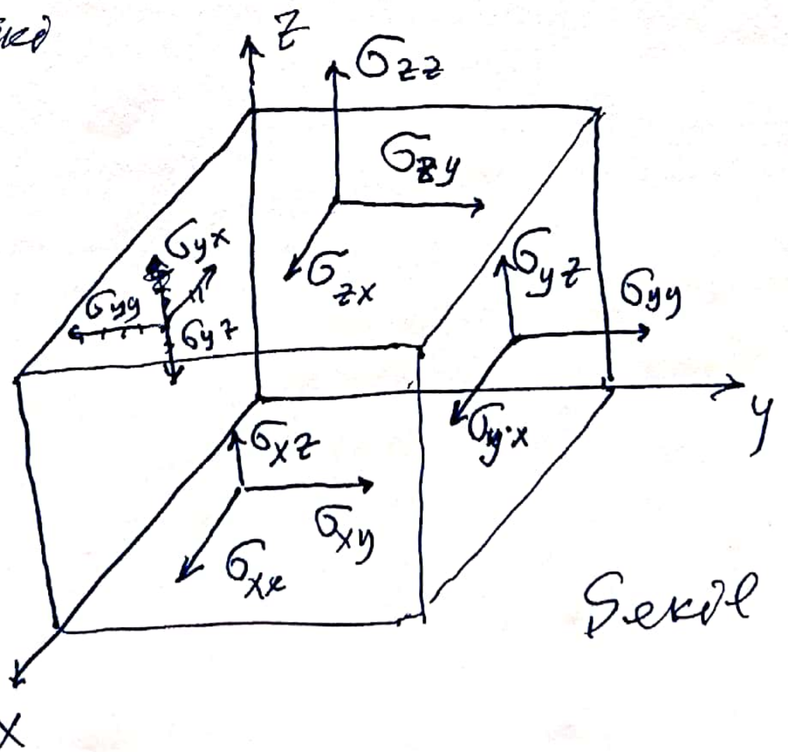
$\vec{\sigma}_{\vec{N}}$ 'ye normalı $\vec{N}$ olan və O noktasından geçen düzlem kesitin O noktasındaki gerilme vektoru denir. Bu vektoru $\vec{N}$ ve $\vec{N}$-ye ~~dik~~ dik olan ~~qalan~~ ve mm düzlemi üzerinde olan vektorlar yönünde bileşenlere ayıra bilerik. Bu bileşenlerden $\vec{N}$ yönünde olan bileşenine normal gerilme, diğer iki yönde olanlarına ise kayma gerilmeleri denir.

3. Kuvvetler ve gerilmelerin işaretlemeleri

Burda kuvvetler denildiğinde cisme etki eden dış kuvvetler kast edilir ve bunlar ~~iki tür olur.~~ ~~Birinci türe~~ yüzesel ve hacimsel olarak iki türe ayrılır. Yüzeysel kuvvetler cismin V hacmini sınırlayan S yüzeyine direkt olarak etki eden kuvvetlere denir. Cismi her bir küçük ΔV hacmine etki eden kuvvetlere ise hacimsel kuvvetler denir. Hacimsel kuvvetlere örnek olarak ağırlık kuvvetini ~~örnek~~ gösterebiliriz. Yüzeysel kuvvetlere örnek olarak cismin S yüzeyinde basınç yaratan keyfi kuvveti örnek gösterebiliriz.

Genellikle, çağdaş literatürde hacimsel kuvvetler $\vec{F}$ ile yüzeysel kuvvetler ise $\vec{t}_n$ ile işaret edilirler. Farklı işaretlemeler de kullanıla bilir ve her kullanılan işaretlemenin de anlamı ayrıca belirtilir.

Gerilmeler için ise σ işaretlemesinden kullanılır. ~~Bu işaretleme~~ Bu ders kapsamında σ işaretlemesi iki alt indeksle kullanılacak. Bu işaretlemeleri bir kadar açıklamak için Şekil 3-de cismin O noktasına birleştirilmiş Oxyz koordinat sisteminde seçilen küpün kenarları üzerinde etki eden normal ve kayma gerilmeleri gösterilmiştir. ~~Şekil~~



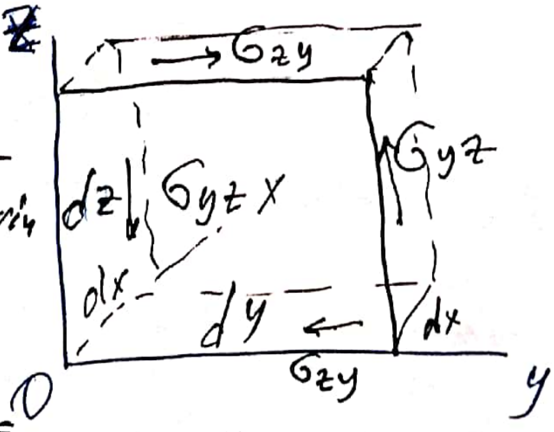
Şekil 3

Şekil 3'deki işaretlemelerde birinci indeks gerilmenin etki etdiyi düzlemin normalinin yönünü, ikinci indeks ise gerilmenin etkid etdiyi yönü gösterir. Mesela, σ_{yy} dış normali Oy ekseni yönünde olan kesitde Oy ekseni yönünde etki eden gerilmeni, σ_{yx} ve σ_{yz} ler ise bu kesitde Ox ve Oz eksenleri yönünde etki eden kayma gerilmelerini gösterir. Bundan başka, Şekil 3'de ~~gerilmelerin et~~ gösterilen etki yönleri pozitive yönler kabul edilir.

4. Gerilme bileşenleri

Şekil 3'de gösterilenlere göre gerilmenin σ_{xx}, σ_{yy}, σ_{zz}, σ_{xy}, σ_{yx}, σ_{xz}, σ_{zx}, σ_{yz} ve σ_{zy} olarak 9 bileşeni vardır. Bunlardan σ_{xx}, σ_{yy} ve σ_{zz} normal gerilmeler, yerde qalanlar ise kayma gerilmeleridir.

Şimdi ~~Ox e~~ Oz ve Oy eksenlerine dik olan kesiti ~~bir kesit ele alalım~~ kesitlerde etki eden kayma gerilmelerini (Şekil 4-de gösterilen) ele alalım. Bu gerilmelerin oluşturduğu $\sigma_{zy}dxdy$ ve $\sigma_{yz}dxdz$ kuvvetlerinin Ox eksenine göre oluşturduğu momentleri (denge gereyi) bir-birine eşit olmalıdır, yani



Şekil 4

$$\sigma_{zy}dxdydz = \sigma_{yz}dxdzdy \qquad (4)$$

(4)-de $\sigma_{zy}=\sigma_{yz}$ olması görülüyor.

aynı qaide ile $\sigma_{yx} = \sigma_{xy}$ ve $\sigma_{xz} = \sigma_{zx}$ olduğunu elde ediyoruz. Belelikle gerilmelerin bir-birinden bağımsız 6 bileşeni

$\sigma_{xx}, \sigma_{yy}, \sigma_{zz}, \sigma_{xz}, \sigma_{xy}$ ve σ_{yz}

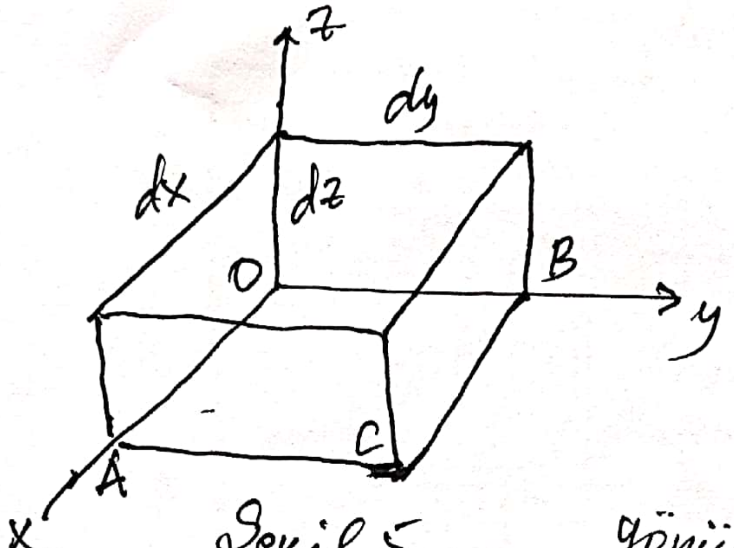
vardır. Bu bileşenlere gerilmenin ~~bir noktada~~ seçilmiş Oxyz koordinat sisteminde bir noktedeki bileşenleri denir. Eğer bu bileşenleri bir matris gibi yazarsak, yani

$$\begin{pmatrix} \sigma_{xx} & \sigma_{xy} & \sigma_{xz} \\ \sigma_{xy} & \sigma_{yy} & \sigma_{yz} \\ \sigma_{xz} & \sigma_{yz} & \sigma_{zz} \end{pmatrix} \qquad (5)$$

biçiminde yazarsak, bu matrisin bir tansör oluşturduğu isbat edilir. Bu ise bu tansörün bileşenleri ile seçilen O noktasından geçen keyfi bir kesitdeki, yani normali Ox, Oy ve Oz eksenleri ile çakışmayan keyfi bir kesitdeki normal ve kayma gerilmelerini belirleye biliriz.

5. Şekildeğiştirme (deformasiya) bileşenleri

Lineer ve ya klassik elastisite teorisi kapsamında farz edilir ki cismin noktalarının yerdeğiştirme vektörünün şiddeti çok-çok küçüktür ve bu vektor koordinatların sürekli fonksiyonudur. ~~Eğer~~ Ü yerdeğiştirme vektorunun Ox, Oy ve Oz eksenleri yönündeki bileşenlerini u, v ve w ile işaret edelim. Tarafları dx, dy ve dz olan elementar bir parçacık ele alalım. Bu parçacık Şekil 5-de gösteriliyor.



Şekil 5

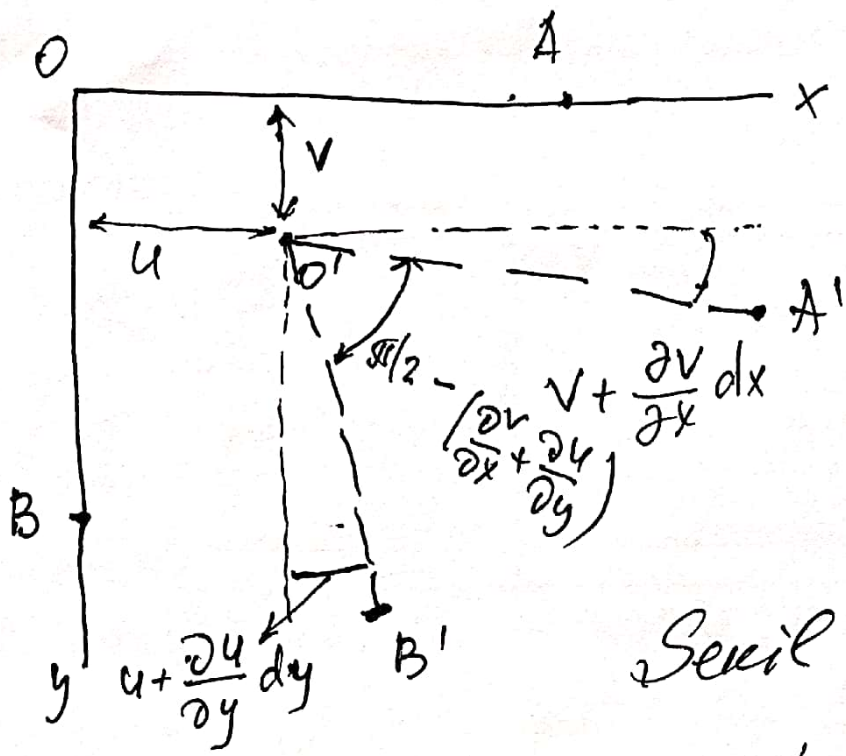
Belirtelim ki, ~~Kayd edelim ki~~, u, v ve w'lar cismin O noktasındakı yerdeğiştirme vektorunun bileşenleridirler (Şekil 5)

Bu durumda, Şekil 5'de gösterilen A noktasından Ox eksenı yönündeki yerdeğiştirmeni

$u + \frac{\partial u}{\partial x} dx$ gibi yaza biliriz, Burda

$\frac{\partial u}{\partial x} dx$ O noktasından A-noktasına geçildiğinde Ox eksenı yönündeki yerdeğiştirmenin değişimidir. Eğer bu değişimi dx-e bölersek onda birim uzunluğa düşen değişimi buluruz ki, bu da $\partial u/\partial x$ olur. Aynı ~~kaide~~ yöntem ile Oy ve Oz eksenleri yönünde olan birim değişimleri $\partial v/\partial y$ ve $\partial w/\partial z$ olarak buluruz

Şimdi distortion-bükülmeleri (kayma?) ele alalım Şekil 6-da gösterilen ve O noktasından geçen ve Oy ve Ox eksenleri yönünde olan OB və OA doğru parçalarını ele alalım ve ~~göze~~ Şekil 6-dan göründüğü gibi şekildeğiştirmeden önce bu ~~parçacık~~ doğrular arasındakı açı dik açıdır. Şekildeğiştirmeden sonra O noktası O' noktasına, B noktası B' noktasına ve A noktası A' noktasına keçer diye farz edelim



Şekil 6.

Onda OB doğru parçasının kendi yönünden ~~sarpma~~ kayma açısı Şekil 6-dan göründüğü gibi $\frac{\partial u}{\partial y}dy$, OA-nın ise $\frac{\partial v}{\partial x}dx$ olur.

Birim uzunluğa düşen ~~sarpa~~ kayma açılarını bulursak $\partial u/\partial y$ ve $\partial v/\partial x$ olur. Belelikle, şekildeğiştirme Ox ve Oy eksenleri yönünde olan doğru parçaları arasında olan dik açını

$$\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial v}{\partial x}$$ kadar

değiştirir. Aynı ~~kural~~ yöntem ile Oy ve Oz eksenleri ve Ox ve Oz eksenleri yönünde olan parçacıklar arasındaki açı değişmeleri

$$\frac{\partial v}{\partial z}+\frac{\partial w}{\partial y} \text{ ve } \frac{\partial u}{\partial z}+\frac{\partial w}{\partial x}$$ olurlar

Beleclikle O noktası etrafındakı şekildeğiştirme bileşenlerini aşağıdakı gibi belirlemiş oluyoruz:

$$\varepsilon_{xx}=\frac{\partial u}{\partial x}, \quad \varepsilon_{yy}=\frac{\partial v}{\partial y}, \quad \varepsilon_{zz}=\frac{\partial w}{\partial z}$$

$$\gamma_{xy}=\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial v}{\partial x}, \quad \gamma_{xz}=\frac{\partial w}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial z}, \quad \gamma_{yz}=\frac{\partial v}{\partial z}+\frac{\partial w}{\partial y} \qquad (6)$$

şekildeğiştirme bileşenlerini belirlemiş oluyoruz. Kayd edelim ki, literaturda çoğu zaman γ_{xy}, γ_{xz} ve γ_{yz} 'ler yerine $\varepsilon_{xy}=\gamma_{xy}/2$, $\varepsilon_{xz}=\gamma_{xz}/2$ ve $\varepsilon_{yz}=\gamma_{yz}/2$ işaretlemeleri kabul edilir.

Eğer bu bileşenlerden

$$\begin{pmatrix} \varepsilon_{xx} & \varepsilon_{xy} & \varepsilon_{xz} \\ \varepsilon_{xy} & \varepsilon_{yy} & \varepsilon_{yz} \\ \varepsilon_{xz} & \varepsilon_{yz} & \varepsilon_{zz} \end{pmatrix}$$

gibi bir matris düzenlersek, bu ~~matrisin~~ bir tansör olduğu isbat edilir. ve bu tansör aracılığı ile O noktasından geçen keyfi doğru parçasının uzunluğunun ve yönünün değişimi belirleye biliyoruz.