

Bir önceki dersde 3. mertebeden polinomun, yani ~~verdiği~~ gerilmelerin

$$\phi_3 = \frac{a_3}{3 \cdot 2} x^3 + \frac{b_3}{2} x^2 y + \frac{c_3}{2} x y^2 + \frac{d_3}{3 \cdot 2} y^3 \quad (1)$$

verdiği gerilmeleri:

$$\sigma_x = \frac{\partial^2 \phi_3}{\partial y^2} = c_3 x + d_3 y,$$

$$\sigma_y = \frac{\partial^2 \phi_3}{\partial x^2} = a_3 x + b_3 y,$$

$$\tau_{xy} = - \frac{\partial^2 \phi_3}{\partial x \partial y} = -b_3 x - c_3 y, \quad (2)$$

biçiminde belirttik.

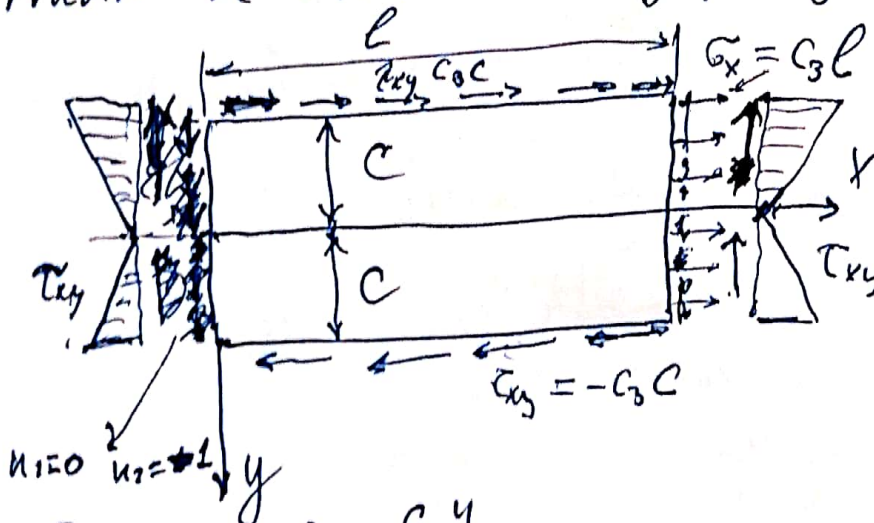
Şimdi özel durumlara bakalım

1) Farz edelim ki $c_3 \neq 0$, $d_3 = a_3 = b_3 = 0$.

Bu durumda

$$\sigma_x = c_3 x, \quad \sigma_y = 0 \quad \text{ve} \quad \tau_{xy} = -c_3 y \quad (3)$$

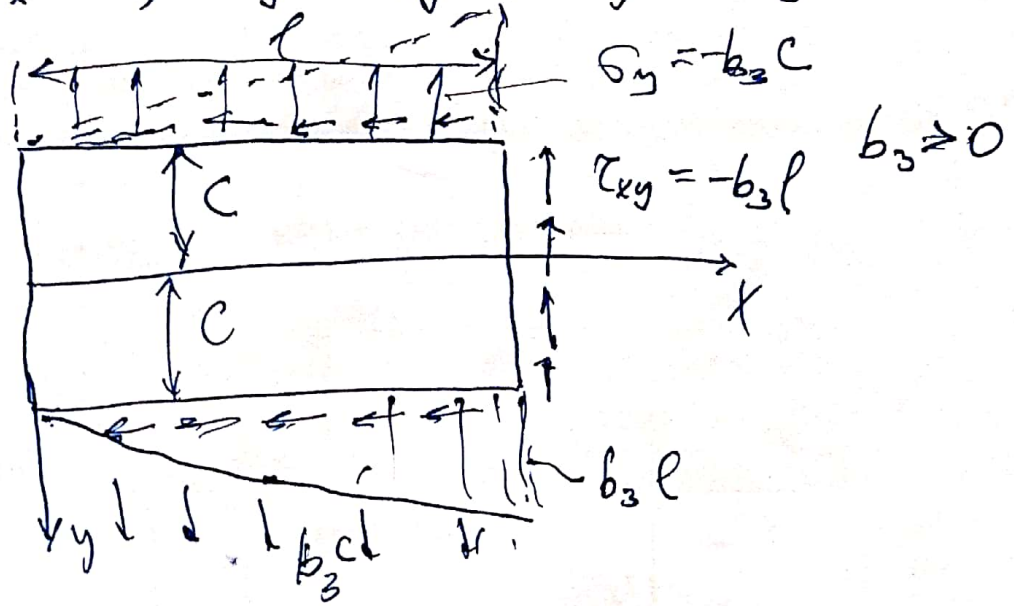
(3) gerilmelerinden dikdörtgen bir seritin kenarlarında ve içinde nasıl yayıldığına bakalım



$$P_2 = \tau_{xy} (-1) = c_3 y$$

2) Farz edelim ki, $b_3 \neq 0$; $c_3 = d_3 = a_3 = 0$

$$\sigma_x = 0, \quad \sigma_y = b_3 y, \quad \tau_{xy} = -b_3 x$$



③ Farz edelim ki,

$$c_3 \neq 0, b_3 \neq 0 \quad d_3 = a_3 = 0$$

onda gerilme durumu 1) ve 2) -nin
superpozisyonu biçiminde gösteriliyor
Diğer durumları analiz etmek öğrencilere ödev
olarak veriliyor.

Şimdi dördüncü mertebeden polinomu ele
alalım.

$$\phi = A_{40} x^4 + A_{31} x^3 y + A_{22} x^2 y^2 + A_{13} x y^3 + A_{04} y^4 \quad (3)$$

(3) ifadesi bir önceki dersde verilen (18)
serisine göre yazılır.

İlk önce belirtelim ki, 4. ve daha yüksek
mertebeden polinomların ~~iki~~ 2. ve 3. mertebeden
polinomlardan farkı ondadır ki, 2. ve 3. mer-
tebeden polinomlar $\Delta \Delta \phi = 0$ denklemini otoma-
tik olarak sağlar. Yani, 4. ve daha yüksek mer-
tebeden polinomlar $\Delta \Delta \phi = 0$ denklemini otoma-
tik olarak sağlar.

öeden polinomları ise bu denlemi otomatik olarak sağlamaz. Yani, 4. ve daha yüksek mertebeden olan polinomların $\Delta\Delta\phi = 0$ denklemini sağlaması için (3) ifadesindeki sabitlerin arasında belirli bir ilişki sağlanmalıdır. Şimdi, basitlik için aşağıdaki isaretlemleri kabul edelim.

$$A_{40} = \frac{a_4}{4 \cdot 3}, \quad A_{31} = \frac{b_4}{3 \cdot 2}, \quad A_{22} = \frac{c_4}{2},$$

$$A_{13} = \frac{d_4}{3 \cdot 2}, \quad A_{04} = \frac{e_4}{4 \cdot 3}. \quad (4)$$

(4)-ü (5)'de yazalım:

$$\phi_4 = \frac{a_4}{4 \cdot 3} x^4 + \frac{b_4}{3 \cdot 2} x^3 y + \frac{c_4}{2} x^2 y^2 + \frac{d_4}{3 \cdot 2} x y^3 + \frac{e_4}{4 \cdot 3} y^4. \quad (5)$$

(5) ifadesini biharmonik denkleme yerine yazalım:

$$\Delta\Delta\phi_4 = \left(\frac{\partial^4}{\partial x^4} \phi_4 + 2 \frac{\partial^4 \phi}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 \phi}{\partial y^4} \right) =$$

$$= 2a_4 + \cancel{6x^2 y} + \cancel{4} c_4 + 2e_4 = 0$$

$$e_4 = -(2c_4 + a_4) \quad (*) \text{ biliruz.}$$

Buradan, söyleye biliyoruz ki, (5)'deki sabitlerin arasında $(*)$ koşulu sağlanmalıdır.

$(*)$ koşulunu göz önüne alırsak, gerilmeler için aşağıdaki ifadeleri biliruz

$$\sigma_x = \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} = c_4 x^2 + d_4 xy - (2c_4 + a_4) y^2,$$

$$\sigma_y = \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} = a_4 x^2 + b_4 xy + c_4 y^2,$$

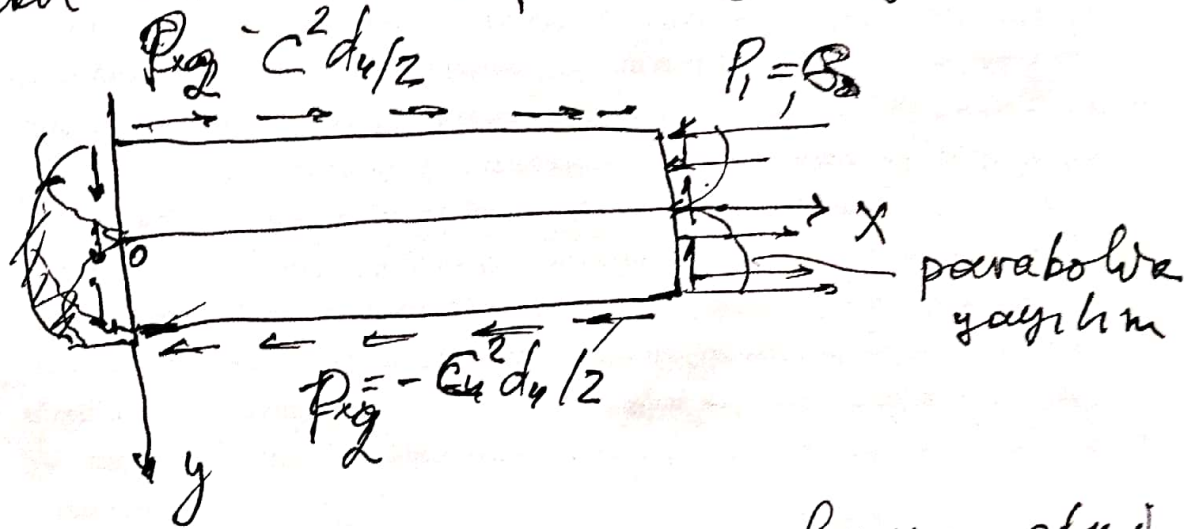
$$\tau_{xy} = - \frac{\partial^2 \phi}{\partial x \partial y} = - \frac{b_4}{2} x^2 - 2c_4 xy - \frac{d_4}{2} y^2 \quad (5)$$

Belirtelim ki, (5) ifadesindeki $a_4, b_4, d_4 \in C_4$ sabitleri keyfidir.

Şimdi ~~bazı~~ özel durumlara bakalım.
Favz edelim ki, $d_4 \neq 0$. ^{ve $a_4 = b_4 = c_4 = 0$} Bu durumda (5)'den

$$\sigma_x = d_4 xy, \quad \sigma_y = 0, \quad \tau_{xy} = -\frac{d_4}{2} y^2 \quad (6)$$

Kabul etsek ki, $d_4 > 0$ onda (6) gerilmelerindeki seril üzerinde aşağıdaki gibi göstere biliriz



Dikdörtgen "serilin kenarlarına etki eden" kayma kuvvetlerinin 0 noktasına göre ^{ya da eksenine göre} momentini hesaplayalım:

$y = \pm c$ yüzlerinde etki eden toplam kuvvet çiftleri $(l c^2 d_4 / 2; -l c^2 d_4 / 2)$ olduğundan, bu çiftin oluşturduğu moment $2c \cdot l c^3 d_4 / 2$ olur.

$x = l$ kenarında etki eden $-\frac{d_4}{2} y^2$ kuvvetinin momenti: $-\int_{-c}^c \frac{d_4}{2} y^2 l dy$ dir burdan

$$-\int_{-c}^c \frac{d_4}{2} y^2 l dy = -\frac{d_4 l}{2} \cdot \frac{2}{3} c^3 = -\frac{d_4 l c^3}{3} \quad (*)$$

(*) ve (**) toplarsak

$$M_1 = \frac{2}{3} d_4 l c^3$$

buluruz

Şimdi $x=l$ 'de σ_x den etki eden normal kuvvetlerden yaranan momenti

$$-\int_{-c}^c \sigma_x|_{x=l} \cdot y dy \text{ - ni hesaplayalım}$$

$$-\int_{-c}^c d_4 y \cdot y dy = -\frac{2}{3} d_4 l c^3 = M_2 \text{ olur}$$

$$M_1 + M_2 = 0 \text{ olduğunu görüyoruz.}$$

5. mertebeden polinom.

Bu durumda polinom

$$\Phi_5 = A_{50} x^5 + A_{41} x^4 y + A_{32} x^3 y^2 + A_{23} x^2 y^3 + A_{14} x y^4 + A_{05} y^5 \quad (6) \text{ biçiminde yazılır.}$$

$$A_{50} = \frac{a_5}{5 \cdot 4}, \quad A_{41} = \frac{b_5}{4 \cdot 3}, \quad A_{32} = \frac{c_5}{3 \cdot 2},$$

$$A_{23} = \frac{d_5}{3 \cdot 2}, \quad A_{14} = \frac{e_5}{4 \cdot 3}, \quad A_{05} = \frac{f_5}{5 \cdot 4} \quad (7)$$

gani

$$\Phi_5 = \frac{a_5}{5 \cdot 4} x^5 + \frac{b_5}{4 \cdot 3} x^4 y + \frac{c_5}{3 \cdot 2} x^3 y^2 + \frac{d_5}{3 \cdot 2} x^2 y^3 + \frac{e_5}{4 \cdot 3} x y^4 + \frac{f_5}{5 \cdot 4} y^5 \quad (8)$$

(8) ifadesini $\Delta \Delta \Phi_5 = 0$ denkleminde yazarsak

$$a_5 \cdot 3 \cdot 2 x + b_5 \cdot 2 y + c_5 x + d_5 y +$$

$$+ 2 e_5 x + f_5 \cdot 3 \cdot 2 y = 0 \text{ alırlar}$$

Şimdi $x=l$ 'de σ_x den etki eden normal kuvvetten yaranan momenti

$$-\int_{-c}^c \sigma_x|_{x=l} \cdot y dy \text{ - ni hesaplayalım}$$

$$-\int_{-c}^c d\sigma_y \cdot y dy = -\frac{2}{3} d\sigma_y l C^3 = M_2 \text{ olur}$$

$$M_1 + M_2 = 0 \text{ olduğunu görüyoruz.}$$

5. mertebeden polinom.

Bu durumda polinom

$$\Phi_5 = A_{50} x^5 + A_{41} x^4 y + A_{32} x^3 y^2 + A_{23} x^2 y^3 + A_{14} x y^4 + A_{05} y^5 \quad (6) \text{ biçiminde}$$

yazılır.

$$A_{50} = \frac{a_5}{5 \cdot 4}, A_{41} = \frac{b_5}{4 \cdot 3}, A_{32} = \frac{c_5}{3 \cdot 2},$$

$$A_{23} = \frac{d_5}{3 \cdot 2}, A_{14} = \frac{e_5}{4 \cdot 3}, A_{05} = \frac{f_5}{5 \cdot 4} \quad (7)$$

gani

$$\Phi_5 = \frac{a_5}{5 \cdot 4} x^5 + \frac{b_5}{4 \cdot 3} x^4 y + \frac{c_5}{3 \cdot 2} x^3 y^2 + \frac{d_5}{3 \cdot 2} x^2 y^3 + \frac{e_5}{4 \cdot 3} x y^4 + \frac{f_5}{5 \cdot 4} y^5 \quad (8)$$

$$(6) \text{ ifadesini } \Delta \Delta \Phi_5 = 0 \text{ denkleminde yazarsak}$$

$$a_5 \cdot 3 \cdot 2 x + b_5 \cdot 2 y + c_5 x + d_5 y +$$

$$+ 2 e_5 x + f_5 \cdot 3 \cdot 2 y = 0 \text{ alırız}$$

$$x \left(a_5 \cdot \frac{3 \cdot 2}{0} + 4c_5 + 2d_5 \right) + y \left(2b_5 + \frac{4d_5}{0} + 3 \cdot 2 \cdot \frac{1}{3} \right) = 0$$

$$c_5 = -(2d_5 + 3a_5)$$

$$f_5 = -\frac{1}{3}(b_5 + 2d_5) \quad (9)$$

buluruz.

(9)-u göz önüne alırsak gerilmeler için aşağıdaki ifadeleri buluruz

$$\sigma_x = \frac{\partial^2 \phi_5}{\partial y^2} = \frac{c_5}{3} x^3 + d_5 x^2 y - (2c_5 + 3a_5) x y^2 - \frac{1}{3}(b_5 + 2d_5) y^3,$$

$$\sigma_y = \frac{\partial^2 \phi_5}{\partial x^2} = a_5 x^3 + b_5 x^2 y + c_5 x y^2 + \frac{d_5}{3} y^3,$$

$$\tau_{xy} = -\frac{\partial^2 \phi_5}{\partial x \partial y} = -\frac{1}{3} b_5 x^3 - c_5 x^2 y - d_5 x y + \frac{1}{3} (2c_5 + 3a_5) y^3. \quad (10)$$

(10) ifadesindeki a_5 , b_5 , c_5 ve d_5 sabitleri keyfidir.

Çünkü farz edelim ki $d_5 \neq 0$ ve $a_5 = b_5 = c_5 = 0$

Onda (10)-dan

$$\sigma_x = d_5 \left(x^2 y - \frac{2}{3} y^3 \right), \quad \sigma_y = \frac{1}{3} d_5 y^3,$$

$$\tau_{xy} = -d_5 x y^2$$

(11)

Bu durumu aşağıdaki şekilde $d_5 > 0$ halinde veririz

