SONLU ELEMANLAR YÖNTEMİNE GİRİŞ DERS NOTLARI

Doç. Dr. Ali KOÇAK

2015

KAYNAKLAR

1. İnan, M., Cisimlerin Mukavemeti, İTÜ Vakfı Yayınları, 1996
2. Kaya, İ., Cisimlerin Mukavemeti, İTÜ Matbaası, 1987
3. Omurtag, H.M., Mukavemet, Cilt I, II, Birsen Yayınevi
4. Bakioğlu, M., Cisimlerin Mukavemeti, Beta Yayınevi
5. Köksal, T., Sonlu Elemanlar Metodu, YTÜ Matbaası, 1995
6. Omurtag, H.M., Çubuk Sonlu Elemanlar, Birsen Yayınevi, 2010
7. Çakıroğlu, A., Özden, E., Özmen, G., Yapı Sistemlerinin Hesabı İçin Matris Metotları ve Elektronik Hesap Makinesi Programı, İTÜ, İnşaat Fakültesi Matbaası, 1992
8. Kasımzade, A.A., Sonlu Elemanlar Metodu, Temelleri ve Yapı Mekaniğinde Uygulamaları, Birsen Yayınevi, 2004
9. Tezcan, S.S., Çubuk Sistemlerin Elektronik Hesap Makinesiyle Çözümü, Arı Kitapevi Matbaası, 1970
10. Zienkiewicz, O. C., The Finite Element Method in Engineering Science, Mc Graw-Hill Book Company, New York, 1971
11. Bathe, K.J., Finite Element Procedures, Prentice –Hall Inc., New Jersey, 1996
12. Zienkiewicz, O.C. and Taylor, R.L., The Finite Element Method: Basic Formulation and Linear Problems, Mcgraw-Hill College, 1987
13. Hughes, T. J. R., The Finite Element Method: Linear Static and Dynamic Finite Element Analysis, Prentice –Hall Inc., 1987
14. Bathe, K.J. AND Wilson, E.L., Numerical Methods in Finite Element Analysis, Prentice –Hall Inc., 1978
15. Cook, R.D., Finite Element Modeling for Stress Analysis, John Wiley&Sons, 1995
16. Liu, G.R. and Quek, S.S., The Finite Element Method: A practical course, Department of Mechanical Engineering, National University of Singapore, 2003

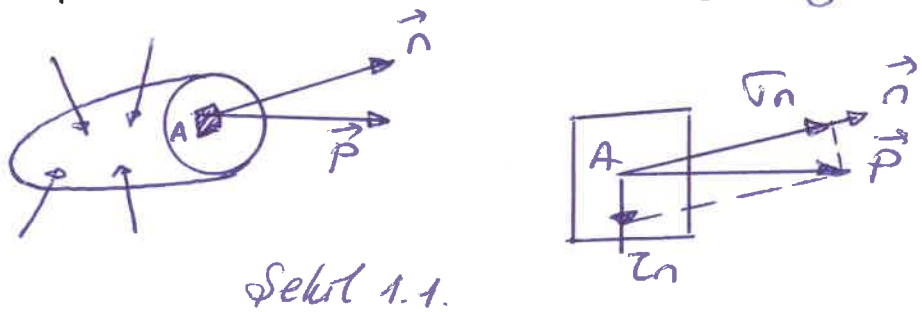
BÖLÜM I

ELASTİSİTE BAĞINTILARI

1) GERİLME HALİ

1.1) GİRİŞ: Denge durumundaki bir sistemde dış kuvvetler ile iç kuvvetler denge halindedir. Dış yüklerin etkisi altındaki bir sistemin enine kesiti üzerinde iç kuvvetler kesit yüzeyi boyunca sürekli bir tarzda yayılı olarak bulunduğu düşünülür. Bu kesit yüzeyi üzerinde birim alana gelen şiddete gerilme denir.

Sistemin gelişigüzel enine yönde kesilmesi sonucunda ayrılan parçalardaki gerilme vektörü yüzeye dik değildir (Şekil 1.1). Bu gerilmeye eğik gerilme vektörü denir.

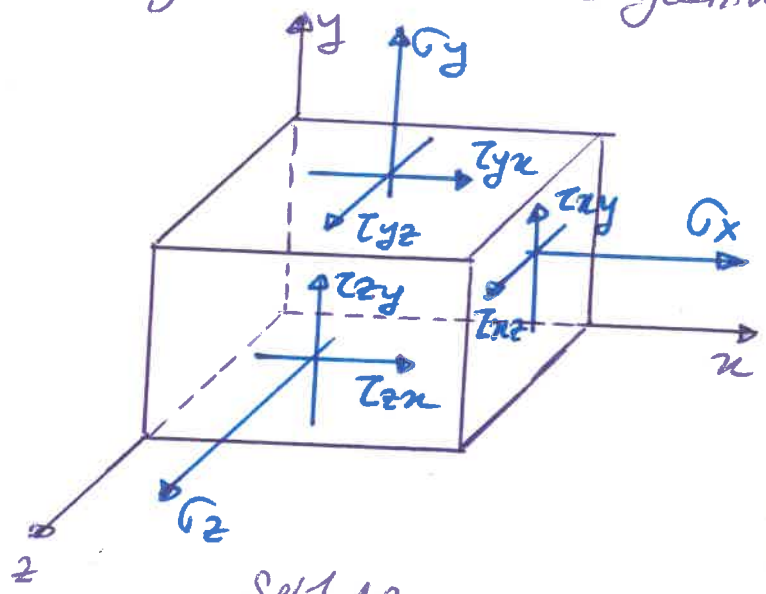


Şekil 1.1.

Eğik gerilme vektörünün, yüzeyin normali doğrultusundaki bileşenine, başka bir deyişle yüzeye dik bileşenine normal gerilme (σ_n), yüzeyin teğet doğrultusundaki bileşenine de kayma gerilmesi (τ_n) denir (Şekil 1.1)

Şekil 1.1 'de verildiği gibi doğrultu normali ($\vec{n}$) değiştikçe $\vec{p}$ gerilme vektörü de değişecektir. Dolayısıyla $\vec{n}$ ile $\vec{p}$ arasında bir bağıntı mümkündür ve bu da tek bir büyüklük olarak tanımlanabilir.

Buna gerilme hali, matematiksel olarak da adına gerilme tansörü denir. Buradan da anlaşılacağı gibi bu gerilme vektörü veya gerilme tansörü birbirlerinden bağımsız değildirler. Şekil 1.1'de verilen A noktasının gerilme hali için üç vektörel büyüklüğe veya dokuz skaler büyüklük gerekmektedir. Şekil 1.2'de de verildiği gibi prizmatik elemanın gerilme tansörü 9 gerilme bileşenlidir.



$$[T_g] = \begin{bmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \sigma_y & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_z \end{bmatrix}$$

Şekil 1.2.

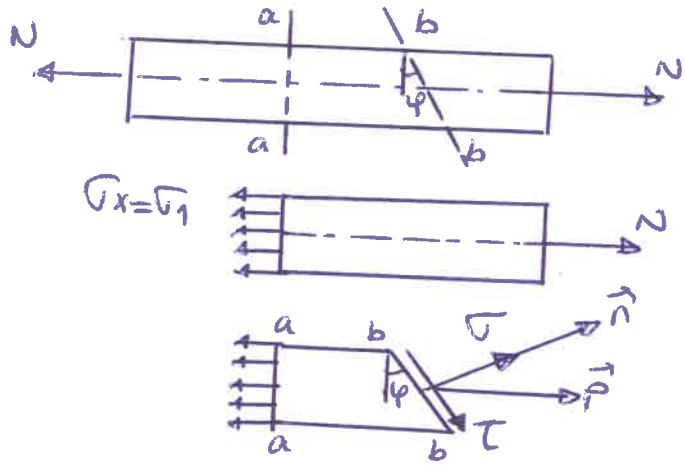
Gerilme tansöründe normal gerilmeler doğrultularına göre tek indisle belirtilir. Kayma gerilmeleri de birinci indisi kayma gerilmelerinin normalini, ikinci indisi kayma gerilmelerinin yönünü olmak üzere iki indisle belirtilir. Dokuz skaler büyüklükten oluşan gerilme tansörü diyagonale göre simetriktir ve altı bağımsız skalerle belirtilebilir.

$$|\tau_{xy}| = |\tau_{yx}| \quad ; \quad |\tau_{xz}| = |\tau_{zx}| \quad ; \quad |\tau_{yz}| = |\tau_{zy}|$$

Özel durumlarda bu altı skaler büyüklük daha az sayıyla belirtilebilir. Bu gerilme halleri 1, 2 ve 3 eksenli gerilme halleridir.

1.2) Bir Eksenli Gerilme Hali

Bir elemanin eğilme kesitindeki gerilme vektörlerinin doğrultularının aynı olduğu gerilme halidir. Bir başka tanıma göre; eksenel çekme veya basınca maruz bir çubuğun bir kesitinde meydana gelen normal gerilmeler (σ) eksen doğrultusuna paraleldir. Bu doğrultuya dik kayma gerilmeleri (τ) ise sıfırdır (Şekil 1.3).

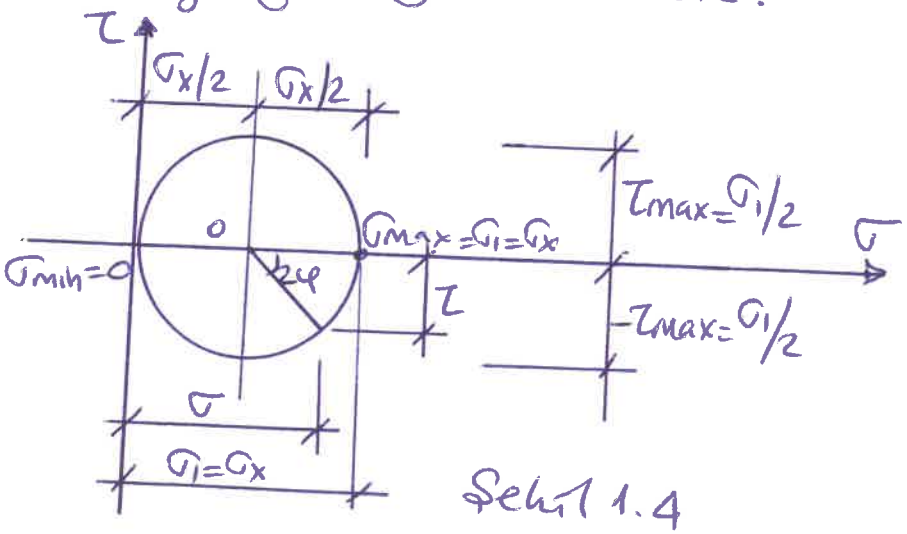


$$\sigma_x = \sigma_1 = \frac{N}{A}$$

$$[T_g] = [\sigma_x] = [\sigma_1] = \begin{bmatrix} \sigma_x & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Şekil 1.3

Şekilde'de görüleceği gibi aynı eleman üzerinde b-b kesitinde oluşacak gerilmeler de σ ve τ'dur. Burada $\sigma = \sigma_1 \cdot \cos^2\varphi$, $\tau = -\sigma_1 \cdot \sin\varphi\cos\varphi$ 'dir. Bir eksenli gerilme halindeki durumu mohr dairesinde Şekil 1.4'de verildiği gibi gösterebiliriz.



$$\sigma_{max} = \sigma_1 = \sigma_x$$

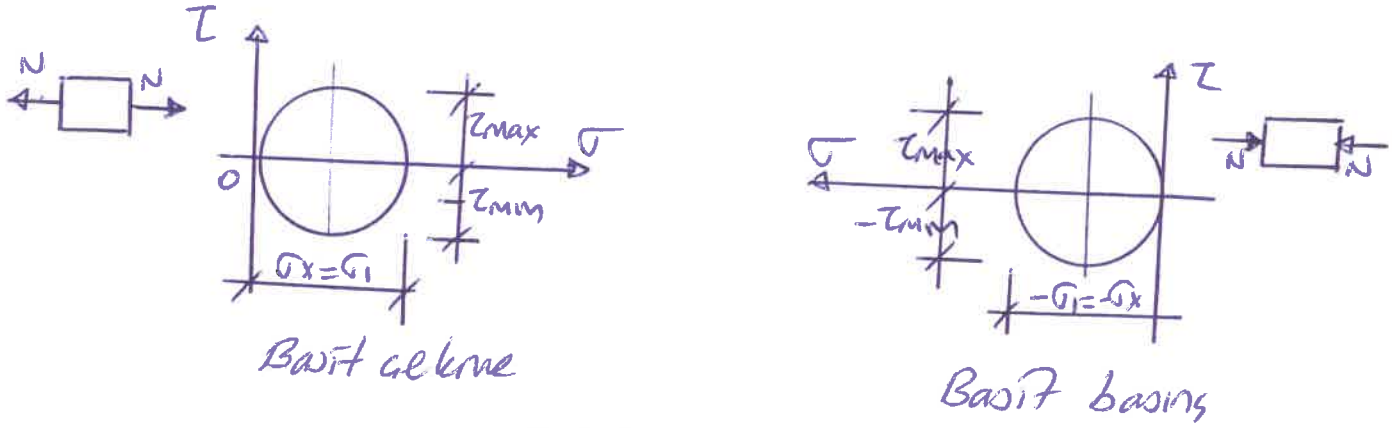
$$\sigma_{min} = 0$$

$$\tau_{max} = \frac{\sigma_1}{2}$$

$$\tau_{min} = -\frac{\sigma_1}{2}$$

Şekil 1.4

Görüldüğü gibi bir eksenli gerilme halinde mohr dairesi bazlangıç noktasından geçmektedir. Ayrıca bu gerilme haline basit çekme veya basit basınç durumu da denilmektedir (Şekil 1.5).

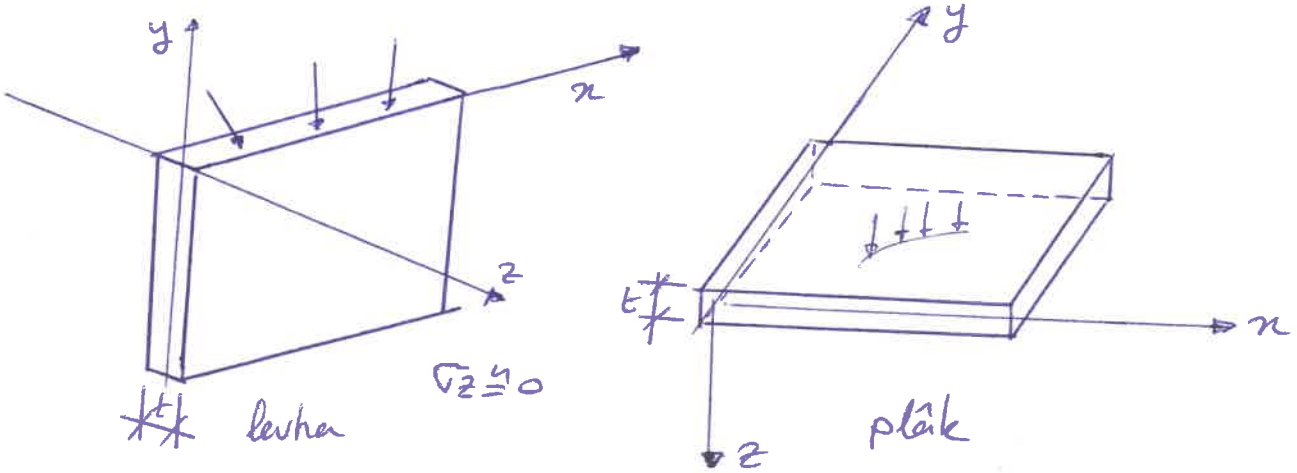


Şekil 1.5.

1.3) İki Eksenli Gerilme Hali (Düzlem Gerilme Hali)

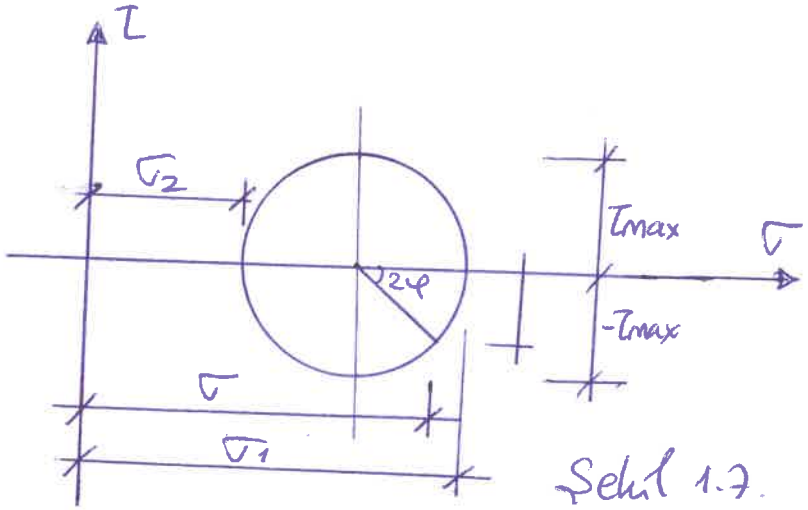
Bir elemanın eğilmeye kesitindeki gerilme vektörlerinin doğrultuları aynı düzlem içinde ise buna iki eksenli gerilme hali veya düzlem gerilme hali denir. Plak veya levha gibi elemanlar bu gerilme hali ile ifade edilirler. Düzlem gerilme halinde eleman kalınlığı boyunca gerilmeler sıfırdır (Şekil 1.6) ($\sigma_z = 0$). Buna bağlı olarak kayma gerilmeleri de;

$\tau_{zx} = \tau_{xz} = 0$, $\tau_{zy} = \tau_{yz} = 0$ 'dır. Bu durumda gerilme tansörü üç bağımsız olmak üzere 4 skaler büyüklükten oluşacaktır.



Şekil 1.6.

İki eksenli gerilme hali için mohr çemberi şekil 1.7'de verilmiştir.



Şekil 1.7.

$$[T_g] = \begin{bmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & 0 \\ \tau_{yx} & \sigma_y & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$|\tau_{xy}| = |\tau_{yx}|$$

Asal gerilme değerleri ise;

$$\tau_{\substack{max \\ min}} = \sigma_{1,2} = \frac{\sigma_x+\sigma_y}{2} \mp \sqrt{\left(\frac{\sigma_x-\sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2}$$

$$\tau_{\substack{max \\ min}} = \mp \sqrt{\left(\frac{\sigma_x-\sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2} = \frac{\sigma_1-\sigma_2}{2}$$ şeklindedir.

1.4.) Üç Eksenli Gerilme Hali

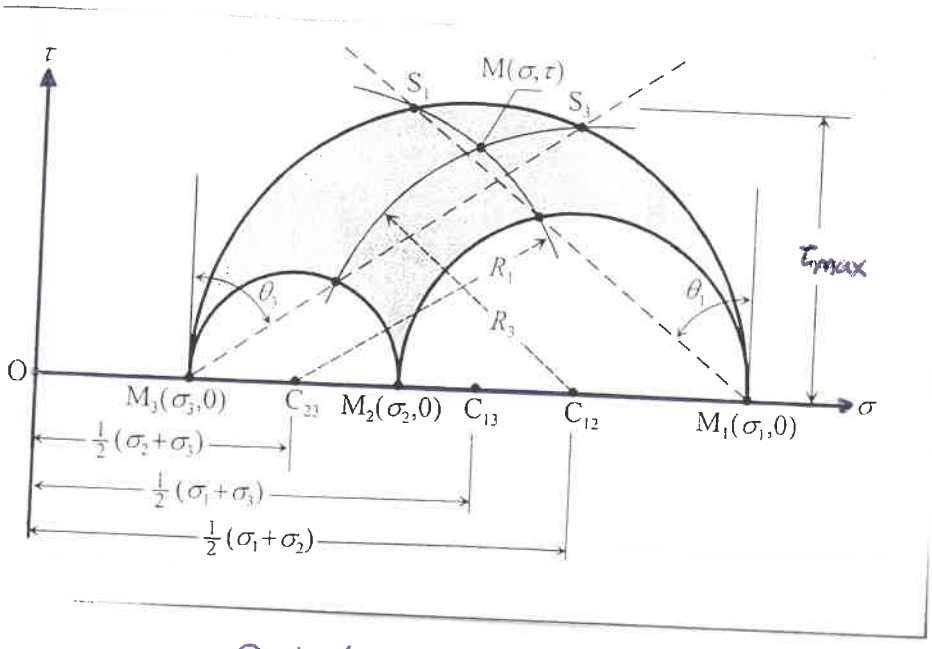
Bir elemanın eğikma kesitindeki gerilme vektörlerinin doğrultuları farklı ise buna üç eksenli gerilme hali denir. Gerilme tansörü altı bağımsız gerilme bileşeni olmak üzere toplam 9 skaler büyüklükten oluşmaktadır.

$$[T_g] = [\sigma] = \begin{bmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \sigma_y & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_z \end{bmatrix}$$

Burada $|\tau_{xy}| = |\tau_{yx}|$, $|\tau_{xz}| = |\tau_{zx}|$ ve

$|\tau_{yz}| = |\tau_{zy}|$ 'dir.

üç eksenli gerilme hali için mohr çemberi Şekil 1.8'de verildiği gibidir.

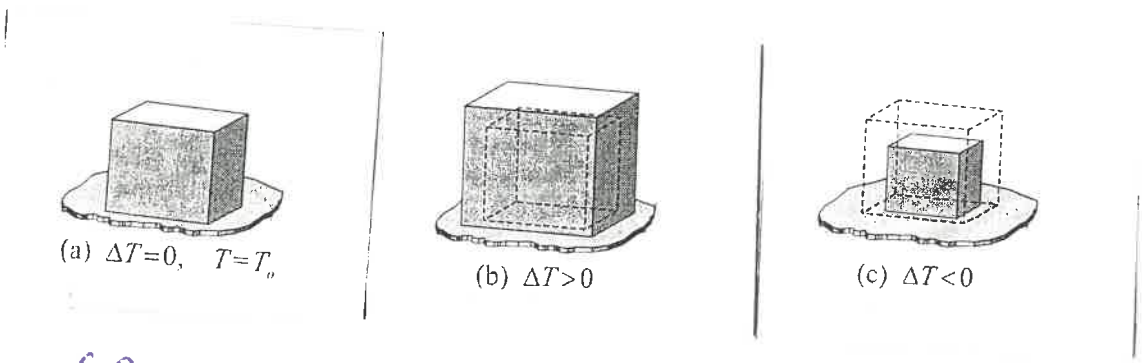


Şekil 1.8.

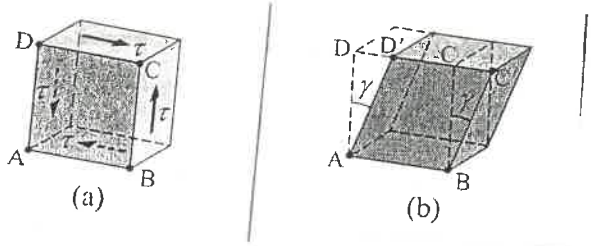
2) ŞEKİL DEĞİŞTİRME HALİ

2.1) GİRİŞ : Şekil değiştirme, bir cismin veya bir elemanın noktalarının birbirlerine göre konumlarının veya rölatif durumunun değişmesidir.

Cismin genel olarak geometrik tipinin değişmeden kenarlarının uzaması veya kısalması suretiyle yalnızca kenarlarının değişmesi (Şekil 2.1) veya kenarlarının açısal olarak değişmesi (Şekil 2.2) şekil değiştirmedir.



(Şekil 2.1)



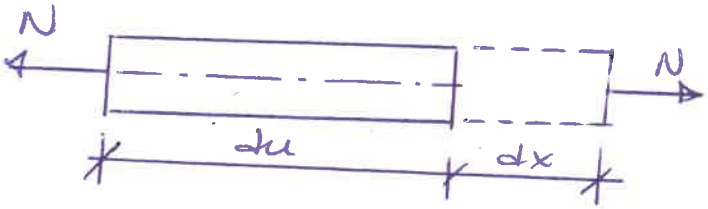
Şekil 2.2

Sözü edilen bu şekil değiştirmeler dış yükler, ısı değişimi ve yapı malzemesinin visko-elastik özelliğinden (sünme-rötre) dolayı meydana gelmektedir. Bu şekil değiştirme boy değişimi ve açı değişimi şeklindedir ve şekil değişimi sonucunda cismin şekli ve boyutları değişmektedir.

Cismin şekil değiştirme hali de tıpkı gerilme halinde ki gibi 1, 2 ve 3 eksenli şekil değiştirme hali şeklinde de incelemektedir.

2.2) Bir Eksenli Şekil Değiştirme Hali

Bir eksenli sistemlerde şekil değiştirme uzama şekil değiştirmesidir (Şekil 2.3).



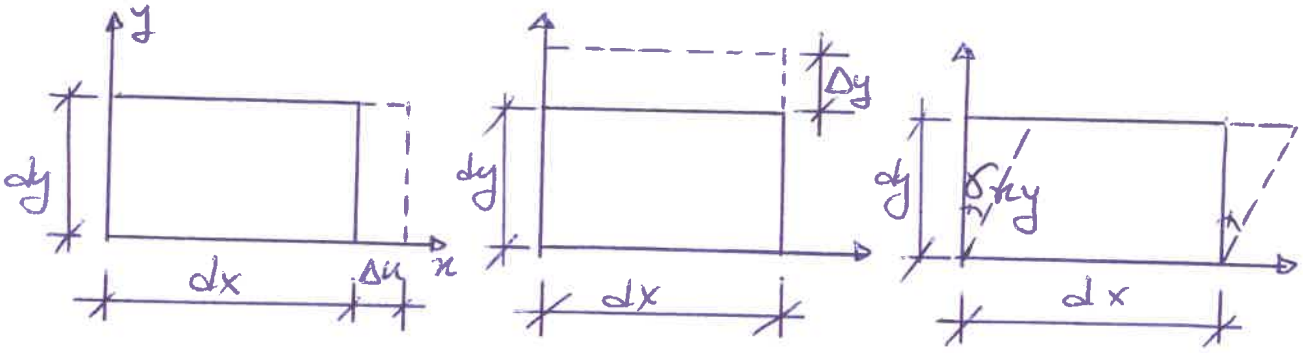
$$\sigma = \frac{N}{A} \qquad \varepsilon = \frac{\sigma}{E} = \frac{\partial u}{\partial x}$$

Şekil 2.3

Böyle bir sistemin şekil değiştirme tansörü $[\varepsilon] = \begin{bmatrix} \varepsilon_x & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ şeklindedir.

2.3) İki Eksenli Şekil Değiştirme Hali (Düzlem Şekil Değiştirme Hali)

Şekil değiştirmiş bir cismin yer değiştirme vektörleri düzlemde kalıyorsa ve diğer z doğrultusundan etkilenmiyorsa bu şekil değiştirme haline düzlem şekil değiştirme hali denir. Tıpkı bir istinat duvarının veya betonarme perde elemanının uzun doğrultusu gibidir. Bu durumda z doğrultusundaki şekil değiştirmeler sıfır olacaktır ($\varepsilon_z = 0$, $\gamma_{xz} = \gamma_{yz} = 0$). Düzlemsel şekil değiştirmeler Şekil 2.3 'de verildiği gibi olacaktır.



Şekil 2.3

Düzlem şekil değiştirme halinde, şekil değiştirme tansörü 4 skaler büyüklükten oluşmaktadır;

$$[\varepsilon] = \begin{bmatrix} \varepsilon_x & \gamma_{xy} \\ \gamma_{yx} & \varepsilon_y \end{bmatrix}$$

Burada $\gamma_{xy} = \gamma_{yx}$ 'dir. Asal doğrultudaki maksimum şekil değiştirmeler;

$$\varepsilon_{\substack{max \\ min}} = \frac{\varepsilon_x + \varepsilon_y}{2} \mp \sqrt{\left(\frac{\varepsilon_x - \varepsilon_y}{2}\right)^2 + \left(\frac{\gamma_{xy}}{2}\right)^2}$$

2.4) Üç Eksenli Şekil Değiştirme Hali

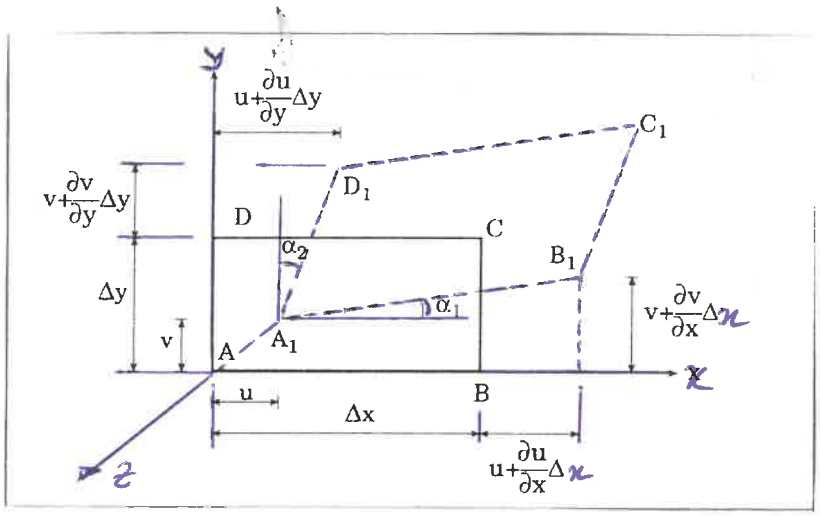
Perzmatik veya üç eksenli bir cismin şekil değiştirmesinde, şekil değiştirme tansörü 9 adettir.

$$[\varepsilon] = \begin{bmatrix} \varepsilon_x & \gamma_{xy} & \gamma_{xz} \\ \gamma_{yx} & \varepsilon_y & \gamma_{yz} \\ \gamma_{zx} & \gamma_{zy} & \varepsilon_z \end{bmatrix}$$

Burada $\gamma_{xy} = \gamma_{yx}$, $\gamma_{zx} = \gamma_{xz}$ ve $\gamma_{yz} = \gamma_{zy}$ 'dir.

3) ŞEKİL DEĞİŞTİRME - YER DEĞİŞTİRME ARASINDAKİ BAĞINTILAR

Bir cismin şekil değiştiren noktalarının durumunu gösteren değerlerini, aynı noktaların yer değiştirme cinsinden verilmesi mümkündür. Tanımlanan noktanın yer değiştirmeleri x, y, z koordinatlarına göre sırasıyla u, v ve w ile dikdörtgen bir elemanın buna göre yer değiştirmeleri şekil 3.1 'de gösterildiği gibidir.



Şekil 3.1

Birim şekil değiştirmeleri yer değiştirmeleri cinsinden aşağıda verildiği gibi yazabiliriz.

$$\varepsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{2}\left[\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)^2\right]$$

$$\varepsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{1}{2}\left[\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial y}\right)^2\right]$$

$$\varepsilon_z = \frac{\partial w}{\partial z} + \frac{1}{2}\left[\left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial z}\right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial z}\right)^2\right]$$

$$\gamma_{xy} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} + \left[\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}\frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial x}\frac{\partial w}{\partial y}\right]$$

$$\gamma_{xz} = \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} + \left[\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial v}{\partial x}\frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x}\frac{\partial w}{\partial z}\right]$$

$$\gamma_{yz} = \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} + \left[\frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial v}{\partial y}\frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y}\frac{\partial w}{\partial z}\right]$$

Bağıntılarda ilk terimler lineer durumu, parantez içi terimler ise lineer olmayan (non-lineer) durumu göstermektedir. Parantez içindeki ilk üç terim son terim yanında ihmal edilebileceği kadar küçük olduğundan analizlerde;

$$\varepsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)^2$$

$$\varepsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial w}{\partial y}\right)^2$$

$$\varepsilon_z = \frac{\partial w}{\partial z} + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial w}{\partial z}\right)^2$$

$$\gamma_{xy} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} + \left[\frac{\partial w}{\partial x}\frac{\partial w}{\partial y}\right]$$

$$\gamma_{xz} = \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} + \left[\frac{\partial w}{\partial x}\frac{\partial w}{\partial z}\right]$$

$$\gamma_{yz} = \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y}\left[\frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z}\right]$$

bağıntılarda verilen kısımları almak yeterlidir.

Matris formda yazılırsa;

$$\{\varepsilon\} = \{\varepsilon_0\} + \{\varepsilon_n\}$$

$\{\varepsilon_0\}$ → lineer

$\{\varepsilon_n\}$ → non-lineer

$$\{\varepsilon\} = \begin{Bmatrix} \varepsilon_{0,m} \\ \varepsilon_{0,e} \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} \varepsilon_{n,m} \\ \varepsilon_{n,e} \end{Bmatrix}$$

$\varepsilon_{0,m}$ = Lineer membran terimi

$\varepsilon_{0,e}$ = " eğilme terimleri

$\varepsilon_{n,m}$ = non-lineer membran ter

$\varepsilon_{n,e}$ = " eğilme ter.

Düzlem durumda;

$$\{\varepsilon\} = \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \\ k_x \\ k_y \\ k_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} \\ \frac{\partial v}{\partial y} \\ \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \\ -\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \\ -\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \\ -2\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} \frac{1}{2}\left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)^2 \\ \frac{1}{2}\left(\frac{\partial w}{\partial y}\right)^2 \\ \frac{\partial w}{\partial x}\frac{\partial w}{\partial y} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \varepsilon_{0,m} \\ \varepsilon_{0e} \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} \varepsilon_{n,m} \\ 0 \end{Bmatrix}$$

$$\{\varepsilon_m\} = \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)^2 \\ \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial w}{\partial y}\right)^2 \\ \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial x}\frac{\partial w}{\partial y} \end{Bmatrix}$$

4) MALZEMELERİN MEKANİK ÖZELLİKLERİ VE GERİLME ŞEKİL DEĞİŞTİRME BAĞINTILARI

4.1) Giriş : İnşaat mühendisliğinde kullanılan malzemelerin, dış etkiler altındaki şekil değiştirmesinin kırılmasının veya çatlama özelliklerinin incelenmesi ve tespiti malzemenin mekanik özelliklerinin en önemli konusudur. Bu mekanik özelliklerin tespitinde statik ve dinamik deneysel çalışmalar, sürekli ortamlar mekaniğinden yola çıkılarak yapılan araştırmalar ve malzemenin makroskopik yapısı ile atom kavramından yola çıkan çalışmalar rol oynamaktadır. Bu çalışmaların sonucunda elemanın malzemesi ile bunun dış etkiler altında kopup ve davranışlarını gösteren yani gerilme ile şekil değiştirme bileşenleri arasındaki ilişkiyi veren elastisite bağıntıları, bir başka deyişle bünye denklemleri bulunmaktadır.

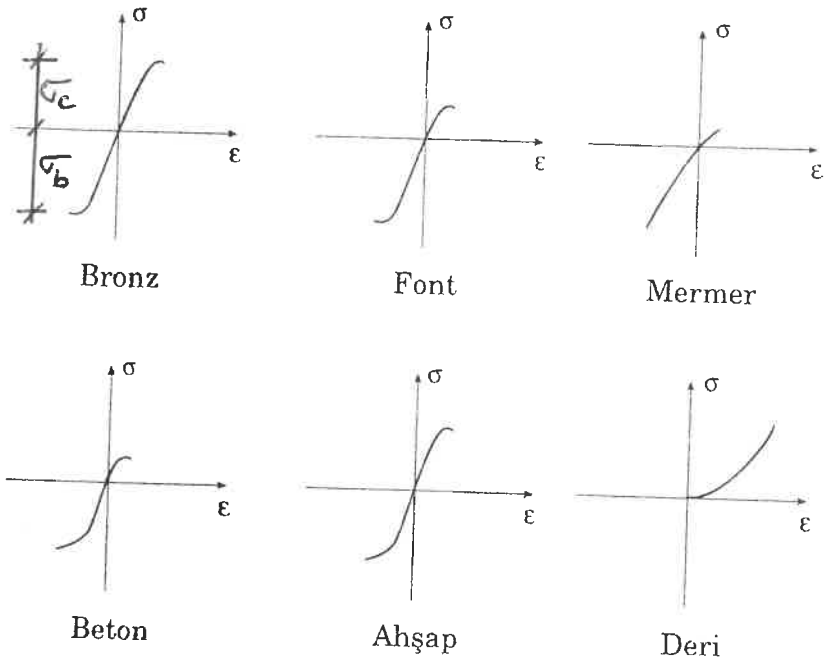
Mühendislikte kullanılan malzemeler ;

a) Metaller ve alaşımlar b) Polimerler

c) Seramik ve camlar 4) Kompozitler 'dir.

Bunun dışında ayrıca malzemeler kırılıncaya veya son limit duruma gelinceye kadar yaptıkları şekil değiştirme davranışları göz önüne alınarak sünek (duktil), gevrek ve plastik olarak üç grupta toplanabilirler. Sünek cisimler, kopmadan veya son limit duruma gelmeden önce büyük şekil değiştirme gösteren cisimlerdir. Buna en iyi örnek çelikdir. Gevrek cisimler, akma sınırları olmayan, kopmadan önce büyük uzama göstermeyen cisimlerdir. Buna örnek olarak beton, taş ve font'u

gösterebiliriz. Plastik cisimler ise elastik özelliği az olan asfalt, ahşap ve deri gibi malzemelerin oluşturduğu cisimlerdir. Aşağıdaki şekilde bazı malzemelerin gerilme-şekil değiştirme eğrileri verilmiştir (Şekil 4.1)



Şekil 4.1.

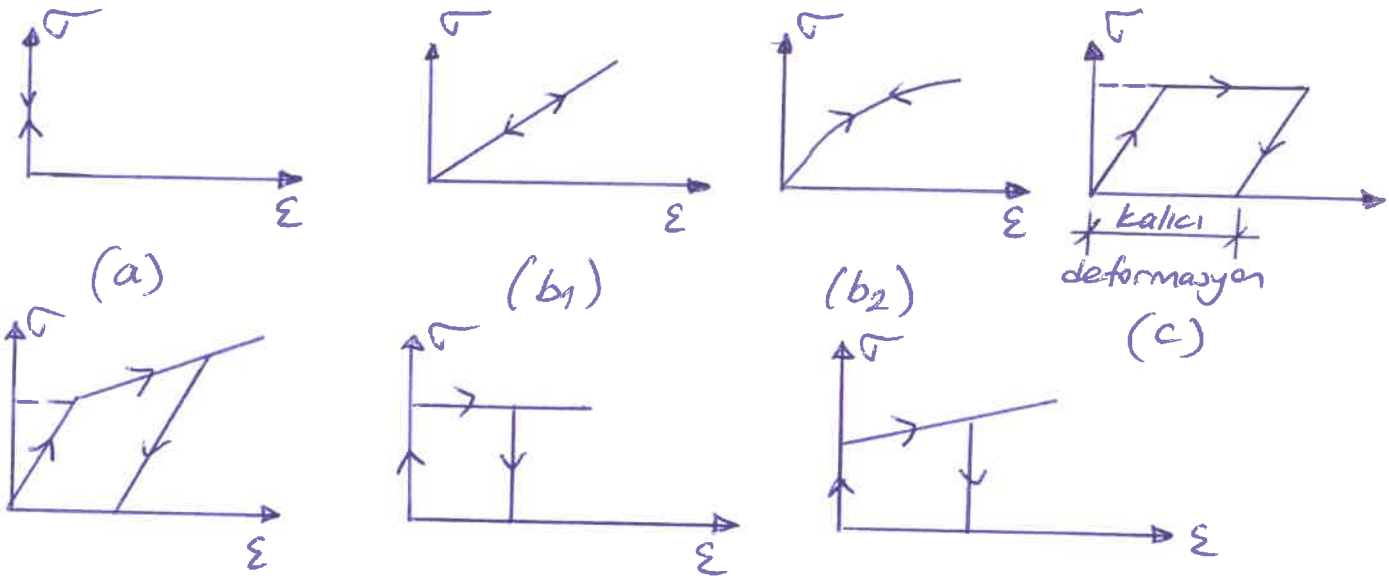
4.2) Gerilme- Şekil Değiştirme Diyagramlarının İdealleştirilmesi (İdeal Cisimler)

Cisimlerin mekanik özellikleri çok karışık ve birbirlerinden çok farklıdır. Herhangi bir mühendislik problemnde bunların tamamının birden göz önünde bulundurulması mümkün değildir. Basit olduğu kadar gerçeğe uygun düşecek bir teori kurulmak isteniyorsa, problemde en esaslı rolü oynayan cismin özellikleri dikkate alınmalı, etkileri az olan faktörler ihmal edilmelidir. Bu nedenle şekil değiştiren cisimlerin mekaniğinde konuya uygun düşen bir takım ideal cisimler kabul edilir ve bütün

teori bunlar üzerine kurulur.

Cisimlerin elastik ve plastik özellikleri göz önüne alınarak tek eksenli gerilme halinde yapılan idealleştirmelerden bazıları;

a) Rijit cisim, b) Elastik Hooke Cismi, c) Elasto Plastik Cisim
d) Pekleşen Elasto Plastik Cisim, e) Rijit Plastik Cisim
f) Pekleşen Rijit Plastik Cisim (şekil 4.2)



Şekil 4.2.

4.3) Hooke Kanunu (Bünye Bağıntıları)

Bir noktanın yakın civarında oluşan gerilme ve şekil değiştirme bileşenlerini ilişkilendiren ifadelere bünye bağıntıları (Hooke Yasaları) denir. Tek eksenli gerilme halinde Hooke yasası;

$$\varepsilon_1 = \frac{\sigma_1}{E}$$

şeklindedir. Tek eksenli gerilme halinde cisim boyu gerilme vektörü doğrultusunda artarken buna dik doğrultuda kısalır veya uzar. Bu durumda;

$$\varepsilon_2 = \varepsilon_3 = -\nu\varepsilon_1 = -\nu\frac{\sigma_1}{E}$$ olur. Buradaki poisson

oranı boyuna ve enine şekil değiştirme oranı olup ($\nu = -\varepsilon_b/\varepsilon_e$) $0 \le \nu \le \frac{1}{2}$ arasındadır.

Basit kayma etkisi altındaki bir cisimde açı değişimi ile kayma gerilmeleri arasında doğrusal bir bağıntı bulunmaktadır. Bu da $\gamma = \frac{\tau}{G}$ ile tanımlanmaktadır.

4.4) Genel Hooke Kanunu

En genel durumda (x,y,z) takımında bir noktadaki gerilme tansörü $\sigma = \sigma(\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z, \tau_{xy}, \tau_{xz}, \tau_{yz})$ ile şekil değiştirme tansörü $\varepsilon = \varepsilon(\varepsilon_x, \varepsilon_y, \varepsilon_z, \gamma_{xy}, \gamma_{xz}, \gamma_{yz})$ nin bileşenleri arasındaki ilişkiyi kuran bünye bağıntıları süperpozisyon kuralı ile elde edilir. Yalnız normal ve kayma gerilmelerinin etkileri birbirlerinden bağımsızdır. Başka bir deyişle 1. mertebe teorisine göre üç eksenli gerilme halinde normal gerilmeler açı değişimi, kayma gerilmeleri de boy değişimi yapmayacaklarından gerilme şekil değiştirme bağıntıları iki ayrı grup halinde incelenebilir. Sonuç olarak normal gerilmelerin doğurduğu uzama oranları;

$$\varepsilon_x = \frac{\sigma_x}{E} - \nu\frac{\sigma_y}{E} - \nu\frac{\sigma_z}{E} = \frac{1}{E}\left[\sigma_x - \nu(\sigma_y + \sigma_z)\right]$$

$$\varepsilon_y = \frac{\sigma_y}{E} - \nu\frac{\sigma_x}{E} - \nu\frac{\sigma_z}{E} = \frac{1}{E}\left[\sigma_y - \nu(\sigma_x + \sigma_z)\right]$$

$$\varepsilon_z = \frac{\sigma_z}{E} - \nu\frac{\sigma_y}{E} - \nu\frac{\sigma_x}{E} = \frac{1}{E}\left[\sigma_z - \nu(\sigma_x + \sigma_y)\right]$$

Kayma gerilmelerinin sebep olduğu kayma açıları;

$$\gamma_{xy} = \frac{\tau_{xy}}{G} \quad ; \quad \gamma_{zx} = \frac{\tau_{zx}}{G} \quad ; \quad \gamma_{yz} = \frac{\tau_{yz}}{G}$$

olur.

Gerilmeleri şekil değiştirmeler cinsinden yazarsak;

$$\sigma_x = \frac{E\cdot\nu}{(1+\nu)(1-2\nu)}(\varepsilon_x+\varepsilon_y+\varepsilon_z)+2G\varepsilon_x$$

$$\sigma_y = \frac{E\nu}{(1+\nu)(1-2\nu)}(\varepsilon_x+\varepsilon_y+\varepsilon_z)+2G\varepsilon_y$$

$$\sigma_z = \frac{E\nu}{(1+\nu)(1-2\nu)}(\varepsilon_x+\varepsilon_y+\varepsilon_z)+2G\varepsilon_z$$

$\tau_{xy} = G.\gamma_{xy}$; $\tau_{xz} = G.\gamma_{xz}$; $\tau_{yz} = G.\gamma_{yz}$

dacaktık. Burada verilen G kayma modülü dik ve homojen ve izotrop malzemelerde $G=\frac{E}{2(1+\nu)}$ şeklindedir. Diğer yandan gerilme bağıntısındaki;

$\frac{E\nu}{(1+\nu)(1-2\nu)} = \lambda$ olarak tariflenir. G'yi de

genel durum için μ şeklinde yazarsak her iki terime (μ,λ) lamé sabiti adı verilir. Şekil değiştirmelerin gerilmeler cinsinden yazıldığı bağıntıyı matris formunda yazarsak;

$$\begin{Bmatrix}\varepsilon_x\\ \varepsilon_y\\ \varepsilon_z\\ \gamma_{xy}\\ \gamma_{xz}\\ \gamma_{yz}\end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1/E & -\nu/E & -\nu/E & 0 & 0 & 0\\ -\nu/E & 1/E & -\nu/E & 0 & 0 & 0\\ -\nu/E & -\nu/E & 1/E & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1/G & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1/G & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1/G \end{bmatrix} \begin{Bmatrix}\sigma_x\\ \sigma_y\\ \sigma_z\\ \tau_{xy}\\ \tau_{xz}\\ \tau_{yz}\end{Bmatrix}$$

Gerilmelerin şekil değiştirmeler cinsinden yazılımı da

$$\begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \sigma_z \\ \tau_{xy} \\ \tau_{xz} \\ \tau_{yz} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} (\lambda+2\mu) & \lambda & \lambda & 0 & 0 & 0 \\ \lambda & (\lambda+2\mu) & \lambda & 0 & 0 & 0 \\ \lambda & \lambda & (\lambda+2\mu) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \mu & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \mu & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \mu \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \varepsilon_z \\ \gamma_{xy} \\ \gamma_{xz} \\ \gamma_{yz} \end{Bmatrix}$$

şeklinde elde edilir. Her iki durumun kapalı şekilde yazılımı;

$$\{\varepsilon\} = [H]\{\sigma\}$$

$$\{\sigma\} = [D]\{\varepsilon\} \quad \text{'dur.}$$

Matrisleri yeniden yazarsak;

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \varepsilon_z \\ \gamma_{xy} \\ \gamma_{xz} \\ \gamma_{yz} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} H_{11} & H_{12} & H_{13} & 0 & 0 & 0 \\ H_{21} & H_{22} & H_{23} & 0 & 0 & 0 \\ H_{31} & H_{32} & H_{33} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & H_{44} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & H_{55} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & H_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \sigma_z \\ \tau_{xy} \\ \tau_{xz} \\ \tau_{yz} \end{Bmatrix}$$

Burada; $H_{11} = 1/E$, $H_{12} = -\nu/E$; $H_{13} = -\nu/E$

şeklindedir.

$$\begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \sigma_z \\ \tau_{xy} \\ \tau_{xz} \\ \tau_{yz} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} D_{11} & D_{12} & D_{13} & 0 & 0 & 0 \\ D_{21} & D_{22} & D_{23} & 0 & 0 & 0 \\ D_{31} & D_{32} & D_{33} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & D_{44} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & D_{55} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & D_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \varepsilon_z \\ \gamma_{xy} \\ \gamma_{xz} \\ \gamma_{yz} \end{Bmatrix}$$

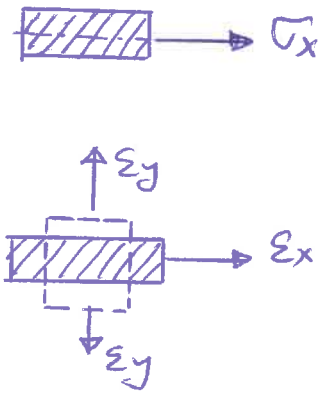
Burada $D_{11} = \lambda + 2\mu$; $D_{12} = \lambda$; $D_{13} = \lambda$ şeklindedir.

5. ELASTİSİTE SABİTLERİ

5.1) İZOTROP OLUM

Malzemedeki elastik özellikler koordinat takımından bağımsız ise bu malzemeye izotrop, aksi halde anizotrop denir.

5.1.1) Bir Boyutlu Gerilme ve Lineer Elastik İzotrop Olum



Gerilme

$\sigma_x = E \cdot \varepsilon_x$

$\sigma_y = 0$

$\tau_{xy} = 0$

Şekil Değiştirme

$\varepsilon_x = \frac{\sigma_x}{E}$

$\varepsilon_y = -\nu \cdot \varepsilon_x$

$\gamma_{xy} = 0$

$\tau_{max} = \frac{\sigma_x}{2}$

$\gamma_{max} = \frac{\tau_{max}}{G}$

Tanımlar

E : Elastisite Modülü

ν : Poisson Oranı

G : Kayma Modülü

5.1.2) Bir Boyutlu Şekil Değiştirme ve Lineer Elastik İzotrop Durum

Gerilme

$$\sigma_x = \frac{E\cdot\nu}{(1+\nu)(1-2\nu)}\varepsilon_x$$

$$\sigma_y = \sigma_z = \frac{E(1-\nu)}{(1+\nu)(1-2\nu)}\varepsilon_x$$

$$\tau_{xy} = 0$$

Şekil Değiştirme

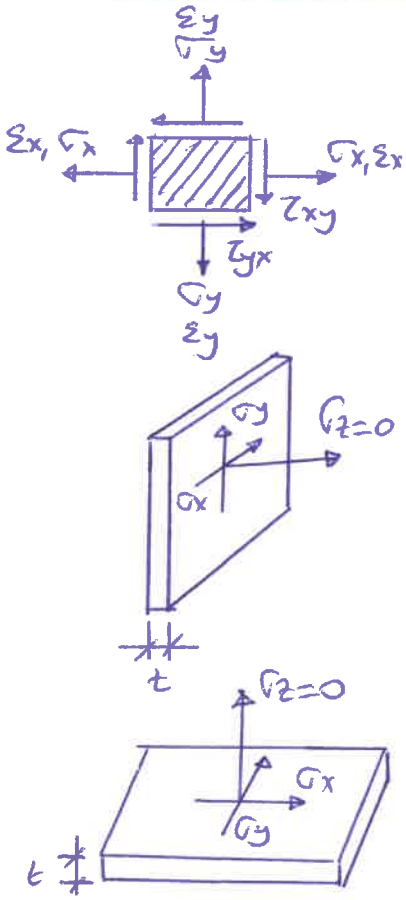
$$\varepsilon_x = \frac{\sigma_x}{E}$$

$$\varepsilon_y = 0$$

$$\gamma_{xy} = 0$$

Burada verilen $\frac{E\cdot\nu}{(1+\nu)(1-2\nu)} = \lambda$ olarak tanımlanan Lame sabitidir.

5.1.3) İki Boyutlu Gerilme ve Lineer Elastik İzotrop Durum (Düzlem Gerilme Hali)



$\sigma_z = 0$

$\varepsilon_z \neq 0$

Gerilmeler

$$\sigma_x = \frac{E\nu}{(1+\nu)(1-2\nu)}(\varepsilon_x+\varepsilon_y) + 2G\varepsilon_x = \frac{E}{1-\nu^2}(\varepsilon_x+\nu\varepsilon_y)$$

$$\sigma_y = \frac{E\nu}{(1+\nu)(1-2\nu)}(\varepsilon_x+\varepsilon_y) + 2G\varepsilon_y = \frac{E}{1-\nu^2}(\nu\varepsilon_x+\varepsilon_y)$$

$$\tau_{xy} = G\gamma_{xy} = \frac{E}{2(1+\nu)}\gamma_{xy}$$

Matris formda $\{\sigma\} = [D]\{\varepsilon\}$

$$\begin{Bmatrix}\sigma_x\\ \sigma_y\\ \tau_{xy}\end{Bmatrix} = \frac{E}{1-\nu^2}\begin{bmatrix}1 & \nu & 0\\ \nu & 1 & 0\\ 0 & 0 & \frac{1-\nu}{2}\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}\varepsilon_x\\ \varepsilon_y\\ \gamma_{xy}\end{Bmatrix}$$

Şekil Değiştirmeler

$$\varepsilon_z = -\frac{\nu}{(1-\nu)}(\varepsilon_x + \varepsilon_y)$$

$$\varepsilon_x = \frac{1}{E}(\sigma_x - \nu\sigma_y)$$

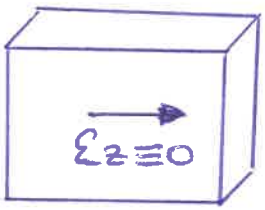
$$\varepsilon_y = \frac{1}{E}(\sigma_y - \nu\sigma_x)$$

$$\gamma_{xy} = \frac{\tau_{xy}}{G} = \frac{2(1+\nu)}{E}\tau_{xy}$$

Bağıntılar matris formda yazılırsa; $\{\varepsilon\} = [H]\{\sigma\}$

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} = \frac{1}{E}\begin{bmatrix} 1 & -\nu & 0 \\ -\nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2(1+\nu) \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix}$$

5.1.4) İki Boyutlu Şekil Değiştirme ve Lineer Elastik İzotrop Durum (Düzlem Şekil Değiştirme Hali)



$\sigma_z \neq 0$

$\sigma_z = \nu(\sigma_x + \sigma_y)$

$$\varepsilon_x = \frac{\sigma_x}{E} - \nu\frac{\sigma_y}{E} - \nu\frac{\sigma_z}{E}$$

$$\varepsilon_y = -\nu\frac{\sigma_x}{E} + \frac{\sigma_y}{E} - \nu\frac{\sigma_z}{E}$$

$$\varepsilon_z = -\nu\frac{\sigma_x}{E} - \nu\frac{\sigma_y}{E} + \frac{\sigma_z}{E} = 0$$

$$\varepsilon_x = \frac{\sigma_x}{E} - \nu\frac{\sigma_y}{E} - \frac{\nu^2}{E}(\sigma_x + \sigma_y)$$

$$\varepsilon_y = -\nu\frac{\sigma_x}{E} + \frac{\sigma_y}{E} - \frac{\nu^2}{E}(\sigma_x + \sigma_y)$$

İfadeleri elde edilmiş bu buradan gerilme ve yer değiştirme bağıntıları aşağıda verildiği şekilde bulunacaktır.

Gerilmeler

$$\sigma_x = \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)}\left[(1-\nu)\varepsilon_x + \nu\varepsilon_y\right]$$

$$\sigma_y = \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)}\left[(1-\nu)\varepsilon_y + \nu\varepsilon_x\right]$$

$$\tau_{xy} = \frac{E}{2(1+\nu)}\gamma_{xy} = G\gamma_{xy}$$

Matris formda yazılırsa;

$$\begin{Bmatrix}\sigma_x\\ \sigma_y\\ \tau_{xy}\end{Bmatrix} = \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)}\begin{bmatrix}1-\nu & \nu & 0\\ \nu & 1-\nu & 0\\ 0 & 0 & \frac{1-2\nu}{2}\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}\varepsilon_x\\ \varepsilon_y\\ \gamma_{xy}\end{Bmatrix}$$

Şekil Değiştirmeler

$\varepsilon_z = 0$

$$\varepsilon_x = \frac{(1+\nu)}{E}\left[(1-\nu)\sigma_x - \nu\sigma_y\right]$$

$$\varepsilon_y = \frac{(1+\nu)}{E}\left[(1-\nu)\sigma_y - \nu\sigma_x\right]$$

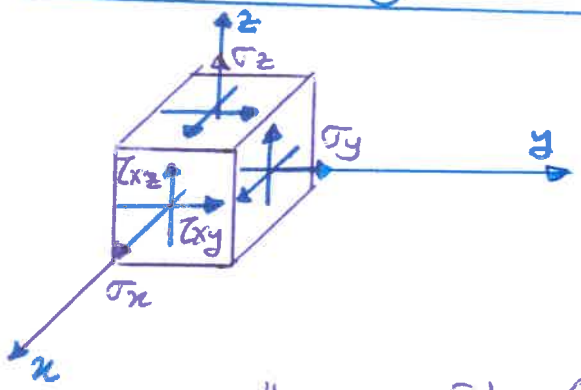
$$\gamma_{xy} = \frac{2(1+\nu)}{E}\tau_{xy} = \frac{\tau_{xy}}{G}$$

Matris formda yazılırsa;

$$\begin{Bmatrix}\varepsilon_x\\ \varepsilon_y\\ \gamma_{xy}\end{Bmatrix} = \frac{(1+\nu)}{E}\begin{bmatrix}1-\nu & -\nu & 0\\ -\nu & 1-\nu & 0\\ 0 & 0 & 2\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}\sigma_x\\ \sigma_y\\ \tau_{xy}\end{Bmatrix}$$

bağıntıları elde edilir.

5.1.5) Üç Boyutlu Lineer Elastik İzotrop Durum



Genelmeler

$$\sigma_x = \frac{E\nu}{(1+\nu)(1-2\nu)}(\varepsilon_x+\varepsilon_y+\varepsilon_z)+2G\varepsilon_x = \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)}\left[(1-\nu)\varepsilon_x+\nu(\varepsilon_y+\varepsilon_z)\right]$$

$$\sigma_y = \frac{E\nu}{(1+\nu)(1-2\nu)}(\varepsilon_x+\varepsilon_y+\varepsilon_z)+2G\varepsilon_y = \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)}\left[(1-\nu)\varepsilon_y+\nu(\varepsilon_x+\varepsilon_z)\right]$$

$$\tau_{xy} = G\gamma_{xy} = \frac{E}{2(1+\nu)}\gamma_{xy}$$

$$\tau_{xz} = G\gamma_{xz} = \frac{E}{2(1+\nu)}\gamma_{xz}$$

$$\tau_{yz} = G\gamma_{yz} = \frac{E}{2(1+\nu)}\gamma_{yz}$$

Bağıntılar matris formunda yazılırsa; $\{\sigma\} = [D]\{\varepsilon\}$ olur

$$\begin{Bmatrix}\sigma_x\\ \sigma_y\\ \sigma_z\\ \tau_{xy}\\ \tau_{xz}\\ \tau_{yz}\end{Bmatrix} = \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)}\begin{bmatrix}(1-\nu) & \nu & \nu & 0 & 0 & 0\\ \nu & (1-\nu) & \nu & 0 & 0 & 0\\ \nu & \nu & (1-\nu) & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & \frac{1-2\nu}{2} & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{(1-2\nu)}{2} & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1-2\nu}{2}\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}\varepsilon_x\\ \varepsilon_y\\ \varepsilon_z\\ \gamma_{xy}\\ \gamma_{xz}\\ \gamma_{yz}\end{Bmatrix}$$

$$\lambda = \frac{E\nu}{(1+\nu)(1-2\nu)}, \qquad \mu = G = \frac{E}{2(1+\nu)}$$

ise $[D]$ matrisi $\longrightarrow$

$$[D] = \begin{bmatrix}(\lambda+2\mu) & \lambda & \lambda & 0 & 0 & 0\\ \lambda & (\lambda+2\mu) & \lambda & 0 & 0 & 0\\ \lambda & \lambda & (\lambda+2\mu) & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & \mu & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & \mu & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \mu\end{bmatrix}$$

Şekil Değiştirmeler

$$\varepsilon_x = \frac{1}{E}\left[\sigma_x - \nu(\sigma_y + \sigma_z)\right]$$

$$\varepsilon_y = \frac{1}{E}\left[\sigma_y - \nu(\sigma_x + \sigma_z)\right]$$

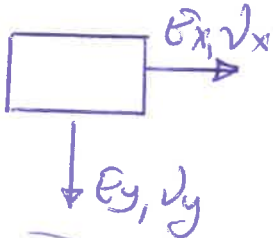
$$\varepsilon_z = \frac{1}{E}\left[\sigma_z - \nu(\sigma_x + \sigma_y)\right]$$

$$\gamma_{xy} = \frac{\tau_{xy}}{G} \quad ; \quad \gamma_{xz} = \frac{\tau_{xz}}{G} \quad ; \quad \gamma_{yz} = \frac{\tau_{yz}}{G}$$

5.2) ORTOTROP DURUM

Birbirine dik iki düzleme göre malzeme simetrisi olan cisimlerdir. Birbirine dik iki düzleme göre simetri olması durumunda bu iki düzleme dik üçüncü düzlemde simetri kendiliğinden sağlanır. Dolayısıyla birbirine dik 3 düzleme göre simetrisi olan malzemelerde bağımsız malzeme sabitlerinin sayısı 9'dur. Bu malzemelere ortogonalli anizotropik kelimelerin kısaltılmışı olan ortotropik malzeme adı verilir. Örneğin; ahşap, lifli kompozit malzeme.

5.2.1) İki Boyutlu Lineer Elastik Ortotrop Durum (Düzlem Gerilme Hali)



$$\frac{\nu_x}{E_x} = \frac{\nu_y}{E_y}$$

Gerilmeler

$$\sigma_x = \frac{E_x}{1-\nu_x\nu_y}\left(\varepsilon_x + \nu_y\varepsilon_y\right)$$

$$\sigma_y = \frac{E_y}{1-\nu_x\nu_y}\left(\varepsilon_y + \nu_x\varepsilon_x\right)$$

$$\tau_{xy} = \frac{E_xE_y}{E_x(1+\nu_y)+E_y(1+\nu_x)}\gamma_{xy} = G\gamma_{xy}$$

Bu bağıntıda $G = \dfrac{E_xE_y}{E_x(1+\nu_y)+E_y(1+\nu_x)}$ şeklindedir.

matris formda yazılırsa;

$$\begin{Bmatrix}\sigma_x\\ \sigma_y\\ \tau_{xy}\end{Bmatrix} = \frac{1}{1-\nu_x\nu_y}\begin{bmatrix} E_x & E_x\nu_y & 0\\ E_y\nu_x & E_y & 0\\ 0 & 0 & G(1-\nu_x\nu_y)\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}\varepsilon_x\\ \varepsilon_y\\ \gamma_{xy}\end{Bmatrix}$$

şeklindedir.

Şekil Değiştirmeler

$$\varepsilon_x = \frac{\sigma_x}{E_x} - \nu_y\frac{\sigma_y}{E_y}$$

$$\varepsilon_y = -\nu_x\frac{\sigma_x}{E_x} + \frac{\sigma_y}{E_y}$$

$$\gamma_{xy} = \frac{[E_x(1+\nu_y)+E_y(1+\nu_x)]}{E_xE_y}\tau_{xy} = \frac{\tau_{xy}}{G}$$

5.22) İki Boyutlu Lineer Elastik Ortotrop Durum (Düzlem Şekil Değiştirme Hali)

Gerilmeler

$$\sigma_x = \frac{E_x}{(1-\nu_z\nu_y)(1-\nu_x\nu_z)-\nu_x\nu_y(1+\nu_z)^2}\left[(1-\nu_z\nu_y)\varepsilon_x+\nu_y(1+\nu_z)\varepsilon_y\right]$$

$$\sigma_y = \frac{E_y}{(1-\nu_z\nu_y)(1-\nu_x\nu_z)-\nu_x\nu_y(1+\nu_z)^2}\left[(1+\nu_z)\nu_x\varepsilon_x+(1-\nu_x\nu_z)\varepsilon_y\right]$$

$$\sigma_z = \frac{E_z}{E_x}\nu_x\sigma_x + \frac{E_z}{E_y}\nu_y\sigma_y$$

$$\tau_{xy} = \left[(1-\nu_z\nu_y)(1-\nu_x\nu_z)-\nu_x\nu_y(1+\nu_z)^2\right]G.\gamma_{xy}$$

Yer Değiştirmeler

$\varepsilon_z \equiv 0$

$$\varepsilon_x = \frac{(1-\nu_x\nu_z)}{E_x}\sigma_x - \frac{\nu_y(1+\nu_z)}{E_y}\sigma_y$$

$$\varepsilon_y = -\frac{\nu_x(1+\nu_z)}{E_x}\sigma_x + \frac{(1-\nu_z\nu_y)}{E_y}\sigma_y$$

$$\gamma_{xy} = \frac{\tau_{xy}}{[(1-\nu_z\nu_y)(1-\nu_x\nu_z)-\nu_x\nu_y(1+\nu_z)^2}\cdot\frac{1}{G}$$

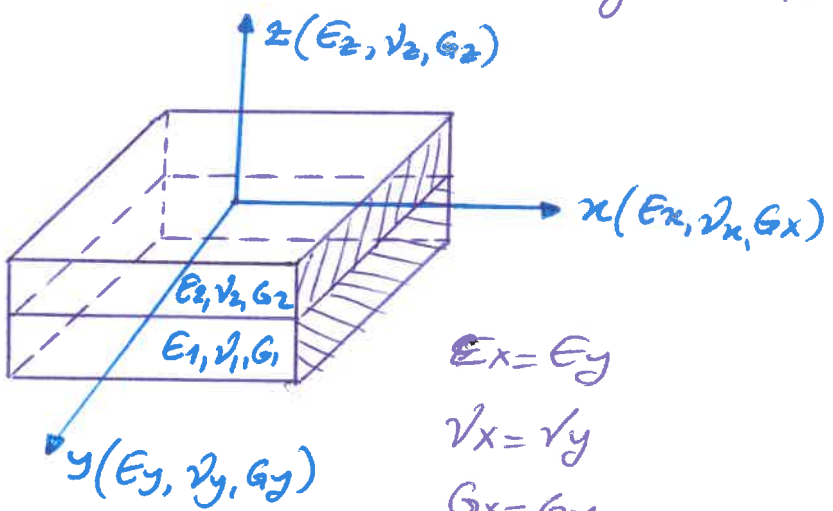
matris formda yazılırsa;

$$\begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix} = \frac{1}{(1-\nu_z\nu_y)(1-\nu_x\nu_z)-\nu_x\nu_y(1+\nu_z)^2} \begin{bmatrix} E_x(1-\nu_z\nu_y) & E_x\nu_y(1+\nu_z) & 0 \\ E_y\nu_x(1+\nu_z) & E_y(1-\nu_x\nu_z) & 0 \\ 0 & 0 & AG \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix}$$

$$A = (1-\nu_z\nu_y)(1-\nu_x\nu_z)-\nu_x\nu_y(1+\nu_z)^2$$

5.2.3) Üç Boyutlu Tetragonal Simetriye Sahip Ortotrop Malzeme Durumu

Ortotrop bir cisimde, malzemenin elastik özellikleri, uygun olarak seçilen bir eksen takımının Thi' ekseni doğrultusunda aynı, üçüncü eksen doğrultusunda farklıdır. Yani elastik özellikler birbirine dik üç düzleme göre Thiçer Thiçer simetriktir. Burada buna ek olarak bir de Thi' ekseninin üçüncü eksen etrafında dönmesi halinde elastik özelliklerin değişmemesi söz konusudur. Kısaca elastik özellikler eksenel simetriktir. Bu özel simetriden dolayı ortotrop malzemeye tetragonal simetrili denir. Bu durumda bağımsız sabitlerin sayısı 6 olur.



$E_x = E_y$

$\nu_x = \nu_y$

$G_x = G_y$

Gerilmeler

$$\sigma_x = \frac{E_z}{(1+\nu_x)(1-\nu_x-2\frac{E_x}{E_z}\nu_z^2)}\left[(1-\nu_x^2)\varepsilon_x + \frac{E_x}{E_z}\nu_z(1+\nu_x)\varepsilon_y + \frac{E_x}{E_z}\nu_z(1+\nu_x)\varepsilon_z\right]$$

$$\sigma_y = \frac{E_z}{(1+\nu_x)(1-\nu_x-2\frac{E_x}{E_z}\nu_z^2)}\left[\frac{E_x}{E_z}\nu_z(1+\nu_x)\varepsilon_x + \frac{E_x}{E_z}(1-\frac{E_x}{E_z}\nu_z^2)\varepsilon_y + \frac{E_x}{E_z}(\nu_x+\frac{E_x}{E_z}\nu_z^2)\varepsilon_z\right]$$

$$\sigma_z = \frac{E_z}{(1+\nu_x)(1-\nu_x-2\frac{E_x}{E_z}\nu_z^2)}\left[\frac{E_x}{E_z}\nu_z(1+\nu_x)\varepsilon_x + \frac{E_x}{E_z}(\nu_x+\frac{E_x}{E_z}\nu_z^2)\varepsilon_y + \frac{E_x}{E_z}(1-\frac{E_x}{E_z}\nu_z^2)\varepsilon_z\right]$$

$$\tau_{xy} = G_x \cdot \gamma_{xy} \;;\; \tau_{xz} = G_z \cdot \gamma_{xz} \;;\; \tau_{yz} = G_z \cdot \gamma_{yz}$$

matris formda yazılırsa;

$$\begin{Bmatrix}\sigma_x\\ \sigma_y\\ \sigma_z\\ \tau_{xy}\\ \tau_{xz}\\ \tau_{yz}\end{Bmatrix} = \frac{E_z}{(1+\nu_x)(1-\nu_x-2\frac{E_x}{E_z}\nu_z^2)} \begin{bmatrix} (1-\nu_x^2) & \frac{E_x}{E_z}\nu_z(1+\nu_x) & \frac{E_x}{E_z}\nu_z(1+\nu_x) & 0 & 0 & 0\\ \frac{E_x}{E_z}\nu_z(1+\nu_x) & \frac{E_x}{E_z}(1-\frac{E_x}{E_z}\nu_z^2) & (\nu_x+\frac{E_x}{E_z}\nu_z^2)\frac{E_x}{E_z} & 0 & 0 & 0\\ \frac{E_x}{E_z}\nu_z(1+\nu_x) & \frac{E_x}{E_z}(\nu_x+\frac{E_x}{E_z}\nu_z^2) & \frac{E_x}{E_z}(1-\frac{E_x}{E_z}\nu_z^2) & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & AG_x & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & AG_y & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & AG_z \end{bmatrix}$$

olur. Burada verilen $A = \frac{(1-\nu_x)(1-\nu_x-2\frac{E_x}{E_z}\nu_z^2)}{E_z}$ 'dir.

$$\cdot \begin{Bmatrix}\varepsilon_x\\ \varepsilon_y\\ \varepsilon_z\\ \gamma_{xy}\\ \gamma_{xz}\\ \gamma_{yz}\end{Bmatrix}$$

Şekil Değiştirmeler

$$\varepsilon_x = \frac{\sigma_x}{E_x} - \nu_x\frac{\sigma_y}{E_x} - \nu_z\frac{\sigma_z}{E_z}$$

$$\varepsilon_y = -\frac{\nu_x}{E_x}\sigma_x + \frac{\sigma_y}{E_x} - \nu_z\frac{\sigma_z}{E_z}$$

$$\varepsilon_z = -\frac{\nu_x}{E_x}\sigma_x - \frac{\sigma_y}{E_x} + \frac{\sigma_z}{E_z}$$

$$\gamma_{xy} = \frac{\tau_{xy}}{G_x} \;;\; \gamma_{xz} = \frac{\tau_{xz}}{G_z} \;;\; \gamma_{yz} = \frac{\tau_{yz}}{G_z} \text{ 'dir}$$

5.3) Isı Değişimi Etkisi ve Elastisite Bağıntıları

Cisimlerde ısı değişimi etkisi ile yalnızca boy değişimleri (ε) oluşur. Kayma şekil değişimleri (γ) meydana gelmez. Burada α_t ; ısı genleşme katsayısı, Δt ise ısı değişimini göstermek üzere elastisite bağıntıları aşağıda verilmiştir.

5.3.1) Isı Değişimi ve Düzlem Gerilme Hali

$$\left.\begin{aligned}\varepsilon_x &= \frac{1}{E}(\sigma_x - \nu\sigma_y) + \alpha_t \cdot \Delta t = \frac{\sigma_x}{E} - \nu\frac{\sigma_y}{E} + \alpha_t \cdot \Delta t \\ \varepsilon_y &= \frac{1}{E}(-\nu\sigma_x + \sigma_y) + \alpha_t \cdot \Delta t = -\frac{\nu\sigma_x}{E} + \frac{\sigma_y}{E} + \alpha_t \cdot \Delta t\end{aligned}\right\} \begin{matrix}\text{Dış yük} \\ + \\ \text{Isı etkisi}\end{matrix}$$

Yalnız ısı etkisi durumunda;

$$\begin{Bmatrix}\varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy}\end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix}\alpha_t \cdot \Delta t \\ \alpha_t \cdot \Delta t \\ 0\end{Bmatrix}$$

$$\{\sigma\} = [D]\{\varepsilon\} = \frac{E}{1-\nu^2}\begin{bmatrix}1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\nu}{2}\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}\varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy}\end{Bmatrix} \text{ idi.}$$

Isı etkisi durumunda;

$$\begin{bmatrix}\sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy}\end{bmatrix} = \frac{E}{1-\nu^2}\begin{bmatrix}1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\nu}{2}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\varepsilon_x - \alpha_t \cdot \Delta t \\ \varepsilon_y = \alpha_t \cdot \Delta t \\ \gamma_{xy} = 0\end{bmatrix}$$

Buradan;

$$\sigma_x = \frac{E}{1-\nu^2}\left[\alpha_t \cdot \Delta t + \nu\alpha_t \cdot \Delta t\right] = \frac{E}{1-\nu}\alpha_t \cdot \Delta t$$

$$\sigma_y = \frac{E}{1-\nu^2}\left[\nu\alpha_t \cdot \Delta t + \alpha_t \cdot \Delta t\right] = \frac{E}{1-\nu}\alpha_t \cdot \Delta t$$

$\tau_{xy} = 0$ elde edilir.

Sonuçta ısı değişiminden oluşan gerilmeler;

$\sigma_x = \sigma_y = \frac{E}{1-\nu} \alpha_t \cdot \Delta t$ olur. Buradan matris halde;

$$\begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix} = \frac{E}{1-\nu} \alpha_t \cdot \Delta t \begin{Bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{Bmatrix}$$ yazılabilir. Burada

ısıya ait elastisite vektörü $\{D\} = \frac{E}{1-\nu} \begin{Bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{Bmatrix}$ dir.

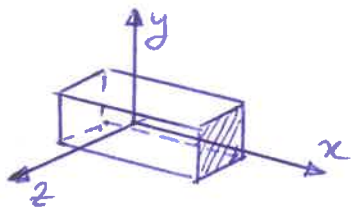
Diğer yük etkilerini de katarsak gerilme bağıntıları;

$$\sigma_x = \frac{E}{1-\nu^2} (\varepsilon_x + \nu \varepsilon_y) + \frac{E}{1-\nu} \alpha_t \cdot \Delta t$$

$$\sigma_y = \frac{E}{1-\nu^2} (\varepsilon_y + \nu \varepsilon_x) + \frac{E}{1-\nu} \alpha_t \cdot \Delta t$$

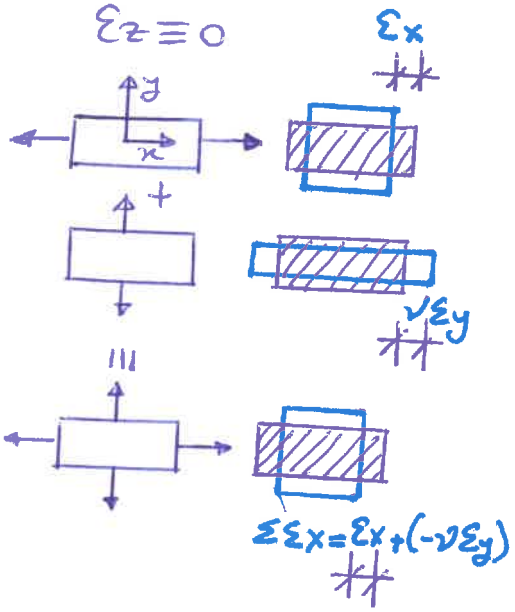
$$\tau_{xy} = G \cdot \gamma_{xy} + 0$$

5.3.2) Isı Değişimi ve Düzlem Şekil Değiştirme Hali



$\sigma_z \neq 0$

$\varepsilon_z \equiv 0$



Düzlem şekil değiştirme halinde, birim şekil değiştirmeler;

$\varepsilon_x, \varepsilon_y$ 'dir. $\varepsilon_z = 0$ 'dır

$\varepsilon_x = \alpha_t \cdot \Delta t$ veya $\varepsilon_{x_t} = \varepsilon_x - \nu \varepsilon_y$

$\varepsilon_y = \alpha_t \cdot \Delta t$ $\varepsilon_{y_t} = \varepsilon_y - \nu \varepsilon_x$

Bu durumda;

$\varepsilon_x = \alpha_t \Delta t - \nu \alpha_t \Delta t = (1-\nu) \alpha_t \Delta t$

$\varepsilon_y = -\nu \alpha_t \Delta t + \alpha_t \Delta t = (1-\nu) \alpha_t \Delta t$

olur.

Gerilme bağıntıları;

$$\sigma_x = \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)}\left[(1-\nu)\varepsilon_x + \nu\varepsilon_y\right]$$

$$\sigma_y = \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)}\left[\nu\varepsilon_x + (1-\nu)\varepsilon_y\right]$$

Düzlem şekil Değiştirme Durumunda;

$$\begin{Bmatrix}\sigma_x\\ \sigma_y\\ \tau_{xy}\end{Bmatrix} = \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)}\begin{bmatrix}1-\nu & \nu & 0\\ \nu & 1-\nu & 0\\ 0 & 0 & \frac{1-2\nu}{2}\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}\varepsilon_x\\ \varepsilon_y\\ \gamma_{xy}\end{Bmatrix}$$

$\varepsilon_x = (1-\nu)\alpha_t \Delta t$

$\varepsilon_y = (1-\nu)\alpha_t \Delta t$ De bu durumda;

$$\sigma_x = \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)}\left[(1-\nu)(1-\nu)\alpha_t \Delta t + \nu(1-\nu)\alpha_t \Delta t\right]$$

$$\sigma_y = \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)}\left[\nu(1-\nu)\alpha_t \Delta t + (1-\nu)(1-\nu)\alpha_t \Delta t\right]$$

Buradan;

$$\sigma_x = \frac{E(1-\nu)}{(1-2\nu)(1+\nu)}\alpha_t \Delta t$$

$$\sigma_y = \frac{E(1-\nu)}{(1-2\nu)(1+\nu)}\alpha_t \Delta t$$

$\tau_{xy} = 0$

Bağıntıların matris formunda yazılımı;

$$\begin{Bmatrix}\sigma_x\\ \sigma_y\\ \tau_{xy}\end{Bmatrix} = \frac{E}{(1-2\nu)}\left(\frac{1-\nu}{1+\nu}\right)\alpha_t \Delta t\begin{Bmatrix}1\\ 1\\ 0\end{Bmatrix}$$ şeklinde olur. Isı elastisite

sabitleri matrisi, düzlem şekil değiştirme halinde;

$$\{D\}_t = \frac{E}{(1-2\nu)}\left(\frac{1-\nu}{1+\nu}\right)\begin{Bmatrix}1\\ 1\\ 0\end{Bmatrix}$$ olur.

Sonuç olarak düz yüklerle ısı değişiminin birlikte dikkate alındığında ki düzlem şekil değiştirme hali için gerilme bağıntıları;

$$\sigma_x = \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)}\left\{\left[(1-\nu)\varepsilon_x + \nu\varepsilon_y\right] + (1-\nu)\alpha_t \Delta t\right\}$$

$$\sigma_y = \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)}\left\{\left[\nu\varepsilon_x + (1-\nu)\varepsilon_y\right] + (1-\nu)\alpha_t \Delta t\right\}$$

$$\tau_{xy} = G\gamma_{xy}$$

olarak elde edilir. Yine bu durumda şekil değiştirme bağıntıları;

$$\varepsilon_x = \frac{1}{E}\left(\sigma_x - \nu\sigma_y\right) + (1-\nu)\alpha_t \Delta t$$

$$\varepsilon_y = \frac{1}{E}\left(\sigma_y - \nu\sigma_x\right) + (1-\nu)\alpha_t \Delta t$$

$$\gamma_{xy} = \frac{\tau_{xy}}{G} \quad \text{şeklinde bulunur.}$$

5.3.3) Isı Değişimi ve üç Boyutlu Durum

Isı Değişimi nedeniyle oluşan birim şekil değiştirmeler;

$\varepsilon_x = \varepsilon_y = \varepsilon_z = \alpha_t \cdot \Delta t$ 'dir. Buradan gerilmeler;

$$\sigma_x = \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)}\left[(1-\nu)\varepsilon_x - \nu(\varepsilon_y + \varepsilon_z)\right]$$

$$= \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)}\left[(1-\nu)\alpha_t \Delta t + \nu(2\alpha_t \Delta t)\right]$$

$$= \frac{E}{(1-2\nu)}\alpha_t \Delta t$$

$$\sigma_y = \frac{E}{(1-2\nu)}\alpha_t \Delta t \qquad \tau_{xy} = \tau_{yz} = \tau_{xz} = 0 \text{ olur.}$$

$$\sigma_z = \frac{E}{(1-2\nu)}\alpha_t \Delta t$$

Isı elastik sabitler matrisi ise,

$$\{D\} = \frac{E}{(1-2\nu)} \begin{Bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad \text{şeklindedir.}$$

Isı ve dış yükler dahil olması durumunda elastisite bağıntıları;

$$\varepsilon_x = \frac{1}{E}\left[\sigma_x - \nu(\sigma_y + \sigma_z)\right] + \alpha_t \cdot \Delta t$$

$$\varepsilon_y = \frac{1}{E}\left[\sigma_y - \nu(\sigma_x + \sigma_z)\right] + \alpha_t \cdot \Delta t$$

$$\varepsilon_z = \frac{1}{E}\left[\sigma_z - \nu(\sigma_x + \sigma_y)\right] + \alpha_t \cdot \Delta t$$

$$\gamma_{xy} = \frac{\tau_{xy}}{G} \; ; \quad \gamma_{xz} = \frac{\tau_{xz}}{G} \; ; \quad \gamma_{yz} = \frac{\tau_{yz}}{G} \text{ dir.}$$

5.3.4) Isı Değişimi ve Ortotrop Durum

Ortotrop durumda sehil değiştirmeler ; $\varepsilon_x = \alpha_x \cdot \Delta t$, $\varepsilon_y = \alpha_y \cdot \Delta t$, $\gamma_{xy} = 0$ 'dır.

$$\frac{\nu_x}{E_x} = \frac{\nu_y}{E_y}$$

Elastisite bağıntıları matris halde ;

$$\begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix} = \frac{1}{1-\nu_x \nu_y} \begin{Bmatrix} E_x(\alpha_x + \nu_y \alpha_y) \\ E_y(\nu_x \alpha_x + \alpha_y) \\ 0 \end{Bmatrix}$$

olarak bulunur.

5.4) LEVHA, PLAK VE KABUKLARIN ELASTİSİTE BAĞINTILARI

5.4.1) İzotrop Levhanın Bünye Denklemleri

Kesit tesirleri ile şekil değiştirmeler arasındaki elastisite bağıntıları;

$$\begin{Bmatrix} N_x \\ N_y \\ N_{xy} \end{Bmatrix} = C \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\nu}{2} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix}$$

Buradaki katsayılar matrisi;

$$[D] = \begin{bmatrix} C & C\nu & 0 \\ C\nu & C & 0 \\ 0 & 0 & C\frac{1-\nu}{2} \end{bmatrix} \qquad C = \frac{Et}{1-\nu^2}$$

5.4.2) İzotrop Plağın Bünye Denklemleri

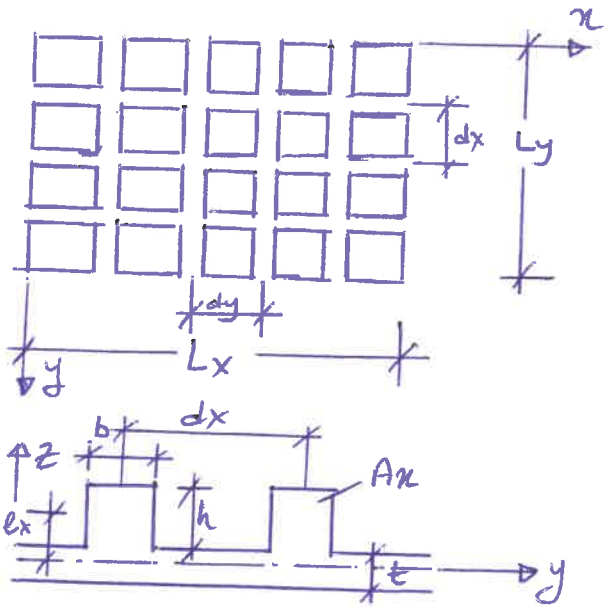
$$\begin{Bmatrix} M_x \\ M_y \\ M_{xy} \end{Bmatrix} = D \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1-\frac{\nu}{2} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} k_x \\ k_y \\ k_{xy} \end{Bmatrix}$$

Buradaki katsayılar matrisi;

$$[D] = \begin{bmatrix} D & D\nu & 0 \\ D\nu & D & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\nu}{2}D \end{bmatrix} \qquad D = \frac{Et^3}{12(1-\nu^2)} = \frac{EI}{(1-\nu^2)}$$

I: Kesit atalet momenti

5.4.3) Nervürlü Ortotrop Plağın Bünye Denklemleri



$$\begin{Bmatrix} N_x \\ N_y \\ N_{xy} \\ M_x \\ M_y \\ M_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ C_{21} & C_{22} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & C_{33} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & C_{44} & C_{45} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & C_{54} & C_{55} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & C_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \\ k_x \\ k_y \\ k_{xy} \end{Bmatrix}$$

$$C_{11} = C + \frac{EA_x}{d_x} \qquad C_{44} = D + \frac{EI_x}{d_x} = D + \frac{E(I_x + A_x \cdot e_x^2)}{d_x}$$

$$C_{12} = \nu C = C_{21} \qquad C_{45} = \nu D$$

$$C_{22} = C + \frac{EA_y}{d_y} \qquad C_{55} = D + \frac{EI_y}{d_y} = D + \frac{E(I_y + A_y \cdot e_y^2)}{d_y}$$

$$C_{33} = \frac{1-\nu}{2} C \qquad C_{66} = (1-\nu)D + \frac{1}{2}\left[\frac{GJ_x}{d_x} + \frac{GJ_y}{d_y}\right]$$

Burada; $C = \frac{Et}{1-\nu^2}$, $D = \frac{Et^3}{12(1-\nu^2)}$, d_x ve d_y sırasıyla x ve y doğrultusundaki nervür aralığı, A_x ve A_y nervür alanları, I_x ve I_y de x ve y yönlerindeki atalet momentleridir.

5.4.4) İzotrop Kabuklar Bünye Denklemleri

$$\begin{Bmatrix} N_x \\ N_y \\ N_{xy} \\ M_x \\ M_y \\ M_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ C_{21} & C_{22} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & C_{33} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & C_{44} & C_{45} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & C_{54} & C_{55} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & C_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \\ k_x \\ k_y \\ k_{xy} \end{Bmatrix}$$

Buradan izotrop durum için;

$$\begin{Bmatrix} N_x \\ N_y \\ N_{xy} \\ M_x \\ M_y \\ M_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} C & \nu C & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \nu C & C & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\nu}{2}C & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & D & \nu D & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \nu D & D & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1-\nu}{2}D \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \\ k_x \\ k_y \\ k_{xy} \end{Bmatrix}$$

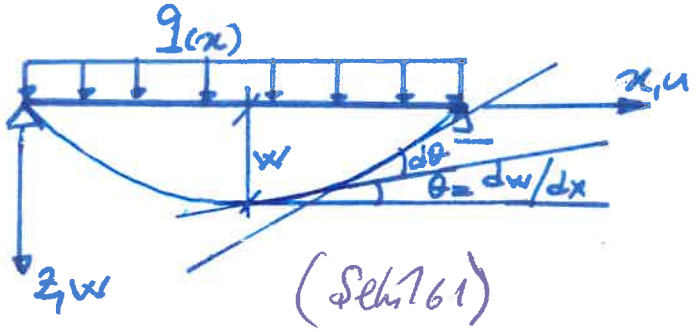
Burada, $C = \frac{Et}{1-\nu^2}$ $\quad D = \frac{Et^3}{12(1-\nu^2)}$ 'dir.

BÖLÜM II

ENERJİ YÖNTEMLERİ

6) TOPLAM POTANSİYEL ENERJİ

6.1) Toplam Potansiyel Enerjinin 1. Varyasyonu (Denge Denklemi)



(Şekil 6.1)

w = (çökme)

$\frac{dw}{dx} = w' = \theta$ = (dönme)

$-\frac{d^2w}{dx^2} = -\frac{d\theta}{dx} = -\frac{1}{\rho} = -\frac{M}{EI}$

$-EIw'' = M$ (moment)

$-\frac{d^3w}{dx^3} = \frac{d^2\theta}{dx^2} = -\frac{1}{EI}\frac{dM}{dx} = -\frac{V}{EI}$

$-EIw''' = V$ (Kesme Kuvveti)

$\frac{d^4w}{dx^4} = \frac{d^3\theta}{dx^3} = \frac{1}{EI}\frac{d^2M}{dx^2} = \frac{1}{EI}\frac{dV}{dx} = \frac{1}{EI}q(x)$

$EIw'''' = q$ (Yayılı yük)

Kirişin diferansiyel denklemi de;

$EI\frac{d^4w}{dx^4} = q(x) \rightarrow EIw^4 = q(x)$ olur.

Sınır koşulları

$x=0$ 'da $w=0$	}	Geometrik şartlar
$x=L$ 'de $w=0$		
$x=0$'da $w''=0$	}	dinamik şartlar.
$x=L$ 'de $w''=0$		

Bir kirişin sınır koşullarını sağlayan pek çok yer değiştirme fonksiyonu $u=u_0$ içinden yalnızca gerçek çözümü sağlayan bir $u=u_0(x)$ potansiyel enerjisinin ifadesini (Π) minimum yapar. Başka bir deyişle toplam potansiyel enerji, sistemin gerçek denge konumunda bir ekstremden geçer. Böylece belirli bir integral ifadeyi ekstrem yapan konumun bulunmasına problemi indirgemiş oluruz. Bu ekstrem değer bir minimumdur. Bu hesaba da Varyasyon Hesabı denir.

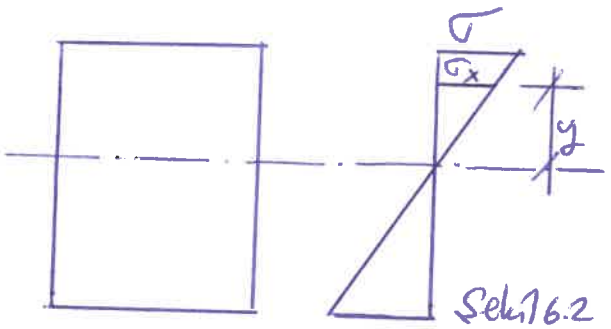
$\Pi = U + W$ (Toplam potansiyel enerji)

Burada; U: Tüm kuvvetlerin toplam potansiyel enerjisi

W: dış " " " " "

dir.

6.1.1.) Tüm Kuvvetlerin Potansiyel Enerjisi



Şekil 6.2

$$\sigma_x = \frac{M}{I} \cdot y$$

$$\varepsilon_x = y \cdot \frac{d\theta}{dx} = y \cdot \frac{M}{EI}$$

$$U_1 = \int \frac{1}{2} \sigma_x \cdot \varepsilon_x \, (dA)\, dx = \int_V \frac{1}{2} \cdot \frac{M}{I} \cdot y \cdot \frac{My}{EI} \, dA\, dx = \frac{1}{2} \int \frac{M^2}{EI} dx$$

$$U_1 = \frac{1}{2} \int EI \left(\frac{d^2 w}{dx^2} \right)^2 dx$$

$\int y^2 dA = I$

$$U = \int \frac{1}{2} \frac{M^2}{EI} dx + \int \frac{1}{2} \frac{N^2 \cdot L}{EA} dx + \int \frac{1}{2} \frac{V^2}{k' AG} dx$$

basit eğilme	basit uzama	basit kayma
$\frac{1}{2} \int EI (w'')^2 dx$	$\frac{1}{2} \int EA (u')^2 dx$	$\frac{1}{2} \int GA' (\gamma')^2 dx$

6.1.2) Dış Kuvvetlerin Potansiyel Enerjisi

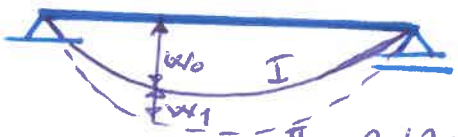
$$W = -\int q \cdot w \, dx$$

6.1.3) Toplam Potansiyel Enerji

$$\Pi = U + W = \int_0^l \frac{1}{2} \frac{M^2}{EI} dx - \int_0^l q \cdot w \, dx$$

$$= \int_0^l \left(\frac{EI}{2} (w'')^2 - q \cdot w \right) dx$$

6.1.4) Toplam Potansiyel Enerjinin Minimizasyonu



Şekil 6.3

Değişim (varyasyon): Gerçek ile komşu yer değiştirme $w \to w_0 + w_1$ olsun. Skaler bir büyüklük olan Π toplam potansiyel enerji de $\Pi + \delta\Pi$ kadar artar.

I → Gerçek konum (denge durumu)
II → Komşu konum

$$\delta\Pi = \Pi_2 - \Pi_1$$

$$\delta\Pi = \Pi_{2(w_0+w_1)} - \Pi_{1(w_0)}$$

$$\delta\Pi = \left[\int_0^l \frac{EI}{2}(w_0'' + w_1'')^2 dx - \int_0^l q(w_0+w_1)dx\right] - \left[\int_0^l \frac{EI}{2}(w_0'')^2 dx - \int_0^l q w_0 dx\right]$$

$$\delta\Pi = \int_0^l EI w_0'' w_1'' dx - \int_0^l q w_1 dx + \int_0^l \frac{EI}{2}(w_1'')^2 dx$$

$$\int_0^l \frac{EI}{2}(w_1'')^2 dx = \alpha > 0$$

İkinci mertebe terim daima sıfırdan büyük ve pozitif

Bu denkleme kısmi integral uygularsak;

$$\int u\,dv = uv - \int v\,du$$

$$\int_0^l EI w_0'' w_1'' dx = \left|EI w_0'' w_1'\right|_0^L - \left|EI w_0''' w_1\right|_0^L + \int_0^l EI w_0^{IV} w_1 dx$$

Dinamik Şartlar: $x=0 \to w''=0$, $x=L \to w''=0$; $x=0 \to w_1=0$, $x=L \to w_1=0$ } Sınır şartları

$$\delta\Pi = \int_0^L EI w_0^{IV} w_1 dx - \int_0^L q w_1 dx + \alpha = \left[\int_0^l (EI w_0^{IV} - q)dx\right] w_1 + \alpha$$

Hatırlatma $\longrightarrow EI\frac{d^4w}{dx^4} = q(x) \longrightarrow EI w_0^{IV} - q = 0$

o bloğundan parantez içindeki kısım sıfırdır.

Bu durumda $\delta\Pi = \alpha > 0$ kalır. Bunun anlamı denge konumuna komşu olan bütün konumlardaki toplam potansiyel enerji; denge konumundakinden daha fazladır. O halde "1" konumundaki (denge konumundaki) toplam potansiyel enerji minimumdur

$$\Pi_1 = \Pi_{min}$$



Şekil 6.4

İkinci mertebeden bir büyüklük olan α birinci mertebeden büyüklüklerin yanında ihmal edilirse $\alpha = 0$ yazılır ve denge hali için duragânlık koşulu elde edilir.

$$\delta\Pi = 0 \quad \text{(duragânlık koşulu)}$$

Ayrıca $\delta\Pi$'deki birinci dereceden ve ikinci dereceden terimlerin toplamına Π'nin birinci ve ikinci varyasyonu denir. Bunlar $\delta\Pi$ ve $\frac{\delta^2\Pi}{2}$ ile gösterilir.

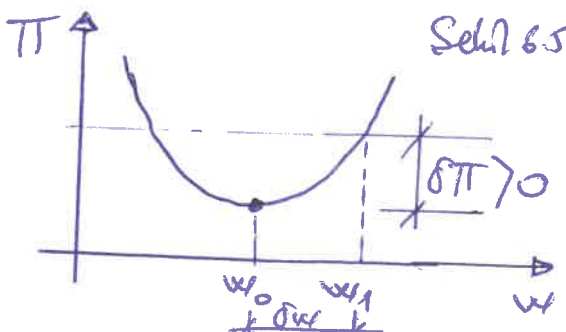
$$\delta\Pi = \delta\Pi + \frac{1}{2!}\delta^2\Pi$$

$$\delta\Pi = \int_0^L (EI w_0'' w_1'' - q \cdot w_1)\, dx = 0 \quad \text{denge denklemi}$$

$$\frac{1}{2!}\delta^2\Pi = \int_0^L \frac{EI}{2}(w_1'')^2 dx = \alpha > 0$$

Bu durumda denge hali için;

$$\left.\begin{aligned} &\delta\Pi = 0 \\ &\frac{1}{2!}\delta^2\Pi > 0 \end{aligned}\right\} \text{de } \Pi \text{ minimumdur.}$$

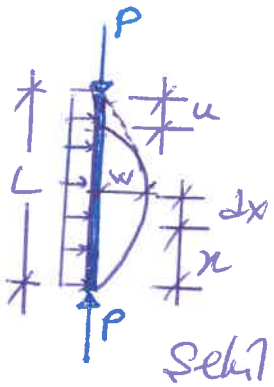


Şekil 6.5

Bu durumda elastik bir sistemde, geometrik sınır şartlarını sağlayan bütün yer değiştirme konumları arasında; gerçek konum, toplam potansiyel enerjiyi minimum yapandır.

6.2) Toplam Potansiyel Enerjinin 2. Varyasyonu (Stabilite Denklemi)

Eksenel yüklü bir elemanda boyuna yer değiştirmeye ek olarak enine yönde de yer değiştirmeler meydana gelirse bu elemanda burkulma problemi var demektir (Şekil 6.6). Cubuktaki toplam potansiyel enerji;



Şekil 6.6

$\Pi = (U_m + U_b) + W$ 'dir. Burada;

U_m : Membran şekil değiştirme enerjisi'

U_b : Eğilme " " "

W : Dış yük potansiyel enerjisi 'dir.

$$\Pi = \left[\frac{EA}{2}\int_0^L \varepsilon^2 dx + \frac{EI}{2}\int_0^L (w'')^2 dx\right] + P[u(L) - u(0)]$$

$$\Pi = \int_0^L \frac{EA}{2}\varepsilon^2 dx + \int_0^L \frac{EI}{2}(w'')^2 dx + \int_0^L P u' dx$$

Burada,

u' : eksenel kuvvete bağlı doğrusal şekil değiştirme

w'' : eğilmeye bağlı doğrusal şekil değiştirmedir.

$\varepsilon = u' + \frac{1}{2}(w')^2$ 'dir ve merkezi eksendeki uzama şekil değiştirmedir. Burada ki;

w' = büyük sapmaya bağlı doğrusal olmayan şekil değiştirmedir.

ε değerini denklemde yerine yazarsak;

$$\Pi = \int_0^L \left[\frac{EA}{2}\left(u' + \frac{1}{2}w'^2\right)^2 + \frac{EI}{2}(w'')^2 + Pu' \right] dx$$

u_0 ve w_0 denge konumunu, u_1 ve w_1 de sonsuz küçük artımın olduğu ilinci konumu göstermek üzere ve buna göre;

$u \to u_0 + u_1$
$w \to w_0 + w_1$ } artımlar

$u_0 = -\frac{P}{EA}x \to u_0' = -\frac{P}{EA}$; $w_0 \equiv 0$

$\left[\varepsilon = -\frac{P}{EA}, \frac{du}{dx} = -\frac{P}{EA}; \to u = -\frac{P}{EA}x\right]$ Kısalma dan dolayı (−)

Artımsal değerleri denklemde yerine yazarsak;

$$\Pi + \Delta\Pi = \int_0^L \left\{ \frac{EA}{2}\left[(u_0' + u_1') + \frac{1}{2}(w_0' + w_1')^2\right]^2 + \frac{EI}{2}(w_0'' + w_1'')^2 + P(u_0' + u_1') \right\} dx$$

$$\Pi = \int_0^L \left[\frac{EA}{2}\left(u_0' + \frac{1}{2}w_0'^2\right)^2 + \frac{EI}{2}(w_0'')^2 + Pu_0' \right] dx$$

$\Delta\Pi = (\Pi + \Delta\Pi) - \Pi$

Böylece potansiyel enerjideki değişmiş seriye açarsak;

$$\Delta\Pi = \delta\Pi + \frac{1}{2!}\delta^2\Pi + \frac{1}{3!}\delta^3\Pi + \cdots$$

$$\frac{1}{2!}\delta^2\Pi = \frac{1}{2}\int_0^L \left[EA(u_1')^2 + EI(w_1'')^2 - P(w_1')^2 \right] dx$$

olur.

Yukarıda verilen $\frac{1}{2!}\delta^2\Pi$ bağıntısı ikinci dereceden terimler toplamını vermektedir. Üçüncü ve dördüncü dereceden oluşan terimler ihmal edilmiştir.

Burada kritik yük olarak tanımlanan P'nin kritik değerleri için; u_1 ve w_1'in bütün sıfır olmayan varyasyonları için $\delta^2\Pi > 0$ 'dır.

$$\delta(\delta^2\Pi) = 0 \quad , \quad \delta\Pi = 0$$

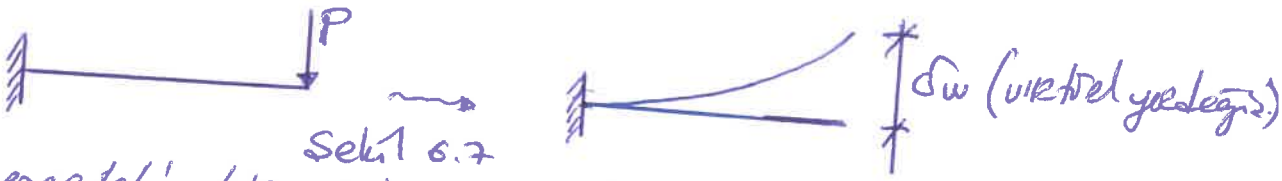
verilen bağıntıların u_1 ve w_1'e göre türevleri de sıfırdır.

$$\frac{\partial(\delta^2\Pi)}{\partial u_1} = 0 \qquad \frac{\partial(\delta^2\Pi)}{\partial w_1} = 0$$

6.3) VİRTÜEL İŞ PRENSİBİ

Virtüel, gerçekte nasıl olduğunu bilmediğimiz bir fiziksel büyüklüğün mevcut sınır koşulları ile uyumlu olacak bizim varsayacağımız oluşumunu ifade ederken kullandığımız bir terimdir. Virtüel kuvvetler ve virtüel deplasmanlar metodu olarak ikiye ayrılır.

Örneğin, aşağıdaki şekilde kiriş ucuna P yükü etkisin. Kiriş ucundaki yerdeğiştirmeyi virtüel olarak ele aldığımızda yer değiştirmeyi yukarıya veya aşağıya doğru alabiliriz. Ancak yer değiştirme eğrisi kirişin sınır koşullarını sağlamalıdır.



Şekil 6.7

Dengedeki bir cisim, sınır koşullarıyla uyumlu bir virtüel şekil değiştirme yaptığında, iç kuvvetlerin işi (δU), dış kuvvetlerin virtüel işine (δW) eşit olur.

$$\delta U = \delta W$$

u gerçek yerdeğiştirme, δu virtüel yerdeğiştirme, ε gerçek deformasyon, $\delta\varepsilon$ virtüel deformasyon ise;

$$U = \frac{1}{2}\int_V \sigma \cdot \varepsilon \cdot dV \quad \text{idi.} \qquad \{\sigma\} = [D]\{\varepsilon\}$$

$$\delta U = \int_V \{\delta\varepsilon\}^T \{\sigma\} dV = \int_V \{\delta\varepsilon\}^T [D] \{\varepsilon\} dV$$

X kütlesel kuvveti, p yüzeysel kuvveti, q çizgisel kuvveti, P münferit kuvveti gösterirse dış kuvvetlerin virtüel işi;

$$\delta W = \int_V \{\delta u\}^T \{X\} dV + \int_A \{\delta u\}^T \{P\} dA + \int_S \{\delta u\}^T \{q\} ds + P$$

$\delta U = \delta W$

$$\delta U = \int_V \{\delta\varepsilon\}^T [D] \{\varepsilon\} dV \quad \text{veya} \quad \delta U = \int_V \{\delta\varepsilon\}^T \{\sigma\} dV$$

$$\{\sigma\} = [D]\left(\{\varepsilon\} - \{\varepsilon_0\}\right) + \{\sigma_0\} - \alpha \cdot \Delta t \{D_T\}$$

Burada;

$[D]$ = malzemenin elastisite sabiti'

$\{\varepsilon_0\}$ = başlangıç şekil değiştirme

$\{\sigma_0\}$ = " gerilmesi

α = genleşme katsayısı

Δt = sıcaklık değişimi

$\{D_T\}$ = sıcaklık elastisite matrisi' dir.

$$\delta U = \int_V \{\delta\varepsilon\}_i^T [D] \{\varepsilon\} dV - \int_V \{\delta\varepsilon\}_i^T [D] \{\varepsilon_0\} dV + \int_V \{\delta\varepsilon\}_i^T \{\sigma_0\} dV - \int_V \{\delta\varepsilon\}_i^T \cdot \alpha \cdot \Delta t \{D_T\} dV$$

$$\delta W = \int_V \{\delta u\}_i^T \{X\} dV + \int_A \{\delta u\}_i^T \{p\} dA + \int_S \{\delta u\}_i^T \{q\} ds + \{\delta\}^T P - \int_A c \{\delta w\}_i^T \{w\} dA$$

Burada;

u = yer değiştirme

X = kütlesel kuvvet

p = yüzeysel yük

q = çizgisel "

P = tekil yük

c = elastik yataklanma katsayısı'dır.

$\delta U = \delta W$

BÖLÜM III

7) SONLU ELEMANLAR YÖNTEMİ

7.1) GİRİŞ

Sonlu Elemanlar Yöntemi; sözkonusu bir sistemin problemin karakterine uygun sonlu elemanlara ayrılarak elde edilen elemanlar üzerinde iç ve dış kuvvetlerin enerjisinin minimizasyonu ve sonra bu elemanların birleştirilmesi esasında bir uygulama getirir. Bunun sonucu olarak mesnet şartları, sistemin ait özellikler dış yüklerin sürekli ya da ani değişimlerini kolayca gözönüne alınabilir. Dolayısıyla sonlu elemanlar yöntemi analitik metotlarla çözülemeyen karmaşık problemlere uygulanabilir. Yüzeysel sistemin tipik bölgelerinde eleman boyutları küçültülerek o bölgenin daha hassas incelenmesi mümkün olur. Diğer bir avantajda, sınır şartlarının problemin çözüm sırasına göre en son adımda hesaplara dahil edilmesidir. Böylelikle çeşitli sınır şartlarının probleme uygulanması kolaylaşır. Yeni hesaplara girilmez.

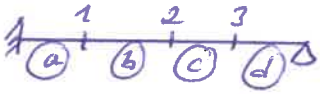
Sonlu elemanlar yönteminin kabuk sistemlere uygulanışına ait çalışmaların bir kısmında, sistem düzlemsel sonlu elemanlara ayrılmaktadır. Bu tip hesaplarda eleman özel elemanlarının sistem elemanlarına dönüştürülmesinde, sistem rijitlik matrisinin hesabında bazı güçlüklerle karşılaşılmaktadır. Kabuk formuna uygun eğrisel sonlu eleman kullanılması, bu güçlükleri ortadan kaldırmaktadır. Yapının geometrisine bağlı olarak elemanın şekli bir, iki veya üç boyutlu olabilir. Eleman sınırları düz veya eğri çizgi olabilir.

Sonlu elemanlar yönteminde sistem sonlu sayıda elemana ayrılmaktadır. Eleman boyutları küçültülse problemin hata oranı azalmakta, fakat çözüm süresi uzamaktadır. Sistemi oluşturan elemanların her birine sonlu eleman denir ve birleştikleri köşe noktaları da düğüm noktaları olarak adlandırılır (Şekil 7.1).

1) Çözüm yapılacak eleman çubuk ise; (1 boyutlu ise)



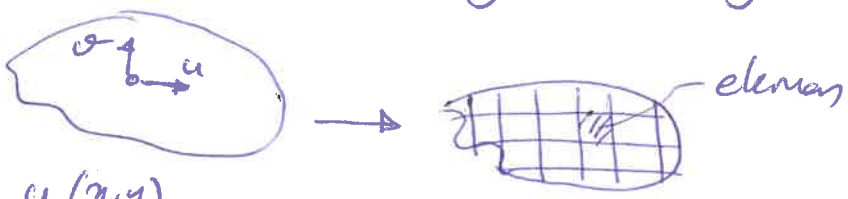
sonlu elemanlara ayrılması;



eleman seçimi;



2) Çözüm yapılacak eleman yüzey ise (2 boyutlu ise);

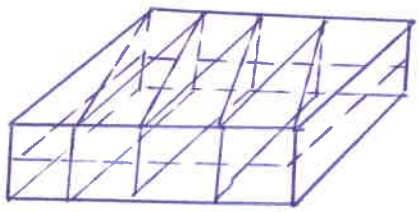


u (x,y)
v (x,y)

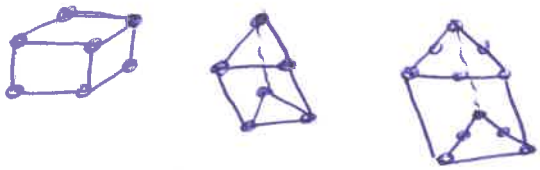
sonlu eleman seçimi;



3) Çözüm yapılacak eleman üç boyutlu ise;



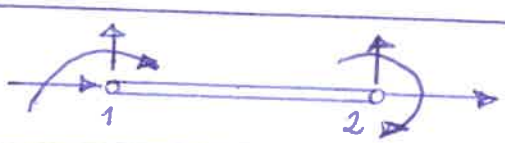
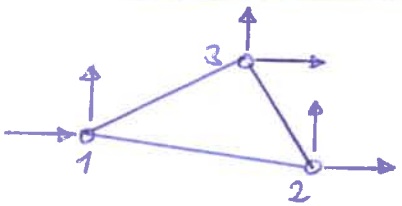
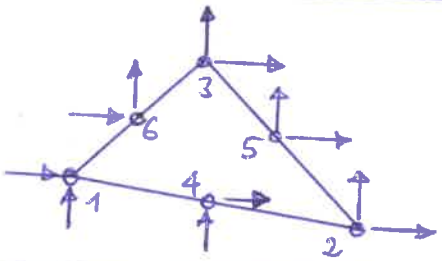
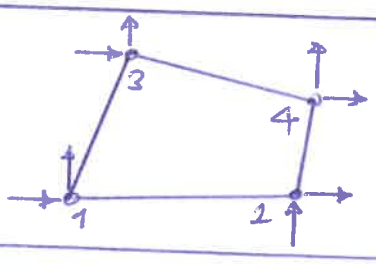
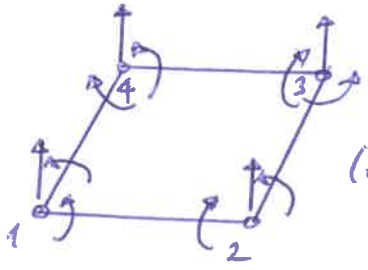
sonlu eleman seçimi;

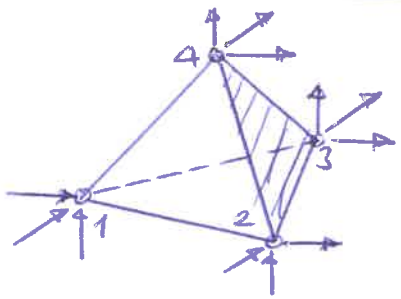
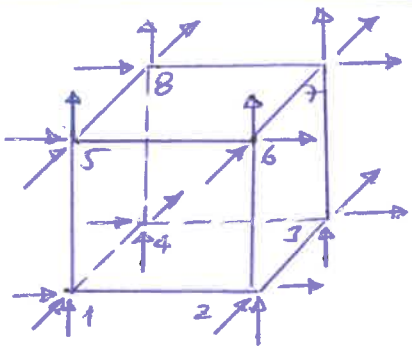
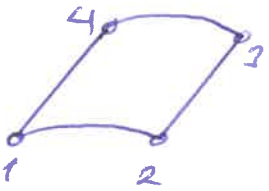
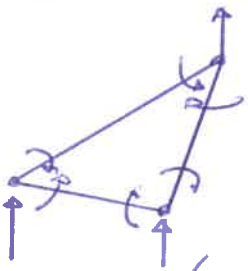


Sonlu eleman yüzeyinin şekil değiştirmesi, düğüm noktalarının deplasman parametrelerine bağlı olarak ifade edilebilir. Deplasman parametreleri; deplasman bileşenleri, dönmeler ve bükülme eğriliği gibi deplasman vektörlerini içermektedir. Eğilme hesaplarında düğüm noktalarının deplasman

parametrelerinin belirlenmesi, sistemin deplasman yüzeyinin ve her düğüm noktasındaki kesit tesirlerinin bulunması için yeterlidir. Stabilite hesabında ise, bu deplasman parametrelerine göre kurulan denklem takımının (Δ) katsayılar determinantını sıfır yapan yük, yani kritik yük (P_{kr}) belirlenir.

Bazı Sonlu Elemanlar Tipleri ve Serbestlik Dereceleri

Eleman	Şekil	Uygulama	Düğüm noktası	Düğüm noktası serbestlik derecesi
Kafes (Bar) Çubuğu		Kafes elemanı	2	1
Kiriş (Beam)		Çerçeve	2	3
Üçgen (Triangular)		Düzlem Gerilme	3	2
Üçgen (Triangular)		"	6	2
Dörtgen (Quadrilateral)		"	4	2
Dikdörtgen (Rectangular)	 (eğilme)	Plak	4	3

Eleman	Şekil	Uygulama	Düğüm noktası	Düğüm Noktası Serbestlik Derecesi
Dört üçgen yüzlü (Tetrahedron)		üç eksenli gerilme	4	3
Prizma (Prism)		11	8	3
Dörtgen kabuk eleman (Rectangular shell element)		silindirik kabuk, fanoz	4	5-6
Üçgen eleman	 (eğilme)	plâk	3	3

7.2) Deplasman Fonksiyonlarının Seçimi

Deplasman fonksiyonları; rijit cisim hareketi ve sabit deformasyon şartını sağlayacak şekilde seçilmelidir. Koordinat ekseni değiştirince çözüm farklı olmamalıdır. Bunun için deplasman fonksiyonları ya tam polinom veya tabii koordinatlarının fonksiyonu şeklinde olmalıdır. Elemanın içinde ve kenarında sürekli olmalıdır. Ayrıca iç ve dış kuvvetlerin içindeki türevlerde de sürekli olmalıdır.

Herhangi bir (e_i) elemanına ait ve bu elemanın içinde ya da sınırları üzerinde bir (i) noktasındaki deplasman (yer değiştirme) vektörü $\{u\}$ olsun;

$$\{u\}^e = \begin{Bmatrix} u(x,y) \\ v(x,y) \\ w(x,y) \end{Bmatrix} = [\phi(x,y)]\{a\}$$

Burada $[\phi(x,y)]$ seçilen deplasman fonksiyonudur. Hesap kolaylığı bakımından genellikle polinom seçilir. Pascal üçgeni polinomların seçilmesine yardımcı olur. Polinomlarda türev ve integral işlemleri daha kolaydır. Gerçek çözüme istenilen yakınsamı sağlamak mümkündür. Pascal polinomları "şekil fonksiyonları" bölümünde anlatılmıştır. Seçilen deplasman fonksiyonları tam bir polinom ise geometrik izotropi sağlanır. Eğer polinom tam değil; fakat simetri varsa, yine geometrik izotropi vardır. Bağıntıda verilen $\{a\}$ bilinmeyen katsayılardır. Bu $\{a\}$ katsayılarının sayısı, bir elemandaki düğüm noktalarının deplasman parametrelerinin toplam sayısına eşit olmalıdır.

Örnek: Yer değiştirme vektörü bir polinom olsun,

$$w = a_1 + a_2 x + a_3 x^2 + a_4 x^3$$

Bu durumda deplasman fonksiyonu;

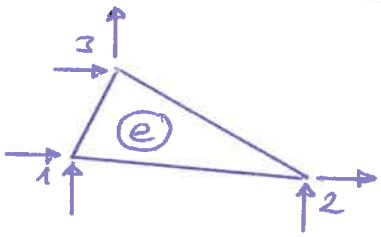
$$\{\phi_{(x,y)}\} = [1, x, x^2, x^3]$$

ve bilinmeyen katsayılar matrisi;

$$\{a\} = \begin{Bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ a_4 \end{Bmatrix}$$ olacaktır.

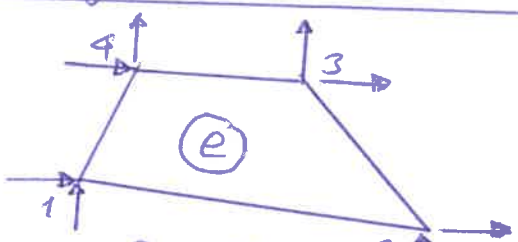
Seçilen elemanın düğüm noktası parametreleri ise;

Üç düğüm noktalı elemanda



$$\{d\} = \begin{Bmatrix} [d]_1 \\ [d]_2 \\ [d]_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} u_1 \\ v_1 \\ u_2 \\ v_2 \\ u_3 \\ v_3 \end{Bmatrix}$$

dört düğüm noktalı elemanda



$$\{d\} = \begin{Bmatrix} [d]_1 \\ [d]_2 \\ [d]_3 \\ [d]_4 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} u_1 \\ v_1 \\ u_2 \\ v_2 \\ u_3 \\ v_3 \\ u_4 \\ v_4 \end{Bmatrix}$$

şeklindedir. Elemanın herhangi bir (i) düğüm noktasında tanımlı deplasman parametreleri en genel halde;

$$\{d\}_i = \{u, v, w, \theta_x, \theta_y, \theta_z, \tau, \dots\}$$

$$i = 1, 2, 3, 4 \dots$$

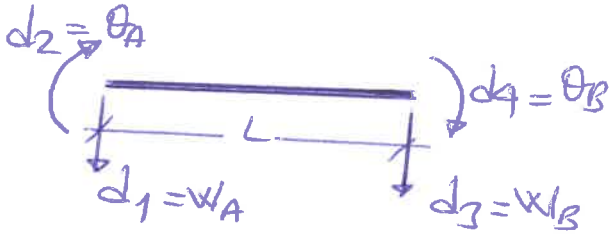
şeklindedir.

Eleman düğüm noktası deplasmanları $\{d\}$ ile, polinom sabitleri $\{a\}$ arasındaki bağı veren $[A]$ bağ matrisi ile, elemanın düğüm noktalarının deplasman parametrelerinin $\phi(x,y)$ ve $\phi(x,y)$'nin türevleri cinsinden yazılmış değerlerin düğüm noktası koordinatlarının yerlerine konulması ile bulunur.

Örneğin; Yer değiştirme vektörü,

$w = a_1 + a_2 x + a_3 x^2 + a_4 x^3$ olsun.

$$w = [\phi(x)]\{a\} = [1, x, x^2, x^3]\begin{Bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ a_4 \end{Bmatrix}$$



$$w = a_1 + a_2 x + a_3 x^2 + a_4 x^3$$

$$\theta = \frac{dw}{dx} = 0 + a_2 + 2a_3 x + 3a_4 x^2$$

A(0,0) noktasında X yerine 0 yazılırsa; $w_A = a_1 + 0 + 0 + 0$

$\theta_A = 0 + a_2 + 0 + 0$

B(L,0) " x " L "

$w_B = a_1 + a_2 L + a_3 L^2 + a_4 L^3$

$\theta_B = 0 + a_2 + 2a_3 L + 3a_4 L^2$ olur. Buradan $[A]$ matrisi,

$$[A] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & L & L^2 & L^3 \\ 0 & 1 & 2L & 3L^2 \end{bmatrix}$$ elde edilir.

Burada $\{d\}$ ile $\{a\}$ matrisleri bilinmeyenlerdir. Bağ matrisi vasıtasıyla bilinmeyen yalnız $\{d\}$ deplasman parametreleri kalır ve $\{a\}$ katsayıları $\{d\}$ deplasman parametreleri cinsinden hesaplanır.

$$\{d\} = [A]\{a\}$$

$$\{a\} = [A]^{-1}\{d\}$$

$[B] = [A]^{-1}$ dersek;

$\{a\} = [B]\{d\}$ olur. Bu bağıntıyı $\{u\} = \begin{Bmatrix} u(x,y) \\ v(x,y) \\ \phi(x,y) \end{Bmatrix} = [\phi(x,y)]\{a\}$ bağıntısında yerine koyarsak;

$$\{u\} = \begin{Bmatrix} u(x,y) \\ v(x,y) \\ w(x,y) \end{Bmatrix} = [\phi(x,y)][B]\{d\}$$

elde edilir ki: bu durumda elemanın deplasman vektörü, elemanın düğüm noktalarının deplasman parametreleri cinsinden belirlenmiş olur. Bağıntıdaki $[\phi(x,y)][B]$ ifadesine şekil fonksiyonu denir.

$$[\phi(x,y)][B] = [N]$$

Bağıntıdan deplasman parametreleri kadar şekil fonksiyonu elde edilir.

$$\{u\} = [N]\{d\}$$

Şekil değiştirmeler de;

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \partial/\partial x & 0 \\ 0 & \partial/\partial y \\ \partial/\partial y & \partial/\partial x \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u \\ v \end{Bmatrix}$$

$[\Delta]$ = operatör matris

$$\{\varepsilon\} = [\Delta]\{u\}$$

$$\{u\} = [N]\{d\}$$

$$\{\varepsilon\} = [\Delta][N]\{d\} = [G]\{d\}$$

$[G]$: şekil değiştirme matrisi

(1) düğüm noktasındaki d_1 deplasman parametresine ait N_1 şekil fonksiyonu öyle hesaplanır ki; (1) düğüm noktasının (x,y,z) koordinatları konduğu zaman,

$$N_1 = 1 \; ; \quad N_2 = N_3 = \cdots N_n = 0$$

olur. Belirlenen bu şekil fonksiyonları, eleman şekli ve boyutu değişmediği sürece her elemanda aynıdır. Yalnız deplasman parametreleri elemandan elemana değişir. Problemde bu deplasman parametreleri bilinmeyen olarak hesaplanır.

7.3) Genel Düzlük Hâlinde Sonlu Elemanlar Yöntemiyle Eğilme Hesabı

Dengede olan bir cismin, herhangi bir yer değiştirmesinde iç kuvvetlerin işi, dış kuvvetlerin işine eşittir. İç kuvvetlerin virtüel işini δU, dış kuvvetlerin virtüel işini δW olarak gösterirsek;

$$\delta U = \delta W \quad \text{'dir.}$$

Tabii durum gerçek yüklere, ı birim durumu ise viktüel yer değiştirme ve viktüel şekil değiştirme durumu olarak alınıp viktüel iç kuvvetlerle, viktüel dış kuvvetler ışını yazarsak;

$$\delta U = \int_V \{\delta\varepsilon\}_i^T \sigma \, dV$$

$$\{\sigma\} = [D]\left(\{\varepsilon\} - \{\varepsilon_0\}\right) + \{\sigma_0\} - \alpha \cdot \Delta t \{D_T\}$$

Burada;

$[D]$ = malzeme elastoplastik matrisini

$\{\varepsilon_0\}$ = başlangıç şekil değiştirmesini

$\{\sigma_0\}$: başlangıç gerilmesini

α : genleşme katsayısını

Δt : sıcaklık değişimini

$\{D_T\}$: sıcaklık elastoplastik matrisini göstermektedir.

$\{\sigma\}$ ifadesini δU bağıntısında yerine yazarsak;

$$\delta U = \int_V \{\delta\varepsilon\}_i^T [D]\{\varepsilon\} dV - \int_V \{\delta\varepsilon\}_i^T [D]\{\varepsilon_0\} dV + \int_V \{\delta\varepsilon\}_i^T \{\sigma_0\} dV - \int_V \{\delta\varepsilon\}_i^T \alpha \Delta t \{D_T\} dV$$

$$\delta W = \int_V \{\delta u\}_i^T \{X\} dV + \int_A \{\delta u\}_i^T \{p\} dA + \int_S \{\delta u\}_i^T \{q\} ds + \{d\}^T P - \int_A c \{\delta w\}_i^T (w) dA$$

şeklinde bağıntılar elde edilir. Burada;

u: yer değiştirmeyi

X: kütle kuvvetini

p= yüzeysel yük

q= çizgisel "

P= tekil "

c = elastik yataklanma katsayısını göstermektedir.

74) Sonlu Elemanlar Yöntemi ile Stabilite Hesabı

Kesit kabiliklerinin sistem boyutlarına göre çok küçük olması halinde yapının narinliği söz konusu olur. Narinliğin artması büyük deplasmanlara sebep olacağından, birinci mertebe teorisi yerine, ikinci mertebe teorisiyle hesap gerekmektedir. Dolayısıyla sistemin stabilite hesabı önem kazanmaktadır. Stabilite hesabında denge konumu bellidir. Denge durumunun kararlı olup olmadığı araştırılır ve kararlı denge konumunu oluşturan şartlar incelenir.

Stabilite hesabında yapılan kabuller;

a) Denge denklemleri şekil değiştirmiş sistem üzerinde yazıldığı için elastik stabilite lineer olmayan bir teoridir. Yük-yer değiştirme arasında artık bir orantılılık bulunmaz. Bu nedenle etkiyen dış yüklerin aralarındaki oran sabit kalacak şekilde arttırıldığı kabul edilir.

b) Sistem lineer olmadığından süperpozisyon kuralı, Betti-Karşılık teoremi geçerli değildir.

c) Manbran kesit tesirlerinin büyük değerler aldığı göz önüne alınarak yalnızca membran [N] ikinci mertebe etkileri hesaba katılarak, eğilme ve burulma momentlerinin ikinci mertebe etkileri ihmal edilecektir.

Toplam Potansiyel Enerji Denklemi;

$$\Pi = U + V$$

şekil değiştirme enerjisi U; eğilme ve membran şekil değiştirme enerjisi olarak ayrıkta alınırsa,

$$\Pi = U_m + U_e + V$$ olur.

$$U_m = \frac{C}{2}\iint (\varepsilon_x^2 + \varepsilon_y^2 + 2\nu\varepsilon_x\varepsilon_y + \frac{1-\nu}{2}\gamma_{xy}^2)\,dx\,dy$$

$$U_b = \frac{D}{2}\iint (k_x^2 + k_y^2 + 2\nu k_x k_y + 2(1-\nu)k_{xy}^2)\,dx\,dy$$

$$U = \frac{C}{2}\iint (\varepsilon_x^2 + \varepsilon_y^2 + 2\nu\varepsilon_x\varepsilon_y + \frac{1-\nu}{2}\gamma_{xy}^2)\,dx\,dy + \frac{D}{2}\iint (k_x^2 + k_y^2 + 2\nu k_x k_y + 2(1-\nu)k_{xy}^2)\,dx$$

Uzaysal bir sistemin yüzeyi üzerine etkiyen yüklerin x, y, z doğrultularındaki bileşenleri P_x, P_y, P_z ise ve elemanın ortalama yüzeyi üzerindeki bir noktanın yerdeğiştirme bileşenleri de u, v ve w ise tatbik edilen yüklerin potansiyel enerjisi için bağıntı;

$$W = -\iint (P_x \cdot u + P_y \cdot v + P_z \cdot w)\,dx\,dy \quad \text{olur}$$

Sistem konservatif ise dış kuvvetlerin potansiyel enerjisi negatiftir. Bu bağıntıda yerdeğiştirmeler ve kuvvetler aynı yöndedir. Yukarıda verilen membran ve eğilme şekil değiştirme enerji bağıntıları ince, elastik bir dairesel kabuğa ait olup ε_x, ε_y ve γ_{xy} kabuk orta yüzeyinin uzama ve kayma şekildeğiştirme bileşenleri; k_x, k_y ve k_{xy} ise ortalama yüzeyin eğrilik değişimi ve burulma eğriliğidir. Bunlara kabuğun deformasyon-deplasman bağıntıları veya kinematik münasebetleri veya uyumluk denklemleri denir. Ortalama yüzeyin u, v, w deplasman bileşenlerinin fonksiyonlarıdır.

Novozhilov teorisine göre, basık olmayan dairesel silindiklerin nonlineer deformasyon-deplasman bağıntıları ortalama yüzeyin u, v, w deplasman bileşenleri cinsinden ifadeleri aşağıdaki şekildedir. Burada r silindirin yarıçapını göstermektedir.

$$\varepsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{2}\beta_x^2 = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{2}\left(-\frac{\partial w}{\partial x}\right)^2$$

$$\varepsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{w}{r} + \frac{1}{2}\beta_y^2 = \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{w}{r} + \frac{1}{2}\left(\frac{v}{r} - \frac{\partial w}{\partial y}\right)^2$$

$$\gamma_{xy} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} + \beta_x\beta_y = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}\left(-\frac{\partial w}{\partial x}\right)\left(\frac{v}{r} - \frac{\partial w}{\partial y}\right)$$

$$k_x = -\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}, \quad k_y = \frac{\partial v}{r\partial y} - \frac{\partial^2 w}{\partial y^2}, \quad 2k_{xy} = \frac{2\partial v}{r\partial x} - 2\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}$$

$$\beta_x = -\frac{\partial w}{\partial x} \qquad \beta_y = \frac{v}{r} - \frac{\partial w}{\partial y}$$

7.4.1) Stabilitede Minimum Potansiyel Enerji Teoremi

Gerçek denge konumuna yakın ikinci bir konum ele alırsak;

$u \to u_0 + u_1$

$v \to v_0 + v_1$

$w \to w_0 + w_1$ olacaktır

Burada u_0, v_0 ve w_0 denge konumuna karşı gelen yerdeğiştirmelerdir. u_1, v_1 ve w_1 de ikinci konumu elde etmek için verilen sonsuz küçük virtüel değişimlerdir. u, v ve w ise ikinci konuma karşı gelen yerdeğiştirmelerdir. Iyle bir şekil değiştirme bağıntıları;

$$\varepsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)^2$$

$$\varepsilon_x^2 = \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \frac{\partial u}{\partial x}\left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)^2 + \frac{1}{4}\left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)^4$$

Potansiyel enerjideki değişim ise,

$\Delta U = \delta U + \frac{1}{2!}\delta^2 U + \frac{1}{3!}\delta^3 U \cdots$ şeklindedir.

Burada $\frac{1}{2!}\delta^2 U$ değeri ; ($w_0 = 0$ tam)

$$\frac{1}{2!}\delta^2(\varepsilon_x^2) = \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \frac{\partial u_0}{\partial x}\left(\frac{\partial w_1}{\partial x}\right)^2$$ 'dir.

$\varepsilon_y, \gamma_{xy}, k_x, k_y$ ve k_{xy} için benzer ifadeleri yazarsak membran ve eğilme şekil değiştirme enerjisinin ilinci varyasyonu aşağıdaki şekli alır;

$$\frac{1}{2!}\delta^2 U_m = \frac{C}{2}\iint\Big\{(\delta\varepsilon_x)^2+(\delta\varepsilon_y)^2+2\nu(\delta\varepsilon_x)(\delta\varepsilon_y)+\frac{1-\nu}{2}(\delta\gamma_{xy})^2$$
$$+\Big[(\varepsilon_{x_0}+\nu\varepsilon_{y_0})(\delta^2\varepsilon_x)+(\varepsilon_{y_0}+\nu\varepsilon_{x_0})(\delta^2\varepsilon_y)+\frac{1-\nu}{2}\gamma_{xy_0}(\delta^2\gamma_{xy}$$

$$\frac{1}{2!}\delta^2 U_b = \frac{D}{2}\iint\Big[(\delta k_x)^2+(\delta k_y)^2+2\nu(\delta k_x)(\delta k_y)+2(1-\nu)(\delta k_{xy})^2\Big]dxdy$$

Bu durumda toplam enerjinin ilinci varyasyonu;

$$\frac{1}{2!}\delta^2 U = \frac{C}{2}\iint(\varepsilon_{x_1}^2+\varepsilon_{y_1}^2+2\nu\varepsilon_{x_1}\varepsilon_{y_1}+\frac{1-\nu}{2}\gamma_{xy_1}^2)\,dxdy$$
$$+\frac{1}{2}\iint(N_{x_0}\beta_{x_1}^2+N_{y_0}\beta_{y_1}^2+2N_{xy_0}\beta_{x_1}\beta_{y_1})dxdy$$
$$+\frac{D}{2}\iint\Big[k_{x_1}^2+k_{y_1}^2+2\nu k_{x_1}k_{y_1}+2(1-\nu)k_{xy_1}^2\Big]dxdy$$

Bu bağıntıdaki deplasman-deformasyon ilişkisi ise;

$$\varepsilon_{x_1}=\frac{\partial u_1}{\partial x} \qquad \varepsilon_{y_1}=\frac{\partial v_1}{\partial y}+\frac{w_1}{r} \qquad \gamma_{xy_1}=\frac{\partial u_1}{\partial y}+\frac{\partial v_1}{\partial x}$$

$$k_{x_1}=-\frac{\partial^2 w_1}{\partial x^2} \qquad k_y=\frac{\partial v_1}{r\partial y}-\frac{\partial^2 w_1}{\partial y^2} \qquad 2k_{xy_1}=\frac{2\partial v_1}{r\partial x}-\frac{2\partial^2 w_1}{\partial x\partial y}$$

$$\beta_{x_1}=-\frac{\partial w_1}{\partial x} \qquad \beta_{y_1}=\frac{v_1}{r}-\frac{\partial w_1}{\partial y}$$

Buradaki N_{x_0}, N_{y_0} ve N_{xy_0} değerleri membran denge denklemlerinden elde edilen membran kuvvetleridir

$$N_{x_0}=C\,(\varepsilon_{x_0}+\nu\varepsilon_{y_0})$$
$$N_{y_0}=C\,(\varepsilon_{y_0}+\nu\varepsilon_{x_0})$$
$$N_{xy_0}=C\,\frac{1-\nu}{2}\gamma_{xy_0}$$

Dış yüklerin potansiyel enerjisini veren bağıntı;

$W = -\iint (P_x \cdot u + P_y \cdot v + P_z \cdot w)\, dx dy$ idi. Bu bağıntının

Taylor varyasyonunda üçüncü dereceden terimler ihmal etmediğinden $\delta^2 W = 0$ olur Bu durumda;

$$\delta^2 \Pi = \delta^2 U_m + \delta^2 U_b \quad \text{olur.}$$

$\frac{1}{2!}\delta U$ bağıntısındaki (1) indisleri atılıp matris formda yazılırsa;

$$\frac{1}{2!}\delta \Pi = \frac{1}{2}\iint \{\varepsilon\}^T [D] \{\varepsilon\}\, dx dy + \frac{1}{2}\iint \{\beta\}^T [N_b] \{\beta\}\, dx dy$$

Bağıntı açık şekilde yazılırsa;

$$\frac{1}{2!}\delta^2 \Pi = \frac{1}{2}\iint \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \delta_{xy} \\ k_x \\ k_y \\ k_{xy} \end{Bmatrix} \begin{bmatrix} C\begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\nu}{2} \end{bmatrix} & [0] \\ [0] & D\begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\nu}{2} \end{bmatrix} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \delta_{xy} \\ k_x \\ k_y \\ k_{xy} \end{Bmatrix} dx dy + \frac{1}{2}\iint \begin{Bmatrix} -\frac{\partial w}{\partial x} \\ \frac{v}{r} - \frac{\partial w}{\partial y} \end{Bmatrix} \begin{bmatrix} N_{x0} & N_{xy_0} \\ N_{xy_0} & N_{y_0} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} -\frac{\partial v}{\partial x} \\ \frac{v}{r} - \frac{\partial w}{\partial r} \end{Bmatrix} + \int$$

$\{\varepsilon\} = [F]\{a\}$; $\{\beta\} = [G]\{a\}$ $[F]$; $[G]$: Türev matrisleridir.

$\{\varepsilon\} = [F][B]\{d\}$

$\{\beta\} = [G][B]\{d\}$

Bu durumda;

$$\frac{1}{2!}\delta^2 \Pi = \frac{1}{2}\{d\}^T \left(\iint [B]^T [F]^T [D] [F] [B]\, dx dy + \right.$$

$$\left. + \iint [B]^T [G]^T [N_b] [G] [B]\, dx dy \right) \{d\}$$

olacaktır.

Bağıntının kapalı çözümü;

$$\delta^2\Pi = \{d\}^T\left([k_e] + \lambda[n_e]\right)\{d\}$$ olur.

Burada; $[k_e]$ = eleman rijitlik matrisi

λ : yük parametresi

$[n_e]$: eleman geometrik yük matrisidir.

$[n_e]$ Tekinci mertebe etkilemesinden meydana gelen ilave yüklere Sisteme geçme çevirme matrisleri veya birleştirme metodu ile yapılarak $[K]$ sistem rijitlik matrisi ve $[N]$ sistem geometrik yük matrisi elde edilir. Elemanın deplasman parametreleri $\{d_{ei}\}$; sistemin deplasman parametreleri $\{D_s\}$ ise; bütün sistemin potansiyel enerjisinin minimizasyonunu yaparsak;

$$\frac{\partial(\delta^2\Pi)_{sistem}}{\partial D_s} = \sum \frac{\delta(\delta^2\Pi)_{eleman}}{\partial d_{ei}} = 0 \quad (D_s = D_1, D_2, D_3, \ldots D_n)$$

elde edilir

7.4.2) Stabilite Problemının Çözümü

Burkulma yükü, sistemin ilk durumunu kararsız hale getiren en küçük yük parametresi olarak tanımlanabilir. Dış yüklerden oluşan matematiksel ifadeleri bir yük parametresine bağlı olarak ifade edilebilir. Tekinci mertebe hesaplarında süperpozisyon prensibi geçerli olmadığı için yükü belli bir değerin katları şeklinde gösterebiliriz. $[N_0] = \lambda[n_0]$ gibi. Burada λ yük parametresidir. Stabilite denklemi;

$$\left([K] + \lambda[N]\right)\{D_s\} = 0$$ şeklindedir.

Bu denklem takımına problemin sınır şartları uygulanır. Sistemin ilk konumunun kararsız hale gelmesi ve $\{\Delta_s\}=0$ farklı kararlı başka bir denge konumunun bulunması için yukarıdaki denklem takımının katsayılar (Δ) determinantının sıfır olmasını gerektirir. (Δ) determinantını sıfır yapan yük iki şekilde bulunur:

1) Sıfırdan başlayarak P'ye artan değerler verilir ve (Δ) determinantı hesaplanır. Pozitiften negatife geçtiği bölgede bu aralıklar sıklaştırılarak (Δ) determinantını sıfır yapan P_{kr} değeri bulunmuş olur.



2) Ardışık yaklaşım yöntemi ile de P_{kr} yük hesaplanır.



7.5) Dinamik Diz Etkiler Halinde Sonlu Elemanlar Yöntemi

İnşaat mühendisliğinde deprem, darbe kuvvetleri, makine titreşim kuvvetleri ve ani patlama kuvvetleri zamanla değişen kuvvetlerdir. Diz etkilerin zamana bağlı olarak sonlu bir hızla değişmesi halinde atalet kuvvetlerinin de gözönüne alınması gerekmektedir. Sisteme etkiyen kuvvetler zamanın bir fonksiyonu ise, bu kuvvetlerin etkidiği yapıların tepkisi de zamanın bir fonksiyonudur ve zamana bağlı olarak meydana gelecek yer değiştirmelerin hızları, atalet kuvvetlerini meydana getirirler. Bu durumda sistem iki tip yükün etkisi altında düşünülebilir; harekete neden olan diz yük ve hareketin sınırlanmasına karşı duran atalet kuvvetleri. Yapı özellikleri ve etkiyen kuvvetlerden yola çıkılarak, titreşim sistemine ait mekanik bir yay-kütle modeli oluşturulur ve kütlelere ait titreşim denklemleri kurularak çözüme ulaşılır.

Eleman üzerine yayılı kütleler düğüm noktalarına toplanabilir. Eleman boyutlarının büyük olması halinde gerçeğe sonuca iyi yaklaşmak için nokta kütle sayısını arttırmak ve mümkün olduğu kadar yayılı kütle haline yaklaşmak gerekir. Yüzeysel kütlelerden doğan atalet kuvvetlerinin gerçek yayılışları ile hesaba katılması uygundur. Yayılı kütlelerin ortalama yüzeye indirgendiği kabûlü yapılacaktır. Zamana bağlı sabit değiştirme, ortalama yüzeyin yer değiştirmeleri cinsinden belirlendiğinden, yayılı atalet kuvvetleri yalnız yer değiştirme bileşenlerine bağlı olacaktır. Dönme bileşenlerine bağlı olarak ayrıca yüzeysel yayılı momentler meydana gelmeyecektir. Herhangi bir t anındaki

yüzeysel elemanın hareket denklemi D'Alembert prensibine göre; sönüm etkisi eden atalet kuvvetleri, sönüm etkileri ve yay kuvvetleriyle beraber dış kuvvetler denge halinde olmalıdır. Bilindiği gibi sönüm fiziksel de, μ sönüm katsayısı olmak üzere viskoz bir ortamda hızla orantılı bir sönüm kuvveti gibi düşünülmektedir. Birim alana gelen kütle yoğunluğu ρ olduğuna göre; titreşime maruz kütlenin etkisi altında kaldığı atalet kuvveti, sönüm kuvveti ve yay kuvvetlerinin ilave dış yükler gibi düşünülmesiyle virtüel iş teoremi uygulanabilir.

δU iç kuvvetlerin, δW dış kuvvetlerin virtüel işi;

$$\delta U = \int_V \{\delta\varepsilon\}_i^T \sigma \, dV$$

$$\{\sigma\} = [D]\left(\{\varepsilon\} - \{\varepsilon_0\}\right) + \{\sigma_0\} - \alpha \cdot \Delta t \{D_T\}$$

ε_0 başlangıç şekil değiştirmelerini ve σ_0 başlangıç gerilmelerini ihmal edersek;

$$\{\sigma\} = [D]\{\varepsilon\} - \alpha \cdot \Delta t \{D_T\} \quad \text{elde edilir.}$$

$$\delta U = \int_V \{\delta\varepsilon\}_i^T [D]\{\varepsilon\} dV - \int_V \{\delta\varepsilon\}_i^T \alpha \cdot \Delta t \{D_T\} dV$$

$$\delta W = -\rho \int_V \{\delta u\}_i^T \{\ddot{u}\} dV - \mu \int_V \{\delta u\}_i^T \{\dot{u}\} dV - c \int_A \{\delta u\}_i^T \{u\} dA + \int_A \{\delta u\}_i^T \{p\} dA$$

Tabii durum gerçek yüklene, i birim durumu ise virtüel değişken ve virtüel şekil değiştirme durumu olarak alınıp; virtüel iş teoremi uygulanırsa dış kuvvetlerle, iç kuvvetlerin eşitliğini yazarsak;

$\delta U = \delta W$ olur. Virtüel yer değiştirmeler cinsinden değerlendirecek olursak

$\delta u = [N]\{\delta d\}$

$\delta \dot{u} = [N]\{\delta \dot{d}\}$

$\delta \ddot{u} = [N]\{\delta \ddot{d}\}$

$\delta \varepsilon = [G]\{\delta d\} = [\Delta N]\{\delta d\}$ şeklinde olur. Bu durumda;

$\delta U = \delta W$

$$\{\delta d\}^T \left[\int_V [\Delta N]^T [D][\Delta N]\, dV\right]\{d\} - \{\delta d\}^T [\alpha \Delta t] \int_V [\Delta N]^T \{D_T\}\, dV] =$$

$$- \{\delta d\}^T \left[\rho \int_V [N]^T [N]\, dV\right]\{\ddot{d}\} - \{\delta d\}^T \left[\mu \int_V [N]^T [N]\, dV\right]\{\dot{d}\}$$

$$- \{\delta d\}^T \left[c \int_A [N(w)]^T [N(w)]\, dA\right]\{d\} + \{\delta d\}^T \int_A [N]^T p(t)\, dA$$

Buradan;

$[k_e] = \int_V [\Delta N]^T [D] [\Delta N]\, dV$: eleman rijitlik matrisi

$[C_e] = \mu \int_V [N]^T [N]\, dV$: " sönüm "

$[M_e] = \rho \int_V [N]^T [N]\, dV$: " kütle "

$[S_e] = c \int_A [N(w)]^T [N(w)]\, dA$: " elastik yataklanma matrisi

$\{q_e(t)\}_T = \alpha \cdot \Delta t \int_V [\Delta N]^T \{D_T\}\, dV$: Elemanın zamana bağlı sıcaklık değişimi

$\{q_e(t)\}_0 = \int_A [N]^T p(t)\, dA$: " " " dış yük

kısaltmaları yapacak olursak bağıntı;

$$[k_e]\{d(t)\} + [C_e]\{\dot{d}(t)\} + [M_e]\{\ddot{d}(t)\} + [S_e]\{d(t)\} = \{q_e(t)\}_0 + \{q_e(t)\}_T$$

halini alır. Buradan sisteme geçiş;

$[K]\{d(t)\}+[C]\{\dot{d}(t)\}+[M]\{\ddot{d}(t)\}+[S]\{d(t)\}=\{Q(t)\}_o+\{Q(t)$

halini alır.

7.5.1) Sönümsüz Serbest Titreşim

Sönümsüz serbest titreşimde sönüm matrisi, zamana bağlı dış yü ve sıcaklık değişimi sıfır olacaktır. Elastik yataklanma etkileri de yoksa yukarıdaki bağıntı;

$[K]\{d(t)\}+[M]\{\ddot{d}(t)\}=0$ olur.

Titreşim basit harmonik hareket olduğundan bu homojen diferansiyel denklemin çözümü;

$\{d\}=\{\bar{d}\}\sin(\omega t+\theta)$ 'dır.

Burada $\{\bar{d}\}$ kütlelerin ötelenme genlikleridir. Bu fonksiyonun türevi alınıp bağıntıdaki yerine yazılırsa titreşim bağıntısı;

$([K]-\omega^2[M])\{\bar{d}\}=0$ şeklini alır. $\{\bar{d}\}\neq 0$ çözümü için katsayılar determinantı sıfır olmalıdır.

$$|[K]-\omega^2[M]|=0$$

Bu determinantta frekans determinantı denir. Frekans determinantını sıfır yapan ω değerlerine özel frekans denir. $\lambda=\omega^2$ yazılır ve bağıntı $[M]^{-1}$ ile çarpılırsa;

$$|[K][M]^{-1}-\lambda[M][M]^{-1}|=0$$

$[A]-\lambda[I]=0$ olur.

Bu durumda problem özdeğer problemine dönüşür ve

n. mertebeden sabit katsayılı bir polinomun köklerinin bulunmasına indirgenmiş olur. n adet kökü olan bu denklemden n adet λ_i; dolayısıyla ω_i özel açısal frekansları bulunur. Her ω_i özel değerine karşılık $([K]-\omega^2[M])\{\bar{d}\}=0$ homojen denkleminden $\{\bar{d}\}_i$ değerleri bulunur. $\{\bar{d}\}_i$ vektörüne, ω_i serbest titreşim frekansına karşı gelen serbest titreşim mod şekli denir. $\{\bar{d}\}_i$ vektörü yer değiştirmelere karşı gelmektedir. $\{\bar{d}\}_i$ kolon matrisleri yan yana yerleştirilerek kare $[\phi]$ modal matrisi elde edilir.

$$[\phi]=[\{\bar{d}\}_1,\{\bar{d}\}_2,\dots\dots\{\bar{d}\}_n]$$

Matrisin $\{\bar{d}\}_{ij}$ elemanı; j. modda, i. serbestlik derecesi doğrultusundaki yer değiştirmeyi göstermektedir.

$$\{d\}=\{\bar{d}\}_1 D_1+\{\bar{d}\}_2 D_2+\dots\dots+\{\bar{d}\}_n D_n \longrightarrow \{d\}=[\phi]\{D\}$$

Buradaki D_i değerlerine genelleştirilmiş koordinat denir. $\{\bar{d}\}_i$ ve $\{\bar{d}\}_j$ mod vektörleri hem kütle matrisine, hem de eşitlik matrisine göre ortogonaldir.

7.5.2) Sönümsüz Zorlanmış Titreşim

$$[K]\{d(t)\}+[M]\{\ddot{d}(t)\}=\{Q(t)\}$$

7.5.3) Sönümlü Serbest Titreşim

$$[K]\{d(t)\}+[C]\{\dot{d}(t)\}+[M]\{\ddot{d}(t)\}=0$$

7.5.4) Sönümlü Zorlanmış Titreşim

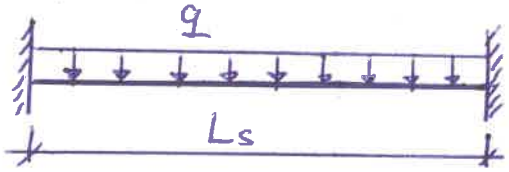
$$[K]\{d(t)\}+[C]\{\dot{d}(t)\}+[M]\{\ddot{d}(t)\}=\{Q(t)\}$$

BÖLÜM V

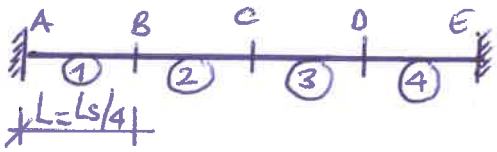
9) SONLU ELEMANLAR YÖNTEMİ İLE ÇUBUK HESABI

9.1) Çubuğun Eğilme Hesabı

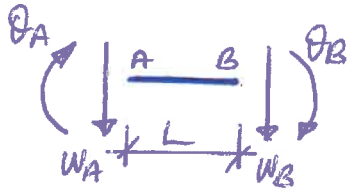
Çubuğun eğilme hesabı için L_s uzunluğunda, düzgün yayılı yükle yüklenmiş bir elemanı dikkate alalım ve bu elemanı 4 parçaya bölelim.

a) 

← Ele alınan çubuk eleman

b) 

← Çubuğun sonlu elemanlara ayrılması

c) 

← Sonlu eleman parçası ve kabul edilen yer değiştirmeler

d) $A(0,0)$; $B(L,0)$ ← Elemanın koordinatları

e) $$\{d\} = \begin{Bmatrix} w_A \\ \theta_A \\ w_B \\ \theta_B \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} d_1 \\ d_2 \\ d_3 \\ d_4 \end{Bmatrix}$$ ← Elemanın düğüm noktası yerdeğiştirme parametreleri (matrisi)

f) 

g) $$\{D\} = \begin{Bmatrix} D_1 \\ D_2 \\ D_3 \\ D_4 \\ D_5 \\ D_6 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} w_A \\ \theta_A \\ w_B \\ \theta_B \\ w_C \\ \theta_C \end{Bmatrix}$$ ← Sistem yer değiştirme matrisi

9.1.1) Deplasman Fonksiyonlarının Seçimi

Deplasman fonksiyonları rijit cisim hareketini ve sabit deformasyon şartını sağlayacak şekilde seçilmelidir. Koordinat eksenleri değiştirince çözüm farklı olmamalıdır. Bunun için deplasman fonksiyonu ya tam polinom veya tabii koordinatların fonksiyonu şeklinde olmalıdır. Ayrıca iç ve dış kuvvetlerin izin verdiği türevlerde de sürekli olmalıdır. Bu çalışmada deplasman fonksiyonu polinom olarak seçilmiştir. Elemanda bilinmeyen dört deplasman parametresi olduğu için, dört bilinmeyenli deplasman fonksiyonu seçilmiştir.

$$w = a_1 + a_2 x + a_3 x^2 + a_4 x^3$$

$$w = [\phi(x)]\{a\} = [1, x, x^2, x^3] \begin{Bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ a_4 \end{Bmatrix}$$

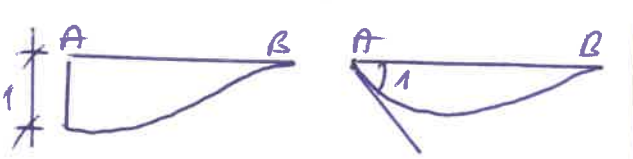
9.1.2) Şekil Fonksiyonlarının Tayini

Şekil fonksiyonlarını iki şekilde hesaplamak mümkündür. Birincisi çubuk uç deplasmanlarının hesabı ile, ikincisi de bağ matrisleri yardımıyladır.

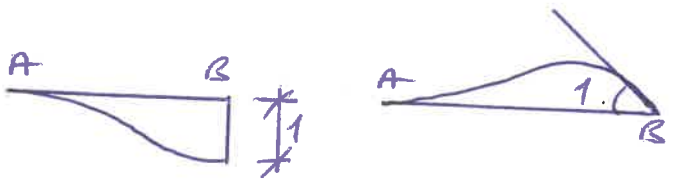
a) Çubuk uç deplasmanları yardımı ile şekil fonksiyonlarının tayini:

$$w = a_1 + a_2 x + a_3 x^2 + a_4 x^3$$

$$\theta = \frac{\partial w}{\partial x} = a_2 + 2a_3 x + 3a_4 x^2$$

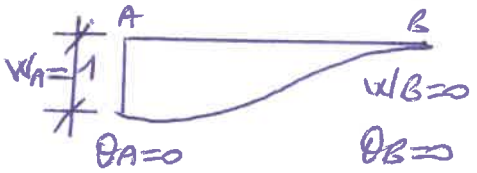


A ucunun çökmesi ve dönmesi



B ucunun çökmesi ve dönmesi

- N_1 şekil fonksiyonunun tayini ($w_A=1$, $w_B=\theta_A=\theta_B=0$)



Koordinatlar A(0,0) ; B(L,0)

$$w = a_1 + a_2 x + a_3 x^2 + a_4 x^3$$

$$\theta = \frac{\partial w}{\partial x} = 0 + a_2 + 2a_3 x + 3a_4 x^2$$

A ve B uçunun koordinat değerlerini w_A, θ_A, w_B ve θ_B bağıntılarında yerlerine yazarsak;

$$w_A = 1 = a_1 + 0 + 0 + 0$$
$$\theta_A = 0 = 0 + a_2 + 0 + 0$$
$$w_B = 0 = a_1 + a_2 L + a_3 L^2 + a_4 L^3$$
$$\theta_B = 0 = 0 + a_2 + 2a_3 L + 3a_4 L^2$$

Bu değerlere göre;

$a_1 = 1$; $a_3 = -\frac{3}{L^2}$

$a_2 = 0$; $a_4 = \frac{2}{L^3}$

bulunur. Bu durumda da;

$N_1 = 1 - \frac{3}{L^2} x^2 + \frac{2}{L^3} x^3$ olarak N_1 şekil fonksiyonu bulunur.

$\xi = \frac{x}{L}$ denilirse ⟶ $N_1 = 1 - 3\xi^2 + 2\xi^3$ olur.

- N_2 şekil fonksiyonunun tayini ($\theta_A=1$, $w_A=w_B=\theta_B=0$)



$$w_A = 0 = a_1 + 0 + 0 + 0$$
$$\theta_A = 1 = 0 + a_2 + 0 + 0$$
$$w_B = 0 = a_1 + a_2 L + a_3 L^2 + a_4 L^3$$
$$\theta_B = 0 = 0 + a_2 + 2a_3 L + 3a_4 L^2$$

Bu çözümden;

$a_1 = 0$; $a_2 = 1$

$a_3 = -\frac{2}{L}$; $a_4 = \frac{1}{L^2}$

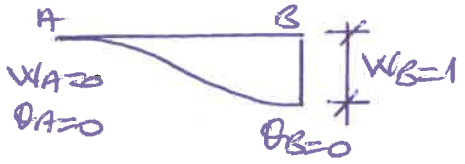
elde edilir.

Bu durumda N_2 şekil fonksiyonu;

$N_2 = L\left(\frac{x}{L} - 2\frac{x^2}{L^2} + \frac{x^3}{L^3}\right)$ olarak bulunur. $\xi = \frac{x}{L}$ ise

$N_2 = L(\xi - 2\xi^2 + \xi^3)$ olur.

- N_3 şekil fonksiyonunun tayini ($w_B=1$, $w_A=\theta_A=\theta_B=0$)



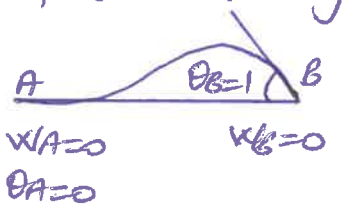
$$w_A=0=a_1+0+0+0$$
$$\theta_A=0=0+a_2+0+0$$
$$w_B=1=a_1+a_2L+a_3L^2+a_4L^3$$
$$\theta_B=0=0+a_2+2a_3+3a_4L^2$$

Bu çözümden; $a_1=0$; $a_2=0$; $a_3=\frac{3}{L^2}$; $a_4=-\frac{2}{L^3}$

$$N_3=3\frac{x^2}{L^2}-2\frac{x^3}{L^3}$$

$$N_3=3\xi^2-2\xi^3$$

- N_4 şekil fonksiyonunun tayini ($\theta_B=1$, $w_A=\theta_A=w_B=0$)



$$w_A=0=a_1+0+0+0$$
$$\theta_A=0=a_2+0+0$$
$$w_B=0=a_1+a_2L+a_3L^2+a_4L^3$$
$$\theta_B=1=a_2+2a_3L+3a_4L^2$$

$a_1=0$; $a_2=0$; $a_3=-\frac{1}{L}$; $a_4=\frac{1}{L^2}$

$$N_4=L\left(-\frac{x^2}{L^2}+\frac{x^3}{L^3}\right)$$

$$N_4=L\left(-\xi^2+\xi^3\right)$$

b) Bağ matrisi yardımıyla şekil fonksiyonlarının tayini

Elemanın düğüm noktası deplasmanları $\{d\}$ ile polinom sabitleri $\{a\}$ arasındaki bağı veren $[A]$ bağ matrisi ile, elemanın düğüm noktası deplasmanı parametrelerinin $\phi(x)$ ve $\phi(x)$'in türevleri cinsinden yazılmış bileşenlerinde düğüm noktası koordinatlarının yerine konulmasıyla bulunur.

$\{d\} = [A]\{a\}$

$\{a\} = [A]^{-1}\{d\}$

$[A]^{-1} = [B]$ dersek;

$\{a\} = [B]\{d\}$

$w = [\phi(x)]\{a\} = [\phi(x)][B]\{d\}$ Bu ifadedeki $[\phi(x)][B]$'ye şekil fonksiyonu denir.

$[N] = [\phi(x)][B]$

$w = a_1 + a_2 x + a_3 x^2 + a_4 x^3$

$\theta = \frac{\partial w}{\partial x} = a_2 + 2a_3 x + 3a_4 x^2$

A(0,0) ve B(L,0) düğüm noktası koordinatları ile ve bu koordinatlar iki bağımlılık yerlerine yazılırsa;

$$\left.\begin{matrix} w_A = a_1 + a_2 x + a_3 x^2 + a_4 x^3 \\ \theta_A = a_2 + 2a_3 x + 3a_4 x^2 \end{matrix}\right|_{x=0} \qquad \left.\begin{matrix} w_B = a_1 + a_2 x + a_3 x^2 + a_4 x^3 \\ \theta_B = a_2 + 2a_3 x + 3a_4 x^2 \end{matrix}\right|_{x=L}$$

$$[A] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & L & L^2 & L^3 \\ 0 & 1 & 2L & 3L^2 \end{bmatrix}$$

matrisi elde edilir. Buradan $[A]^{-1} = [B]$ matrisi hesaplanır.

$$[B] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -3/L^2 & -2/L & 3/L^2 & -1/L \\ 2/L^3 & 1/L^2 & -2/L^3 & 1/L^2 \end{bmatrix}$$

$w = [\phi(x,y)]\{a\} = [\phi(x,y)][B]\{d\}$

$[N_1, N_2, N_3, N_4] = \underbrace{[1, x, x^2, x^3][B]}_{[N]}$

$[A]^{-1} = [B]$ matrisinin matlab programı ile hesabı

```
>> syms L
>> syms A
>> syms B
>> syms N1
>> syms N2
>> syms N3
>> syms N4
>> syms x
>> syms x1
>> [A]=[1 0 0 0;0 1 0 0;1 L L^2 L^3;0 1 2*L 3*L^2]

A =

[ 1, 0,   0,     0]
[ 0, 1,   0,     0]
[ 1, L, L^2,   L^3]
[ 0, 1, 2*L, 3*L^2]

>> [B]=[A]^-1

B =

[      1,     0,      0,     0]
[      0,     1,      0,     0]
[ -3/L^2, -2/L,  3/L^2, -1/L]
[  2/L^3, 1/L^2, -2/L^3, 1/L^2]

>> [x1]=[N1 N2 N3 N4]

x1 =

[ N1, N2, N3, N4]

>> [x1]=[1 x x^2 x^3]*[B]

x1 =

[ (2*x^3)/L^3 - (3*x^2)/L^2 + 1, x - (2*x^2)/L + x^3/L^2, (3*x^2)/L^2 - (2*x^3)/L^3,
x^3/L^2 - x^2/L]

>>
```

$[x_1] = [N_1, N_2, N_3, N_4] * [B]$

$$[N_1, N_2, N_3, N_4] = [1, x, x^2, x^3] \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -3/L^2 & -2/L & 3/L^2 & -1/L \\ 2/L^3 & 1/L^2 & -2/L^3 & 1/L^2 \end{bmatrix}$$

$$N_1 = 1 - \frac{3}{L^2}x^2 + \frac{2}{L^3}x^3$$

$$N_2 = x - \frac{2}{L}x^2 + \frac{1}{L^2}x^3 = L\left(\frac{x}{L} - \frac{2}{L^2}x^2 + \frac{1}{L^3}x^3\right)$$

$$N_3 = \frac{3}{L^2}x^2 - \frac{2}{L^3}x^3$$

$$N_4 = -\frac{1}{L}x^2 + \frac{1}{L^2}x^3 = L\left(-\frac{x^2}{L^2} + \frac{x^2}{L^3}\right)$$

$\xi = \frac{x}{L}$ ise;

$$N_1 = 1 - 3\xi^2 + 2\xi^3$$

$$N_2 = L(\xi - 2\xi^2 + \xi^3)$$

$$N_3 = 3\xi^2 - 2\xi^3$$

$$N_4 = L(-\xi^2 + \xi^3)$$

9.1.3) Eleman Rijitlik Matrisinin Bulunması

Toplam potansiyel enerjinin birinci variyasyonu önceden de verildiği gibi;

$$\delta\Pi^e = \delta U^e + \delta W^e$$

$$\delta\Pi^e = \int_0^L [EI(w'')^2 - q.w]\, dx \quad \text{şeklindedir.}$$

Buradan;

$$\delta U^e = \int_0^L [EI(w'')^2]\,dx = \int_0^L \{\varepsilon\}^T [D]\{\varepsilon\}\,dx = \{d\}^T [k_e]\{d\}$$

$$\delta W^e = -\int_0^L q\,w\,dx = -\int_0^L [N_1, N_2, N_3, N_4]^T q\,dx = -\{d\}^T [q_e]$$

$$\delta \Pi^e = \{d\}^T \left([k_e]\{d\} - [q_e] \right)$$

Burada $[k_e]$ eleman eşitlik matrisi, $[q_e]$ dış yük matrisidir.
Eleman Eşitlik matrisi hesaplanırken 2 yöntem uygulanır.

a) İntegral matrisleri yardımıyla
b) Şekil fonksiyonları "

a) İntegral Matrisleriyle Eşitlik Matrisinin Hesabı

$$\varepsilon = -\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = -w''$$

$$w = a_1 + a_2 x + a_3 x^2 + a_4 x^3$$

$$w' = a_2 + 2a_3 x + 3a_4 x^2$$

$$-w'' = -2a_3 - 6a_4 x$$

$\{\varepsilon\} = [F]\{a\}$ Buradaki F matrisi türev matrisidir.

$$\{\varepsilon\} = [0, 0, -2, -6x] \begin{Bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ a_4 \end{Bmatrix}$$

$$\{\varepsilon\} = [F][B]\{d\}$$

$$[F] = [0, 0, -2, -6x]$$

$$[k_e] = \int_0^L \{\varepsilon\}^T [D]\{\varepsilon\}\,dx$$

$$[k_e] = \int_0^L [B]^T [F]^T [EI][F][B]\,dx \quad \text{olur.}$$

$[H] = EI \int_0^L [F]^T [F]\,dx$ integral matrisidir.

$$[ke] = EI \int_0^L \begin{bmatrix} 1 & 0 & -3/L^2 & 2/L^3 \\ 0 & 1 & -2/L & 1/L^2 \\ 0 & 0 & 3/L^2 & -2/L^3 \\ 0 & 0 & -1/L & 1/L^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -2 \\ -6x \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & -2 & -6x \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -3/L^2 & -2/L & 3/L^2 & -1/L \\ 2/L^3 & 1/L^2 & -2/L^3 & 1/L^2 \end{bmatrix}$$

Hesaplamalardan sonra eleman rijitlik matrisi;

$$[ke] = \frac{EI}{L^3} \begin{bmatrix} 12 & 6L & -12 & 6L \\ 6L & 4L^2 & -6L & 2L^2 \\ -12 & -6L & 12 & -6L \\ 6L & 2L^2 & -6L & 4L^2 \end{bmatrix}$$ şeklinde bulunur.

b) Şekil Fonksiyonlarından Faydalanarak Eleman Rijitlik Matrisinin Hesabı

$$[ke] = \int_0^L \{\varepsilon\}^T [D] \{\varepsilon\} dx \;,\; \{\varepsilon\} = -\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \;,\; w = \underbrace{[\phi(x)][B]}_{[N]} \{d\}$$

$$\varepsilon = \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = -\frac{\partial^2 [N]}{\partial x^2} \begin{Bmatrix} d_1 \\ d_2 \\ d_3 \\ d_4 \end{Bmatrix}$$

$$[ke] = \int_0^L \left\{ \left(-\frac{\partial^2 [N]}{\partial x^2} \right)^T [D] \left(-\frac{\partial^2 [N]}{\partial x^2} \right) dx \right.$$

$$[ke] = \int_0^L [-N_1'', -N_2'', -N_3'', -N_4'']^T [EI] [-N_1'', -N_2'', -N_3'', -N_4] \, dx$$

$$[ke] = EI \int_0^L \begin{bmatrix} N_1''N_1'' & N_1''N_2'' & N_1''N_3'' & N_1''N_4'' \\ N_2''N_1'' & N_2''N_2'' & N_2''N_3'' & N_2''N_4'' \\ N_3''N_1'' & N_3''N_2'' & N_3''N_3'' & N_3''N_4'' \\ N_4''N_1'' & N_4''N_2'' & N_4''N_3'' & N_4''N_4'' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} & k_{13} & k_{14} \\ k_{21} & k_{22} & k_{23} & k_{24} \\ k_{31} & k_{32} & k_{33} & k_{34} \\ k_{41} & k_{42} & k_{43} & k_{44} \end{bmatrix}$$

$$N_1 = 1 - \frac{3x^2}{L^2} + \frac{2x^3}{L^3} \qquad N_2 = L\left(\frac{x}{L} - \frac{2x^2}{L^2} + \frac{x^3}{L^3}\right)$$

$$N_1' = -\frac{6x}{L^2} + \frac{6x^2}{L^3} \qquad N_2' = L\left(\frac{1}{L} - \frac{4x}{L^2} + \frac{3x^2}{L^3}\right)$$

$$N_1'' = -\frac{6}{L^2} + \frac{12x}{L^3} \qquad N_2'' = L\left(-\frac{4}{L^2} + \frac{6x}{L^3}\right)$$

Bu durumda;

$$k_{11} = EI\int_0^L N_1''N_1''\,dx = EI\int_0^L \left(-\frac{6}{L^2} + \frac{12x}{L^3}\right)\left(-\frac{6}{L^2} + \frac{12x}{L^3}\right)dx = \frac{12EI}{L^3}$$

$$k_{12} = EI\int_0^L N_1''N_2''\,dx = EI\int_0^L \left(-\frac{6}{L^2} + \frac{12x}{L^3}\right)\left(-\frac{4}{L^2} + \frac{6x}{L^3}\right)L\,dx = \frac{6EI}{L^2}$$

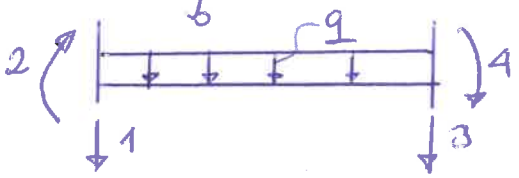
Bunun sonucunda;

$$[k_e] = \frac{EI}{L^3}\begin{bmatrix} 12 & 6L & -12 & 6L \\ 6L & 4L^2 & -6L & 2L^2 \\ -12 & -6L & 12 & -6L \\ 6L & 2L^2 & -6L & 4L^2 \end{bmatrix}$$ elde edilir.

9.1.4) Eleman Yük Matrisinin Hesabı

Elemana etkiyen yayılı yükler, eşdeğer kuvvete çevrilerek düğüm noktasına tekil yük gibi etki ettirilir. Bu durumda yük matrisi elemanda;

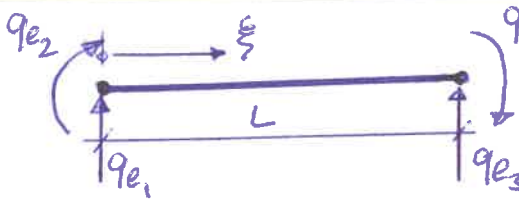
$$\{q_e\} = \int_0^L [N_1, N_2, N_3, N_4]^T q\,dx \text{ şeklinde olacaktır.}$$



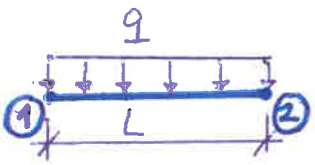
$$\{q_e\} = \int_0^L \left[\left(1 - \frac{3x^2}{L^2} + \frac{2x^3}{L^3}\right)\left(L\left(\frac{x}{L} - \frac{2x^2}{L^2} + \frac{x^3}{L^3}\right)\right)\left(\frac{3x^2}{L^2} - \frac{2x^3}{L^3}\right)\left(L\left(-\frac{x^2}{L^2} + \frac{x^3}{L^3}\right)\right)\right]^T q\,dx$$

$$\{q_e\} = q\left[\left(\frac{L}{2}\right), \left(\frac{L^2}{12}\right), \left(\frac{L}{2}\right), \left(-\frac{L^2}{12}\right)\right]^T$$

Gestfli Dz Yükleri Doğum Noktalarına Aktarılmış Eşdeğer Kuvvet ve Moment Değerleri

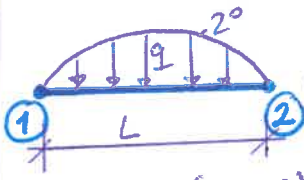


$$\{q_e\} = \begin{Bmatrix} q_{e1} \\ q_{e2} \\ q_{e3} \\ q_{e4} \end{Bmatrix} \quad [N] = \begin{Bmatrix} N_1 \\ N_2 \\ N_3 \\ N_4 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1-3\xi^2+2\xi^3 \\ L(-\xi+2\xi^2-\xi^3) \\ 3\xi^2-2\xi^3 \\ L(\xi^2-\xi^3) \end{bmatrix}$$



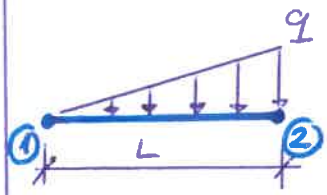
$q(\xi) = q$

$$\{q_e\} = q \begin{Bmatrix} L/2 \\ L^2/12 \\ L/2 \\ -L^2/12 \end{Bmatrix}$$



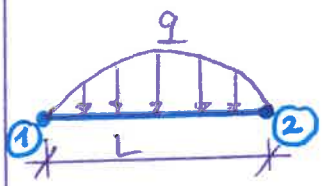
$q(\xi) = 4q(\xi - \xi^2)$

$$\{q_e\} = q \begin{Bmatrix} L/3 \\ L^2/15 \\ L/3 \\ -L^2/15 \end{Bmatrix}$$



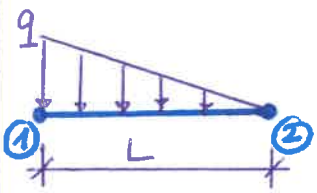
$q(\xi) = q\xi$

$$\{q_e\} = q \begin{Bmatrix} \frac{3}{20}L \\ L^2/30 \\ \frac{7}{20}L \\ -L^2/20 \end{Bmatrix}$$



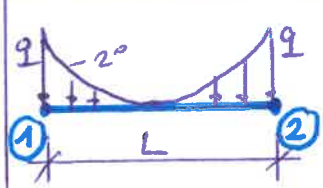
$q(\xi) = q\sin(\pi\xi)$

$$\{q_e\} = q \begin{Bmatrix} L/\pi \\ 2L^2/\pi^3 \\ L/\pi \\ -2L^2/\pi^3 \end{Bmatrix}$$



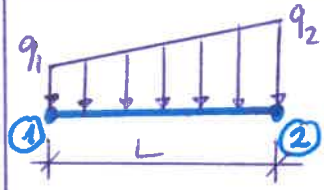
$q(\xi) = q(1-\xi)$

$$\{q_e\} = q \begin{Bmatrix} \frac{7}{20}L \\ -L^2/20 \\ \frac{3}{20}L \\ -L^2/30 \end{Bmatrix}$$



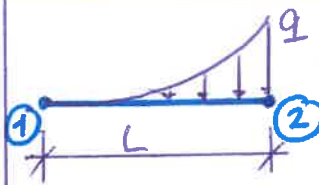
$q(\xi) = q - 4q(\xi - \xi^2)$

$$\{q_e\} = q \begin{Bmatrix} L/6 \\ L^2/60 \\ L/6 \\ -L^2/60 \end{Bmatrix}$$



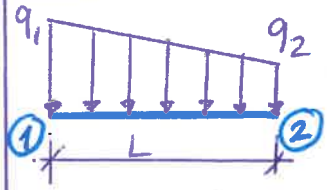
$q(\xi) = q_1 + (q_2 - q_1)\xi$

$$\{q_e\} = \frac{L}{60} \begin{bmatrix} 21q_1 + 9q_2 \\ L(3q_1 + 2q_2) \\ 9q_1 + 21q_2 \\ -L(2q_1 + 3q_2) \end{bmatrix}$$



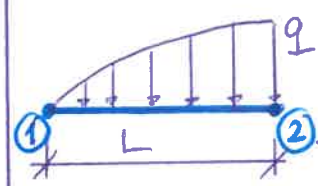
$q(\xi) = q\xi^2$

$$\{q_e\} = q \begin{Bmatrix} L/15 \\ L^2/60 \\ 4L/15 \\ -L^2/30 \end{Bmatrix}$$



$q(\xi) = q_1 + (q_2 - q_1)\xi$

$$\{q_e\} = \frac{L}{60} \begin{bmatrix} 21q_1 + 9q_2 \\ L(3q_1 + 2q_2) \\ 9q_1 + 21q_2 \\ -L(2q_1 + 3q_2) \end{bmatrix}$$



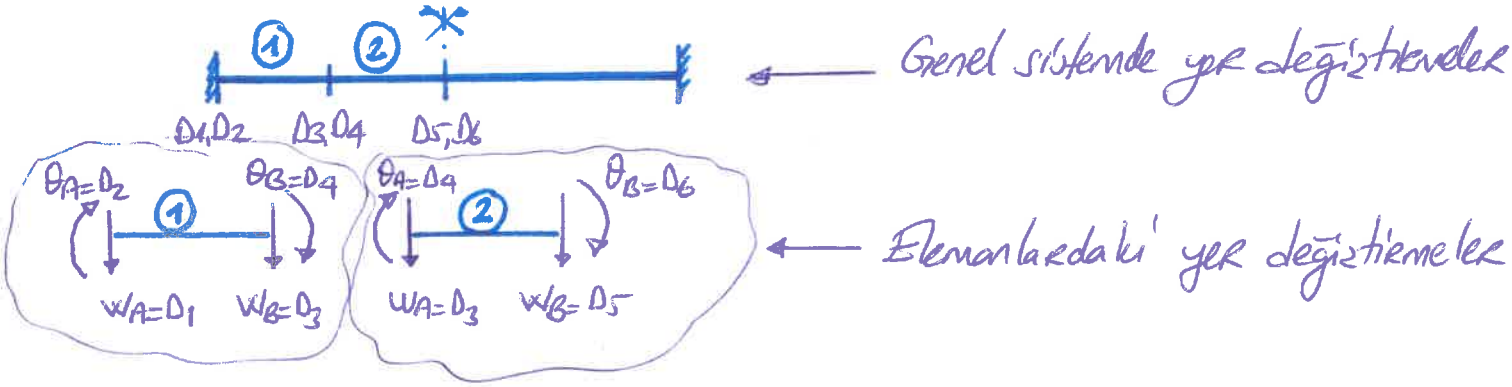
$q(\xi) = q\sqrt{\xi}$

$$\{q_e\} = q \begin{Bmatrix} \frac{80}{315}L \\ \frac{16}{315}L^2 \\ \frac{130}{315}L \\ -\frac{20}{315}L^2 \end{Bmatrix}$$

9.1.5) Sisteme Geçiş

Sisteme geçiş çevirme matrisleriyle ve birleştirme yöntemi ile yapılmaktadır

a) Çevirme matrisleriyle sisteme geçiş



1. eleman için çevirme matrisi:

$$\begin{bmatrix} w_A \\ \theta_A \\ w_B \\ \theta_B \end{bmatrix}_{1.\text{eleman}} = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}}_{Ce_1} \begin{bmatrix} D_1 \\ D_2 \\ D_3 \\ D_4 \\ D_5 \\ D_6 \end{bmatrix}_{\text{Sistem}}$$

*1. elemandaki yer değiştirmeler ($w_A, \theta_A, w_B, \theta_B$), genel sistemdeki ($D_1, D_2, D_3, D_4$) yer değiştirmelerle sağlanır

2. eleman için çevirme matrisi:

$$\begin{bmatrix} w_A \\ \theta_A \\ w_B \\ \theta_B \end{bmatrix}_{2.\text{eleman}} = \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}}_{Ce_2} \begin{bmatrix} D_1 \\ D_2 \\ D_3 \\ D_4 \\ D_5 \\ D_6 \end{bmatrix}_{\text{Sistem}}$$

*2. elemandaki yer değiştirmeler ($w_A, \theta_A, w_B, \theta_B$), genel sistemdeki ($D_3, D_4, D_5, D_6$) yer değiştirmelerle sağlanır.

*Not: Bu sistemde kullanılan sonlu eleman şekli tek olduğundan 1 ve 2 nolu elemanlarda eleman yer değiştirmeleri aynı dilimle anlatılmaktadır. Aksi durumda dilimler değişecektir.

Genleme matrisleriden faydalanarak sistem eşitlik matrisi;

$[Ke_1] = [Ce_1]^T [ke] [Ce_1]$ ← 1. elemanın sisteme dönüşümü

$[Ke_2] = [Ce_2]^T [ke] [Ce_2]$ ← 2. " " "

$$[Ke_1] = \frac{EI}{L^3} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 12 & 6L & -12 & 6L \\ 6L & 4L^2 & -6L & 2L^2 \\ -12 & -6L & 12 & -6L \\ 6L & 2L^2 & -6L & 4L^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$[Ke_1] = \frac{EI}{L^3} \begin{bmatrix} 12 & 6L & -12 & 6L & 0 & 0 \\ 6L & 4L^2 & -6L & 2L^2 & 0 & 0 \\ -12 & -6L & 12 & -6L & 0 & 0 \\ 6L & 2L^2 & -6L & 4L^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$[Ke_2] = \frac{EI}{L^3} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 12 & 6L & -12 & 6L \\ 6L & 4L^2 & -6L & 2L^2 \\ -12 & -6L & 12 & -6L \\ 6L & 2L^2 & -6L & 4L^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$[Ke_2] = \frac{EI}{L^3} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 12 & 6L & -12 & 6L \\ 0 & 0 & 6L & 4L^2 & -6L & 2L^2 \\ 0 & 0 & -12 & -6L & 12 & -6L \\ 0 & 0 & 6L & 2L^2 & -6L & 4L^2 \end{bmatrix}$$

Toplam Sistem Rijitlik Matrisi;

$$[K]_s = [Ke_1] + [Ke_2]$$

$$[K] = \frac{EI}{L^3}\begin{bmatrix} 12 & 6L & -12 & 6L & 0 & 0 \\ 6L & 4L^2 & -6L & 2L^2 & 0 & 0 \\ -12 & -6L & 24 & 0 & -12 & 6L \\ 6L & 2L^2 & 0 & 8L^2 & -6L & 2L^2 \\ 0 & 0 & -12 & -6L & 12 & -6L \\ 0 & 0 & 6L & 2L^2 & -6L & 4L^2 \end{bmatrix}$$

Sistem yük vektörünün hesabı;

$$\{Qe_1\} = [Ce_1]^T \{qe_1\}$$

$$\{Qe_2\} = [Ce_2]^T \{qe_2\}$$

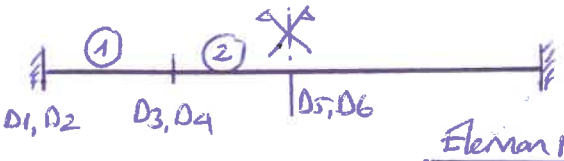
$$\{Qe_1\} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} q \begin{bmatrix} L/2 \\ L^2/12 \\ L/2 \\ -L^2/12 \end{bmatrix} = q \begin{bmatrix} L/2 \\ L^2/12 \\ L/2 \\ -L^2/12 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

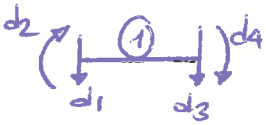
$$\{Qe_2\} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} q \begin{bmatrix} L/2 \\ L^2/12 \\ L/2 \\ -L^2/12 \end{bmatrix} = q \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ L/2 \\ L^2/12 \\ L/2 \\ -L^2/12 \end{bmatrix}$$

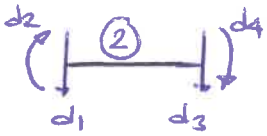
$$\{Q\} = \{Qe_1\} + \{Qe_2\}$$

$$\{Q\} = q \begin{bmatrix} L/2 \\ L^2/12 \\ L \\ 0 \\ L/2 \\ -L^2/12 \end{bmatrix}$$

b) Birleştirme yöntemiyle sisteme geçiş







Eleman No	Eleman deplasman parametresi	Sistemde deplasman parametresi
①	$d_1 = w_A$; $d_3 = w_B$	D_1 ; D_3
	$d_2 = \theta_A$; $d_4 = \theta_B$	D_2 ; D_4
②	$d_1 = w_A$; $d_3 = w_B$	D_3 ; D_5
	$d_2 = \theta_A$; $d_4 = \theta_B$	D_4 ; D_6
Gübük uç noktası	i ucu ; j ucu	i ucu ; j ucu

Eleman Rijitlik Matrisi, $[k_e] = \begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} & k_{13} & k_{14} \\ k_{21} & k_{22} & k_{23} & k_{24} \\ k_{31} & k_{32} & k_{33} & k_{34} \\ k_{41} & k_{42} & k_{43} & k_{44} \end{bmatrix}$

	D_1	D_2	D_3	D_4	D_5	D_6
D_1	k^1_{11}	k^1_{12}	k^1_{13}	k^1_{14}	0	0
D_2	k^1_{21}	k^1_{22}	k^1_{23}	k^1_{24}	0	0
D_3	k^1_{31}	k^1_{32}	$k^1_{33} + k^2_{11}$	$k^1_{34} + k^2_{12}$	k^2_{13}	k^2_{14}
D_4	k^1_{41}	k^1_{42}	$k^1_{43} + k^2_{21}$	$k^1_{44} + k^2_{22}$	k^2_{23}	k^2_{24}
D_5	0	0	k^2_{31}	k^2_{32}	k^2_{33}	k^2_{34}
D_6	0	0	k^2_{41}	k^2_{42}	k^2_{43}	k^2_{44}

$k_{\bar{i}\bar{j}}$ (yer, sebep)

Eleman Rijitlik matrisi $[k_e] = \frac{EI}{L^3} \begin{bmatrix} 12 & 6L & -12 & 6L \\ 6L & 4L^2 & -6L & 2L^2 \\ -12 & -6L & 12 & -6L \\ 6L & 2L^2 & -6L & 4L^2 \end{bmatrix}$

$K_{33} = k^1_{33} + k^2_{11} = \frac{EI}{L^3}(12+12) = \frac{24EI}{L^3}$

$K_{34} = k^1_{34} + k^2_{12} = \frac{EI}{L^3}(-6L+6L) = 0$

$K_{43} = k^1_{43} + k^2_{21} = \frac{EI}{L^3}(-6L+6L) = 0$

$K_{44} = k^1_{44} + k^2_{22} = EI/L^3 (4L^2+4L^2) = \frac{EI}{L^3}(8L^2)$

Sistem Rijitlik Matrisi ; $[K]=\frac{EI}{L^3}\begin{bmatrix} 12 & 6L & -12 & 6L & 0 & 0 \\ 6L & 4L^2 & -6L & 2L^2 & 0 & 0 \\ -12 & -6L & 24 & 0 & -12 & 6L \\ 6L & 2L^2 & 0 & 8L^2 & -6L & 2L^2 \\ 0 & 0 & -12 & -6L & 12 & -6L \\ 0 & 0 & 6L & 2L^2 & -6L & 4L^2 \end{bmatrix}$

Sistem rijitlik matrisi $[K]$, yük matrisi $\{Q\}$ ve yer değiştirme matrisi $\{D_s\}$ ise ;

$$[K]\{D_s\}=\{Q\} \quad \text{olur.}$$

$$\frac{EI}{L^3}\begin{bmatrix} 12 & 6L & -12 & 6L & 0 & 0 \\ 6L & 4L^2 & -6L & 2L^2 & 0 & 0 \\ -12 & -6L & 24 & 0 & -12 & 6L \\ 6L & 2L^2 & 0 & 8L^2 & -6L & 2L^2 \\ 0 & 0 & -12 & -6L & 12 & -6L \\ 0 & 0 & 6L & 2L^2 & -6L & 4L^2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} D_1 \\ D_2 \\ D_3 \\ D_4 \\ D_5 \\ D_6 \end{bmatrix} = q\begin{bmatrix} L/2 \\ L^2/12 \\ L \\ 0 \\ L/2 \\ -L^2/12 \end{bmatrix}$$

9.1.6) Sınır Koşulları

Sonlu elemanlar yönteminin diğer yöntemlere göre en önemli sınır koşullarının probleme en sonunda uygulanmasıdır. Bu problemde simetriden faydalanıldığından simetri koşuluna göre $\theta_6=0$, mesnet koşullarına göre $D_1=D_2=0$ (Ankastre mesnette $w=w'=0$) olur. Bu durumda rijitlik, yer değiştirme ve yük matrisinin ilgili satır ve sütünları sıfırlanır.

$$\frac{EI}{L^3}\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 24 & 0 & -12 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 8L^2 & -6L & 0 \\ 0 & 0 & -12 & -6L & 12 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ D_3 \\ D_4 \\ D_5 \\ 0 \end{bmatrix} = q\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ L \\ 0 \\ L/2 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$24D_3 - 12D_5 = qL\left(\frac{L^3}{EI}\right) \quad \text{---- 1}$$

$$8L^2D_4 - 6LD_5 = 0 \quad \text{---------- 2}$$

$$-12D_3 - 6LD_4 + 12D_5 = q\frac{L}{2}\frac{L^3}{EI} \quad \text{--- 3}$$

Denklemlerin çözümünden;

$D_3 = \frac{3}{8}q\frac{L^4}{EI}$; $D_4 = \frac{1}{2}q\frac{L^3}{EI}$

$D_5 = \frac{2}{3}q\frac{L^4}{EI}$ bulunur.

9.1.7) Sistem momentlerinin hesabı

$$M_i = -EIw'' \longrightarrow M_1 = -EI\begin{bmatrix} N_1'' & N_2'' & N_3'' & N_4'' \end{bmatrix}\begin{bmatrix} D_1 \\ D_2 \\ D_3 \\ D_4 \end{bmatrix}$$

1. elemanda (M_A ve M_B' hesabı)

$$M_1 = -\frac{EI}{L^2}\begin{bmatrix} \left(-6+\frac{12x}{L}\right) & L\left(-4+\frac{6x}{L}\right) & \left(6-\frac{12x}{L}\right) & L\left(-2+\frac{6x}{L}\right) \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{3}{8}q\frac{L^4}{EI} \\ \frac{1}{2}q\frac{L^3}{EI} \end{bmatrix}$$

$$M_1 = -\left(\frac{5}{4} - \frac{6x}{4L}\right)qL^2$$

$x=0 \longrightarrow M_1 = -\frac{5}{4}qL^2 \longrightarrow L = \frac{L_s}{4} \longrightarrow M_A = -\frac{5}{64}qL_s^2 = -\frac{1}{12{,}8}qL_s^2$

(Kesin çözüm $M_1 = -\frac{qL_s^2}{12}$)

$x=L \longrightarrow M_B' = \frac{qL^2}{4}$

2. elemanda (M_B^2 ve M_C hesabı)

$$M_2 = -\frac{EI}{L^2}\left[\left(-6+\frac{12x}{L}\right)L\left(-4+\frac{6x}{L}\right)\left(6-\frac{12x}{L}\right)L\left(-2+\frac{6x}{L}\right)\right]\begin{bmatrix}\frac{3}{8}q\frac{L^4}{EI}\\ \frac{1}{2}q\frac{L^3}{EI}\\ \frac{2}{3}q\frac{L^4}{EI}\\ 0\end{bmatrix}$$

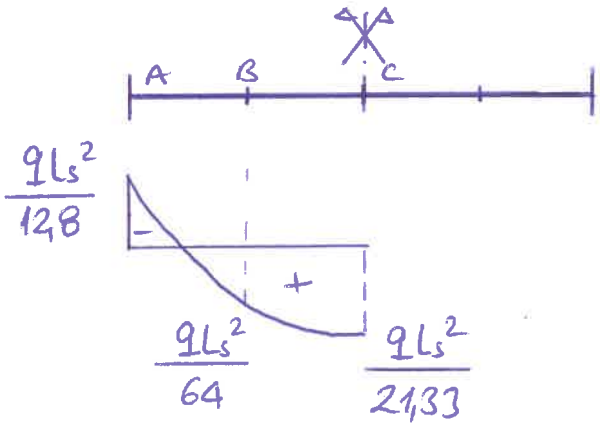
$$M_2 = \left(\frac{1}{4}+\frac{2x}{4L}\right)qL^2$$

$x=0 \longrightarrow M_B^2 = \frac{qL^2}{4}$

$x=L \longrightarrow M_C = \frac{3}{4}qL^2 \longrightarrow L=\frac{L_s}{4} \longrightarrow M_C = \frac{3}{64}qL_s^2 = \frac{1}{21{,}33}qL_s^2$

(Kesin çözüm $M_C = \frac{qL_s^2}{24}$)

$M_B = (M_B^1 + M_B^2)/2 = \frac{qL^2}{4} \longrightarrow L=\frac{L_s}{4} \longrightarrow M_B = \frac{1}{64}qL_s^2$



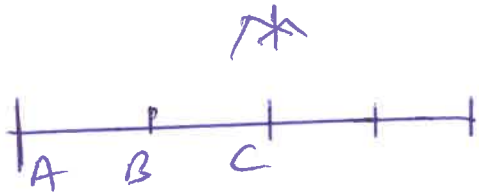
Rijitlik Matrisleri Yardımıyla Kesit Zorlarının Hesabı

$$\{F\}^e = [K]^e \cdot \{D\}^e - \{\theta\}^e$$

1. nolu elemanın kesit zorları:

$$\begin{Bmatrix} V_1 \\ M_1 \\ V_2 \\ M_2 \end{Bmatrix}^1 \frac{EI}{L^3} \begin{bmatrix} 12 & 6L & -12 & 6L \\ 6L & 4L^2 & -6L & 2L^2 \\ -12 & -6L & 12 & -6L \\ 6L & 2L^2 & -6L & 4L^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{3}{8} q \frac{L^4}{EI} \\ \frac{1}{2} q \frac{L^3}{EI} \end{Bmatrix} - \begin{Bmatrix} \frac{qL}{2} \\ \frac{qL^2}{12} \\ \frac{qL}{2} \\ -\frac{qL^2}{12} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -2qL \\ -\frac{4}{3} qL^2 \\ qL \\ -\frac{qL^2}{6} \end{Bmatrix}$$

$L = \frac{L_s}{4}$ olduğundan;

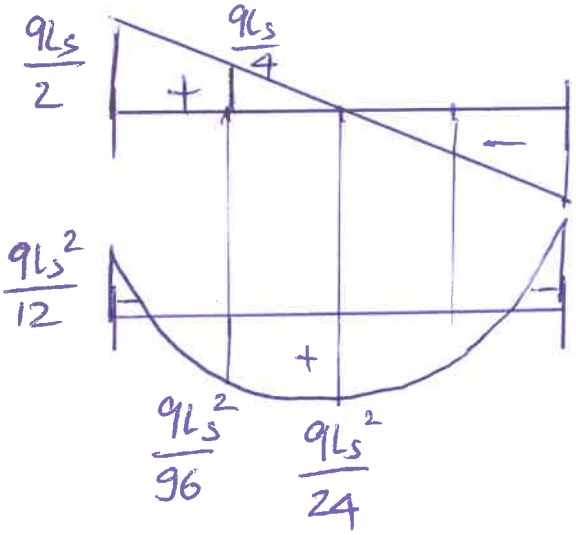


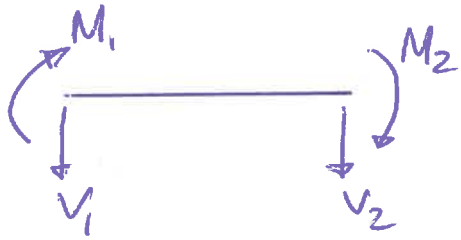
$$\begin{Bmatrix} V_1 \\ M_1 \\ V_2 \\ M_2 \end{Bmatrix}^1 = \begin{Bmatrix} V_A \\ M_A \\ V_B \\ M_B \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -\frac{qL_s}{2} \\ -\frac{qL_s^2}{12} \\ \frac{qL_s}{4} \\ -qL^2/96 \end{Bmatrix}$$

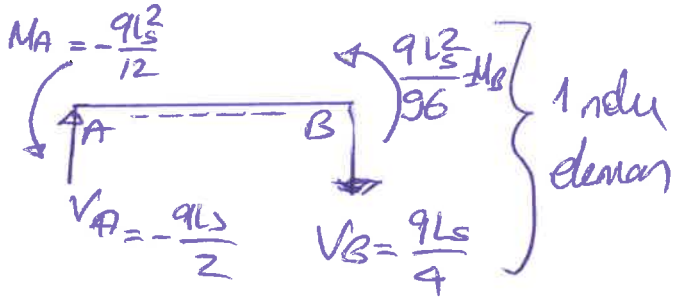
2. nolu elemanın kesit zorları:

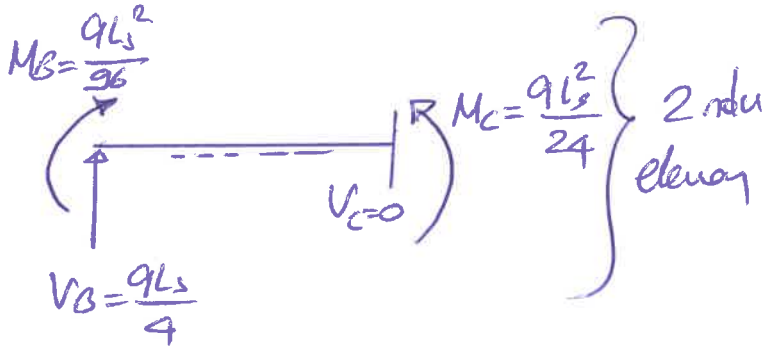
$$\begin{Bmatrix} V_1 \\ M_1 \\ V_2 \\ M_2 \end{Bmatrix}^2 = \frac{EI}{L^3} \begin{bmatrix} 12 & 6L & -12 & 6L \\ 6L & 4L^2 & -6L & 2L^2 \\ -12 & -6L & 12 & -6L \\ 6L & 2L^2 & -6L & 4L^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \frac{3}{8} q \frac{L^4}{EI} \\ \frac{1}{2} q \frac{L^3}{EI} \\ \frac{2}{3} q \frac{L^4}{EI} \\ 0 \end{Bmatrix} - \begin{Bmatrix} \frac{qL}{2} \\ \frac{qL^2}{12} \\ \frac{qL}{2} \\ -\frac{qL^2}{12} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -qL \\ qL^2/6 \\ 0 \\ -\frac{2}{3} qL^2 \end{Bmatrix}$$

$$\begin{Bmatrix} V_1 \\ M_1 \\ V_2 \\ M_2 \end{Bmatrix}^2 = \begin{Bmatrix} M_B \\ M_B \\ V_C \\ M_C \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -9L_s/4 \\ qL_s^2/96 \\ \circ \\ -qL_s^2/24 \end{Bmatrix}$$



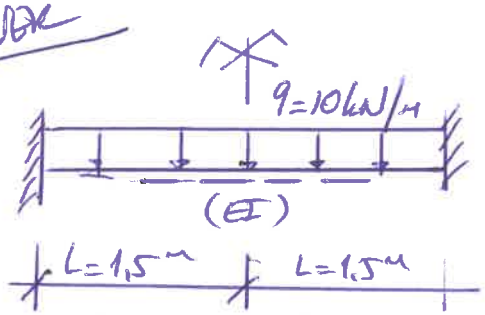






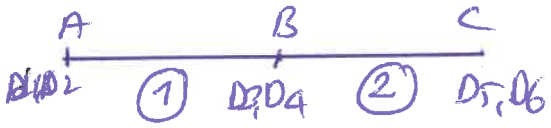
Yukarıdaki hesaplardan da anlaşılacağı gibi kesit tesirlerini varyasyon yöntemi yada sekil fonksiyonları yardımıyla hesapladığımızda elde edilen sonuçlar yaklaşık olacaktır. Halbuki rijitlik matrisi yardımıyla bulunan kesit tesirleri kesin sonuçlardır.

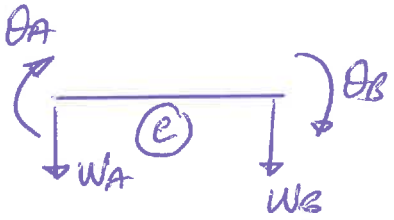
ÖRNEK



$EI = 3 \times 10^4 \ kNm^2$

$q = 10 \ kN/m$





$$[k^e] = \frac{EI}{L^3} \begin{bmatrix} 12 & 6L & -12 & 6L \\ 6L & 4L^2 & -6L & 2L^2 \\ -12 & -6L & 12 & -6L \\ 6L & 2L^2 & -6L & 4L^2 \end{bmatrix}$$

$$\{Q\}^e = \begin{Bmatrix} qL/2 \\ qL^2/12 \\ qL/2 \\ -qL^2/12 \end{Bmatrix}$$

$$[C_1] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \qquad [C_2] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\left.\begin{aligned} [K_1]^e &= [C_1]^T [k^e] [C_1] \\ [K_2]^e &= [C_2]^T [k^e] [C_2] \end{aligned}\right\} \quad [K]_s = [K_1]^e + [K_2]^e$$

$$\left.\begin{aligned} \{Q_1\}^e &= [C_1]^T \{Q\}^e \\ \{Q_2\}^e &= [C_2]^T \{Q\}^e \end{aligned}\right\} \quad [Q_s] = \{Q_1\}^e + \{Q_2\}^e$$

$$\frac{EI}{L^3}\begin{bmatrix} 12 & 6L & -12 & 6L & 0 & 0 \\ 6L & 4L^2 & -6L & 2L^2 & 0 & 0 \\ -12 & -6L & 24 & 0 & -12 & 6L \\ 6L & 2L^2 & 0 & 8L^2 & -6L & 2L^2 \\ 0 & 0 & -12 & -6L & 12 & -6L \\ 0 & 0 & 6L & 2L^2 & -6L & 4L^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} D_1 \\ D_2 \\ D_3 \\ D_4 \\ D_5 \\ D_6 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} qL/2 \\ qL^2/12 \\ qL \\ 0 \\ qL/2 \\ -qL^2/12 \end{Bmatrix}$$

$D_1 = D_2 = D_4 = D_5 = D_6 = 0$

$$D_3 = W_B = \frac{qL^4}{24EI} = \frac{10 \cdot 1,5^4}{24 \cdot 3 \cdot 10^4} = 7,03 \times 10^{-5}\ m.$$

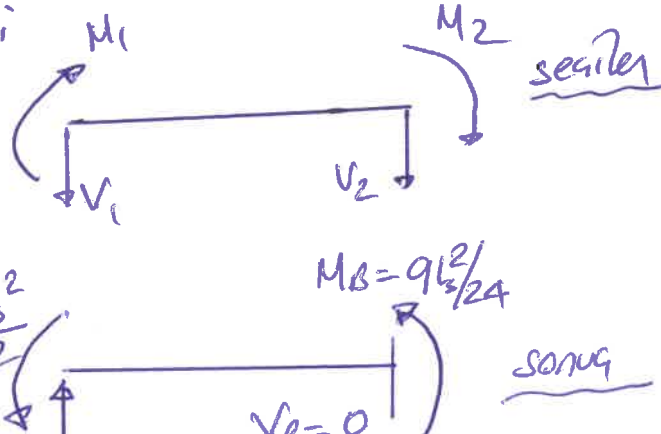
Eleman Kesit Zorlarının

1 nolu eleman

$$\begin{Bmatrix} V_1 \\ M_1 \\ V_2 \\ M_2 \end{Bmatrix}^1 = \frac{EI}{L^3}\begin{bmatrix} 12 & 6L & -12 & 6L \\ 6L & 4L^2 & -6L & 2L^2 \\ -12 & -6L & 12 & -6L \\ 6L & 2L^2 & -6L & 4L^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{qL^4}{24EI} \\ 0 \end{Bmatrix} - \begin{Bmatrix} qL/2 \\ qL^2/12 \\ qL/2 \\ -qL^2/12 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -qL \\ -qL^2/3 \\ 0 \\ -qL^2/6 \end{Bmatrix}$$

$L = \frac{L_s}{2}$ olduğundan;

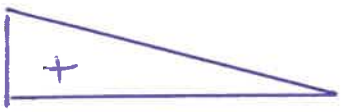
$$\begin{Bmatrix} V_1 \\ M_1 \\ V_2 \\ M_2 \end{Bmatrix}^1 = \begin{Bmatrix} V_A \\ M_A \\ V_B \\ M_B \end{Bmatrix}^1 = \begin{Bmatrix} -\frac{qL_s}{2} \\ -\frac{qL_s^2}{12} \\ 0 \\ -\frac{qL_s^2}{24} \end{Bmatrix}$$



segiler

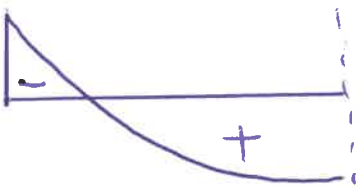
sonuç

$\frac{qL_s}{2} = 15$



V^1 (kN)

$\frac{qL_s^2}{12} = 7,5$



M^1 (kNM) $L_s = 3^M$

$\frac{qL_s^2}{24} = 3,75$

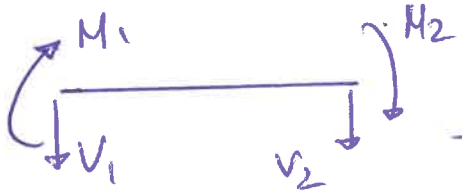
BSd

2 nolu eleman

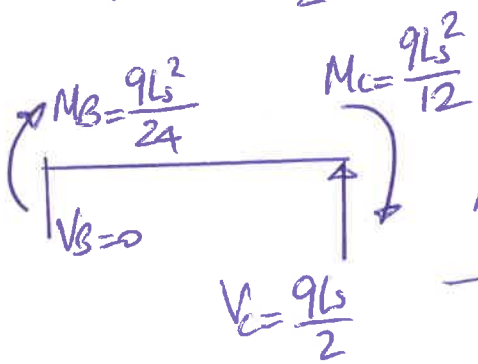
$$\begin{Bmatrix} V_1 \\ M_1 \\ V_2 \\ M_2 \end{Bmatrix}^2 = \frac{EI}{L^3}\begin{bmatrix} 12 & 6L & -12 & 6L \\ 6L & 4L^2 & -6L & 2L^2 \\ -12 & -6L & 12 & -6L \\ 6L & 2L^2 & -6L & 4L^2 \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} qL^4/24EI \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} - \begin{Bmatrix} qL/2 \\ qL^2/12 \\ qL/2 \\ -qL^2/12 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ q^2/6 \\ -qL \\ qL^2/3 \end{Bmatrix}$$

$L = \frac{L_s}{2}$ olduğundan;

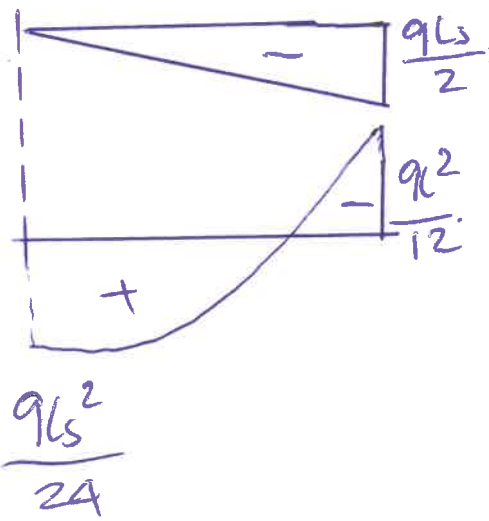
$$\begin{Bmatrix} V_1 \\ M_1 \\ V_2 \\ M_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} V_B \\ M_B \\ V_C \\ M_C \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ qL_s^2/24 \\ -qL_s/2 \\ qL_s^2/12 \end{Bmatrix}$$



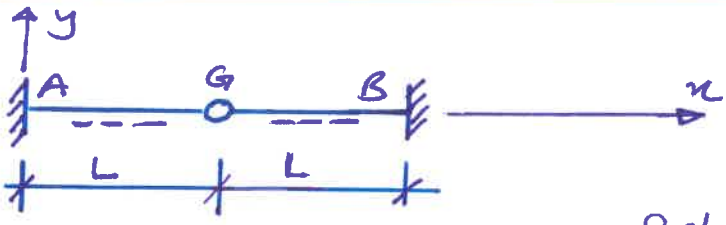
seçilen

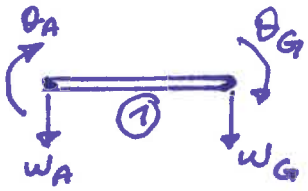


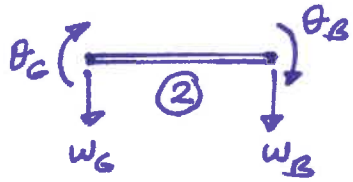
hesap sonucu bulunan



ÇUBUKTA MAFSAL OLMASI DURUMU



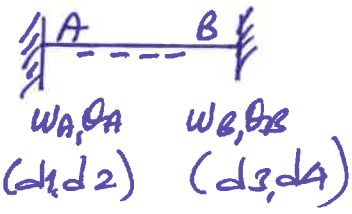




Şekilde görüldüğü gibi iki ucu rijit çubuğun orta noktasında moment mafsalı bulunmaktadır. Çubuktaki yerdeğiştirmeler şekilde verilmiştir.

a) İki ucu rijit çubuğun rijitlik matrisi

$$[k] = \frac{EI}{L^3}\begin{bmatrix} 12 & 6L & -12 & 6L \\ 6L & 4L^2 & -6L & 2L^2 \\ -12 & -6L & 12 & -6L \\ 6L & 2L^2 & -6L & 4L^2 \end{bmatrix} \begin{matrix} w_A \\ \theta_A \\ w_B \\ \theta_B \end{matrix}$$



b) Sağ ucu mafsallı çubuğun rijitlik matrisi

$$[k] = \frac{EI}{L^3}\begin{bmatrix} 3 & 3L & -3 & 0 \\ 3L & 3L^2 & -3L & 0 \\ -3 & -3L & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{matrix} w_A \\ \theta_A \\ w_B \\ \theta_B \end{matrix}$$

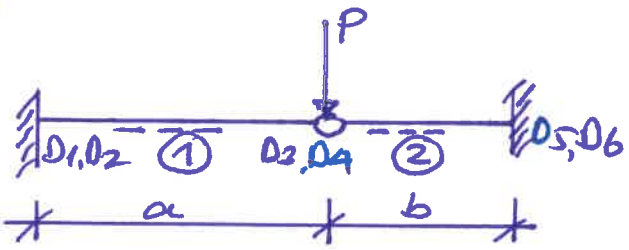


c) Sol ucu mafsallı çubuğun rijitlik matrisi

$$[k] = \frac{EI}{L^3}\begin{bmatrix} 3 & 0 & -3 & 3L \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -3 & 0 & 3 & -3L \\ 3L & 0 & -3L & 3L^2 \end{bmatrix} \begin{matrix} w_A \\ \theta_A \\ w_B \\ \theta_B \end{matrix}$$

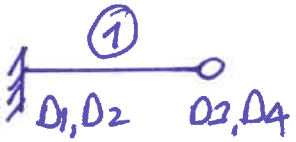


ÖRNEK

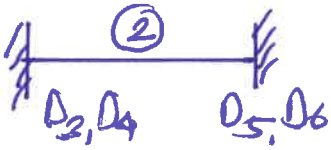


Matbah 1 nolu elbugun sağında şekilde hesaplaya-cağız.

$$[k_1]_e = \frac{EI}{a^3}\begin{bmatrix} 3 & 3a & -3 & 0 \\ 3a & 3a^2 & -3a & 0 \\ -3 & -3a & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{matrix} D_1 \\ D_2 \\ D_3 \\ D_4 \end{matrix}$$



$$[k_2]_e = \frac{EI}{b^3}\begin{bmatrix} 12 & 6b & -12 & 6b \\ 6b & 4b^2 & -6b & 2b^2 \\ -12 & -6b & 12 & -6b \\ 6b & 2b^2 & -6b & 4b^2 \end{bmatrix} \begin{matrix} D_3 \\ D_4 \\ D_5 \\ D_6 \end{matrix}$$



Gevirme Matrisleri

$$[C_1] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \qquad [C_2] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$[K_1]^e = [C_1]^T [k_1]_e [C_1]$$

$$[K_2]^e = [C_2]^T [k_2]_e [C_2]$$

$$[K_3] = [K_1]^e + [K_2]^e$$

$$\{Q\} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ P \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

$$D_1 = D_2 = D_5 = D_6 = 0$$

$$EI\begin{bmatrix} 3/a^3 & 3/a^2 & -3/a^3 & 0 & 0 & 0 \\ 3/a^2 & 3/a & -3/a^2 & 0 & 0 & 0 \\ -3/a^3 & -3/a^2 & 3/a^3+12/b^3 & 6/b^2 & -12/b^3 & 6/b^2 \\ 0 & 0 & 6/b^2 & 4/b & -6/b^2 & 2/b \\ 0 & 0 & -12/b^3 & -6/b^2 & 12/b^3 & -6/b^2 \\ 0 & 0 & 6/b^2 & 2/b & -6/b^2 & 4/b \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} D_1 \\ D_2 \\ D_3 \\ D_4 \\ D_5 \\ D_6 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ P \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

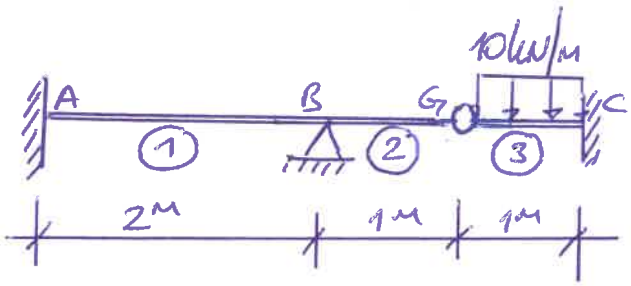
$$EI\begin{bmatrix} 3/a^3+12/b^3 & 6/b^2 \\ 6/b^2 & 4/b \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} D_3 \\ D_4 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} P \\ 0 \end{Bmatrix}$$

$$D_3 = w_3 = \frac{-a^3b^3P}{3(b^3+a^3)EI} \qquad D_4 = \theta_3 = \frac{a^3b^2P}{2(b^3+a^3)EI}$$

Ödev : Gösterilen kuvvetlerin (kesit tesirleri) bularak M, V diyagramlarını çiziniz.

Bsh

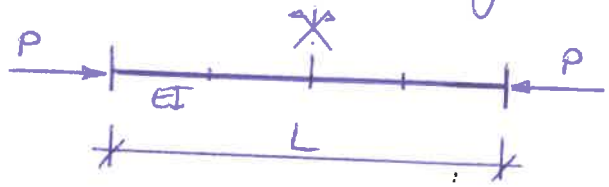
ÖDEV



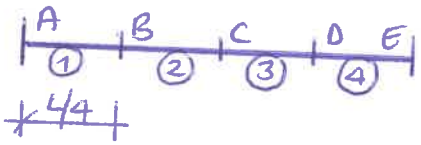
$E = 210\ GPa$, $I = 2 \cdot 10^{-4}\ m^4$

9.2) Gubugun Burkulma Hesabi

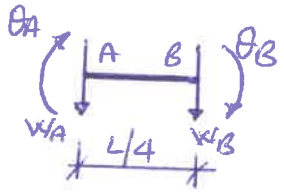
Eksenel P basinç kuvvetine maruz L uzunluğunda bir kub ğu ele alalim. Ve çubuğu 4 eşit parçaya bölelim;



← Ele alinan çubuk eleman



← Çubuğun sonlu elemanlara ayrilmasi



← Sonlu eleman parçasi ve yer değiştirmeler

$$\{d\}^T = [w_A, \theta_A, w_B, \theta_B] = [d_1, d_2, d_3, d_4]$$ ← yer değiştirmeler

$A(0,0)$; $B(L,0)$ ← Eleman koordinatlari

9.2.1) Deplasman Fonksiyonlarının Seçilmi

Deplasman fonksiyonlari eşit çözüm hareketi ve sabit deformasyon şartini sağlayacak şekilde seçilmelidir. Koordinat eksenî değiştirince çözüm farkli olmamalidir. Bunun için deplasman fonksiyonu ya tam polinom veya tabii koordinatlarin fonksiyonu şeklinde olmalidir. Elemanin içinde ve kenarlarinda sürekli olmalidir. Ayrica σ ve τ_{xz} kuvvetlerin izindeki türevlerde de sürekli olmalidir. Burada deplasman fonksiyonu polinom olarak seçilmiştir. Elemanda bilinmeyen dört deplasman parametresi olduğundan, dört bilinmeyenli deplasman fonksiyonu seçilmiştir.

$$w = a_1 + a_2 x + a_3 x^2 + a_4 x^3$$

$$w = [\phi(x)]\{a\} = [1, x, x^2, x^3]\{a\}$$

9.2.2) Şekil Fonksiyonlarının Tayini

Eleman düğüm noktası deplasmanları $\{d\}$ ile polinom sabitleri arasındaki bağı veren $[A]$ matrisi ile; elemanın düğüm noktası deplasman parametrelerinin $\phi(x)$ ve $\phi(x)$'in türevleri cinsinden yazılmış bileşenlerinde, düğüm noktası koordinatlarının yerlerine konulmasıyla bulunur.

$$\{d\} = [A]\{a\}$$

$$\{a\} = [A]^{-1}\{d\} \qquad [A]^{-1} = [B] \text{ ile,}$$

$$\{a\} = [B]\{d\}$$

$$w = \underbrace{[\phi(x)][B]}_{[N]}\{d\} = [N]\{d\} \qquad |[N]: \text{şekil fonksiyonu}$$

$$w = a_1 + a_2 x + a_3 x^2 + a_4 x^3$$

$$w' = \theta = a_2 + 2a_3 x + 3a_4 x^2$$

$$\{d\} = [A]\{a\}$$

$$d_1 = (w_A) = w(x=0) = a_1$$

$$d_2 = \theta_A = w'(x=0) = a_2$$

$$d_3 = w_B = w(x=L/4) = a_1 + a_2\frac{L}{4} + a_3\frac{L^2}{16} + a_4\frac{L^3}{64}$$

$$d_4 = \theta_B = w'(x=L/4) = a_2 + 2a_3\frac{L}{4} + 3a_4\frac{L^2}{16}$$

$$\begin{Bmatrix} d_1 \\ d_2 \\ d_3 \\ d_4 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & L/4 & L^2/16 & L^3/64 \\ 0 & 1 & L/2 & 3L^2/16 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ a_4 \end{Bmatrix}$$

$$[B] = [A]^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ \frac{48}{L^2} & -\frac{8}{L} & \frac{48}{L^2} & -\frac{4}{L} \\ \frac{128}{L^3} & \frac{16}{L^2} & -\frac{128}{L^3} & \frac{16}{L^2} \end{bmatrix}$$

$$[N] = [\phi(x)][B] = [1, x, x^2, x^3][B]$$

$$[N_1, N_2, N_3, N_4] = [1, x, x^2, x^3] \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\frac{48}{L^2} & -\frac{8}{L} & \frac{48}{L^2} & -\frac{4}{L} \\ \frac{128}{L^3} & \frac{16}{L^2} & -\frac{128}{L^3} & \frac{16}{L^2} \end{bmatrix}$$

$$N_1 = 1 - \frac{48x^2}{L^2} + \frac{128x^3}{L^3}$$

$$N_2 = x - \frac{8x^2}{L} + \frac{16x^3}{L^2}$$

$$N_3 = \frac{48x^2}{L^2} - \frac{128x^3}{L^3}$$

$$N_4 = -\frac{4x^2}{L} + \frac{16}{L^2}x^3$$

9.2.3) Eleman Rijitlik Matrisinin Hesabı

Uçlarından eksenel P basınç yüküne maruz bir çubuğun toplam potansiyel enerjisinin ikinci varyasyonunu yazarsak;

$$\delta^2\Pi^e = \int_0^{L/4} [EI(w'')^2 - P(w')^2]\,dx$$

$$\delta^2\Pi^e = \int_0^{L/4} \{\varepsilon\}^T [D]\{\varepsilon\}\,dx + \int_0^{L/4} \{\beta\}^T [N_0]\{\beta\}\,dx$$

$$\delta^2\Pi^e = \{d\}^T [k^e]\{d\} - P\{d\}^T [\Pi^e]\{d\}$$

$$\{d\}^T [k^e]\{d\} = EI \int_0^{L/4} (w'')^2\,dx$$

$$\lambda\{d\}^T [\Pi^e]\{d\} = -P \int_0^{L/4} (w')^2\,dx$$

$$\delta^2\Pi^e = \{d\}^T \left([k^e] + \lambda[\Pi^e]\right)\{d\}$$

Burada $N_0 = -P$, $[k_e]$ eleman rijitlik matrisi, λ yük parametresi, $[\sigma_e]$ geometrik yük matrisidir. Eleman rijitlik ve geometrik yük matrislerini integral matrisleri ile hesaplarsak;

$$w'' = -2a_3 - 6a_4 x$$

$$\{\varepsilon\} = [F]\{a\} \quad ; \quad [F] = [0, 0, -2, -6x]$$

$$\{\varepsilon\} = [F][B]\{d\}$$

$$[k_e] = EI \int_0^{L/4} [B]^T [F]^T [F] [B] \, dx$$

$$[k_e] = EI \int_0^{L/4} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -\frac{48}{L^2} & \frac{128}{L^3} \\ 0 & 1 & -\frac{8}{L} & \frac{16}{L^2} \\ 0 & 0 & \frac{48}{L^2} & -\frac{128}{L^3} \\ 0 & 0 & -\frac{4}{L} & \frac{16}{L^2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -2 \\ -6x \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & -2 & -6x \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\frac{48}{L^2} & -\frac{8}{L} & \frac{48}{L^2} & -\frac{4}{L} \\ \frac{128}{L^3} & \frac{16}{L^2} & -\frac{128}{L^3} & \frac{16}{L^2} \end{bmatrix} dx$$

$$[k_e] = EI \int_0^{L/4} \begin{bmatrix} 0 & 0 & -\frac{192}{L^2} + \frac{1536x}{L^3} & -\frac{576x}{L^2} + \frac{4608x^2}{L^3} \\ 0 & 0 & -\frac{32}{L} + \frac{192x}{L^2} & -\frac{96x}{L} + \frac{576x^2}{L^2} \\ 0 & 0 & \frac{192}{L^2} - \frac{1536x}{L^3} & \frac{576x^2}{L^2} - \frac{4608x^2}{L^3} \\ 0 & 0 & -\frac{16}{L} + \frac{192x}{L^2} & -\frac{48x}{L} + \frac{576x^2}{L^2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\frac{48}{L^2} & -\frac{8}{L} & \frac{48}{L^2} & -\frac{4}{L} \\ \frac{128}{L^3} & \frac{16}{L^2} & -\frac{128}{L^3} & \frac{16}{L^2} \end{bmatrix} dx$$

$$[k_e] = \begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} & k_{13} & k_{14} \\ k_{21} & k_{22} & k_{23} & k_{24} \\ k_{31} & k_{32} & k_{33} & k_{34} \\ k_{41} & k_{42} & k_{43} & k_{44} \end{bmatrix}$$

$$k_{11} = EI \int_0^{L/4} \left[-\frac{48}{L^2}\left(-\frac{192}{L^2} + \frac{1536x}{L^3}\right) + \frac{128}{L^3}\left(-\frac{576x}{L^2} + \frac{4608x^2}{L^3}\right)\right] dx$$

$$= EI\left[-\frac{48}{L^2}\left| -\frac{192x}{L^2} + \frac{1536x^2}{2L^3}\right|_0^{L/4} + \frac{128}{L^3}\left| -\frac{576x^2}{2L^2} + \frac{4608x^3}{3L^3}\right|_0^{L/4} \right]$$

$$= \frac{768EI}{L^3}$$

$$[k_e] = \frac{EI}{L^3}\begin{bmatrix} 768 & 96L & -768 & 96L \\ 96L & 16L^2 & -96L & 8L^2 \\ -768 & -96L & 768 & -96L \\ 96L & 8L^2 & -96L & 16L^2 \end{bmatrix}$$

9.2.4) Eleman Geometrik Yük Matrisi

$w' = a_2 + 2a_3x + 3a_4x^2$ de ve;

$\{\beta\} = [G]\{a\} \longrightarrow [G] = [0, 1, 2x, 3x^2]$

$\{\beta\} = [G][B]\{d\}$

$[n_e] = \int_0^{L/4} [B]^T [G]^T [G][B]\, dx$ olur.

$$[ne]=\int_0^{L/4}\begin{bmatrix}1 & 0 & -\frac{48}{L^2} & \frac{128}{L^3}\\ 0 & 1 & -\frac{8}{L} & \frac{16}{L^2}\\ 0 & 0 & \frac{48}{L^2} & -\frac{128}{L^3}\\ 0 & 0 & -\frac{4}{L} & \frac{16}{L^2}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0\\1\\2x\\3x^2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0 & 1 & 2x & 3x^2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0 & 0\\ -\frac{48}{L^2} & -\frac{8}{L} & \frac{48}{L^2} & -\frac{4}{L}\\ \frac{128}{L^3} & \frac{16}{L^2} & -\frac{128}{L^3} & \frac{16}{L^2}\end{bmatrix}dx$$

$$[ne]=\int_0^{L/4}\begin{bmatrix}0 & \left(-\frac{96x}{L^2}+\frac{384}{L^3}x^2\right) & \left(-\frac{192}{L^2}x^2+\frac{768}{L^3}x^3\right) & \left(-\frac{288}{L^2}x^3+\frac{1552}{L^3}x^4\right)\\ 0 & \left(1-\frac{16x}{L}+\frac{48}{L^2}x^2\right) & \left(2x-\frac{32}{L^2}x^2+\frac{96}{L^2}x^3\right) & \left(3x^2-\frac{48}{L}x^3+\frac{144x^4}{L^2}\right)\\ 0 & \left(\frac{96x}{L^2}-\frac{384}{L^3}x^2\right) & \left(\frac{192}{L^2}x^2-\frac{768}{L^3}x^3\right) & \left(\frac{288}{L^2}x^3-\frac{1552x^4}{L^3}\right)\\ 0 & \left(-\frac{8x}{L}+\frac{48x^2}{L^2}\right) & \left(-\frac{16x^2}{L}+\frac{96x^3}{L^2}\right) & \left(-\frac{24}{L}x^3+\frac{144x^4}{L^2}\right)\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0 & 0\\ -\frac{48}{L^2} & -\frac{8}{L} & \frac{48}{L^2} & -\frac{4}{L}\\ \frac{128}{L^3} & \frac{16}{L^2} & -\frac{128}{L^3} & \frac{16}{L^2}\end{bmatrix}dx$$

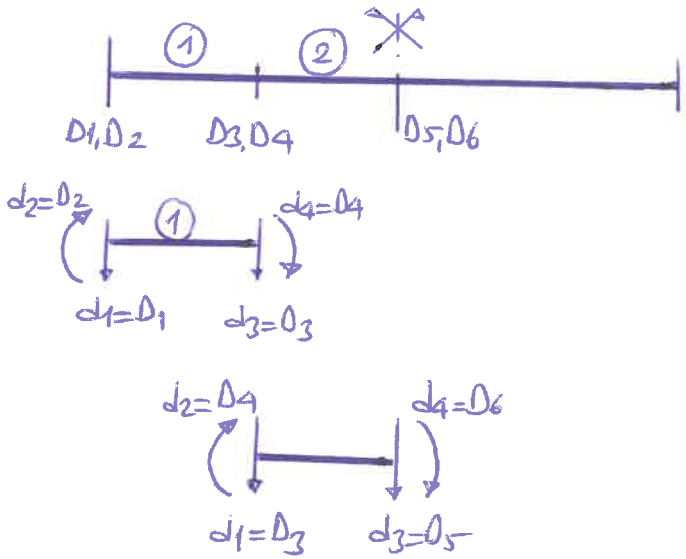
$$[ne]=\begin{bmatrix}n_{11} & n_{12} & n_{13} & n_{14}\\ n_{21} & n_{22} & n_{23} & n_{24}\\ n_{31} & n_{32} & n_{33} & n_{34}\\ n_{41} & n_{42} & n_{43} & n_{44}\end{bmatrix}=\frac{1}{L}\begin{bmatrix}\frac{24}{5} & \frac{L}{10} & -\frac{24}{5} & \frac{L}{10}\\ \frac{L}{10} & \frac{L^2}{30} & -\frac{L}{10} & -\frac{L^2}{120}\\ -\frac{24}{5} & -\frac{L}{10} & \frac{24}{5} & -\frac{L}{10}\\ \frac{L}{10} & -\frac{L^2}{120} & -\frac{L}{10} & \frac{L^2}{30}\end{bmatrix}$$

$$n_{11}=\int_0^{L/4}\left[-\frac{48}{L^2}\left(-\frac{192}{L^2}x^2+\frac{768}{L^3}x^3\right)+\frac{128}{L^3}\left(-\frac{288}{L^2}x^3+\frac{1552}{L^3}x^4\right)\right]dx$$

$$=\left[-\frac{48}{L^2}\left|-\frac{192}{L^2}\frac{x^3}{3}+\frac{768}{L^3}\frac{x^4}{4}\right|_0^{L/4}+\frac{128}{L^3}\left|-\frac{288}{L^2}\frac{x^4}{4}+\frac{1552}{L^3}\frac{x^5}{5}\right|_0^{L/4}\right]$$

$$=\frac{24}{5L}$$

9.2.5) Gevirme Matrisleri



Birinci eleman için gevirme matrisi;

$$\begin{bmatrix} d_1 \\ d_2 \\ d_3 \\ d_4 \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}}_{[Ce_1]} \begin{bmatrix} D_1 \\ D_2 \\ D_3 \\ D_4 \\ D_5 \\ D_6 \end{bmatrix}$$

İkinci eleman için gevirme matrisi;

$$\begin{bmatrix} d_1 \\ d_2 \\ d_3 \\ d_4 \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}}_{[Ce_2]} \begin{bmatrix} D_1 \\ D_2 \\ D_3 \\ D_4 \\ D_5 \\ D_6 \end{bmatrix}$$

9.2.6) Sistemin Rijitlik ve Geometrik Şekil Matrislerinin Hesabı

$$[K_{e_1}] = [C_{e_1}]^T [k_e] [C_{e_1}]$$

$$[K_{e_1}] = \frac{EI}{L^3} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 768 & 96L & -768 & 96L \\ 96L & 16L^2 & -96L & 8L^2 \\ -768 & -96L & 768 & -96L \\ 96L & 8L^2 & -96L & 16L^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$[K_{e_1}] = \frac{EI}{L^3} \begin{bmatrix} 768 & 96L & -768 & 96L & 0 & 0 \\ 96L & 16L^2 & -96L & 8L^2 & 0 & 0 \\ -768 & -96L & 768 & -96L & 0 & 0 \\ 96L & 8L^2 & -96L & 16L^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$[K_{e_2}] = \frac{EI}{L^3} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 768 & 96L & -768 & 96L \\ 96L & 16L^2 & -96L & 8L^2 \\ -768 & -96L & 768 & -96L \\ 96L & 8L^2 & -96L & 16L^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$[Ne_1] = [Ce_1]^T [ne] [Ce_1]$$

$$[Ne_1] = \frac{1}{L} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{24}{5} & \frac{L}{10} & -\frac{24}{5} & \frac{L}{10} \\ \frac{L}{10} & \frac{L^2}{30} & -\frac{L}{10} & -\frac{L^2}{120} \\ -\frac{24}{5} & -\frac{L}{10} & \frac{24}{5} & -\frac{L}{10} \\ \frac{L}{10} & -\frac{L^2}{120} & -\frac{L}{10} & \frac{L^2}{30} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$[Ne_2] = [Ce_2]^T [ne] [Ce_2]$$

$$[Ne_2] = \frac{1}{L} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{24}{5} & \frac{L}{10} & -\frac{24}{5} & \frac{L}{10} \\ \frac{L}{10} & \frac{L^2}{30} & -\frac{L}{10} & -\frac{L^2}{120} \\ -\frac{24}{5} & -\frac{L}{10} & \frac{24}{5} & -\frac{L}{10} \\ \frac{L}{10} & -\frac{L^2}{120} & -\frac{L}{10} & \frac{L^2}{30} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$[Ne_1] = \frac{1}{L} \begin{bmatrix} \frac{24}{5} & \frac{L}{10} & -\frac{24}{5} & \frac{L}{10} & 0 & 0 \\ \frac{L}{10} & \frac{L^2}{30} & -\frac{L}{10} & -\frac{L^2}{120} & 0 & 0 \\ -\frac{24}{5} & -\frac{L}{10} & \frac{24}{5} & -\frac{L}{10} & 0 & 0 \\ \frac{L}{10} & -\frac{L^2}{120} & -\frac{L}{10} & \frac{L^2}{30} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$[Ne_2] = \frac{1}{L} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{24}{5} & \frac{L}{10} & -\frac{24}{5} & \frac{L}{10} \\ 0 & 0 & \frac{L}{10} & \frac{L^2}{30} & -\frac{L}{10} & -\frac{L^2}{120} \\ 0 & 0 & -\frac{24}{5} & -\frac{L}{10} & \frac{24}{5} & -\frac{L}{10} \\ 0 & 0 & \frac{L}{10} & -\frac{L^2}{120} & -\frac{L}{10} & \frac{L^2}{30} \end{bmatrix}$$

Sistem rijitlik matrisi $[K] = [ke_1] + [ke_2]$

$$[K] = \frac{EI}{L^3}\begin{bmatrix} 768 & 96L & -768 & 96L & 0 & 0 \\ 96L & 16L^2 & -96L & 8L^2 & 0 & 0 \\ -768 & -96L & 768 & -96L & 0 & 0 \\ 96L & 8L^2 & -96L & 16L^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} + \frac{EI}{L^3}\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 768 & 96L & -768 & 96L \\ 0 & 0 & 96L & 16L^2 & -96L & 8L^2 \\ 0 & 0 & -768 & -96L & 768 & -96L \\ 0 & 0 & 96L & 8L^2 & -96L & 16L^2 \end{bmatrix}$$

$$[K] = \frac{EI}{L^3}\begin{bmatrix} 768 & 96L & -768 & 96L & 0 & 0 \\ 96L & 16L^2 & -96L & 8L^2 & 0 & 0 \\ -768 & -96L & 1536 & 0 & -768 & 96L \\ 96L & 8L^2 & 0 & 32L^2 & -96L & 8L^2 \\ 0 & 0 & -768 & -96L & 768 & -96L \\ 0 & 0 & 96L & 8L^2 & -96L & 16L^2 \end{bmatrix}$$

Sistem geometrik yük matrisi; $[N] = [Ne_1] + [Ne_2]$

$$[N] = \frac{1}{L}\begin{bmatrix} \frac{24}{5} & \frac{L}{10} & -\frac{24}{5} & \frac{L}{10} & 0 & 0 \\ \frac{L}{10} & \frac{L^2}{30} & -\frac{L}{10} & -\frac{L^2}{120} & 0 & 0 \\ -\frac{24}{5} & -\frac{L}{10} & \frac{48}{5} & 0 & -\frac{24}{5} & \frac{L}{10} \\ \frac{L}{10} & -\frac{L^2}{120} & 0 & \frac{L^2}{15} & -\frac{L}{10} & -\frac{L^2}{120} \\ 0 & 0 & -\frac{24}{5} & -\frac{L}{10} & \frac{24}{5} & -\frac{L}{10} \\ 0 & 0 & \frac{L}{10} & -\frac{L^2}{120} & -\frac{L}{10} & \frac{L^2}{30} \end{bmatrix}$$

$$\frac{\partial(\delta^2\Pi)}{\partial D_s}=0 \longrightarrow \left([K]-P[N]\right)\{D_s\}=0$$

$$\frac{EI}{L^3}\begin{bmatrix} 768 & 96L & -768 & 96L & 0 & 0 \\ 96L & 16L^2 & -96L & 8L^2 & 0 & 0 \\ -768 & 96L & 1536 & 0 & -768 & 96L \\ 96L & 8L^2 & 0 & 32L^2 & -96L & 8L^2 \\ 0 & 0 & -768 & -96L & 768 & -96L \\ 0 & 0 & 96L & 8L^2 & -96L & 16L^2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} D_1 \\ D_2 \\ D_3 \\ D_4 \\ D_5 \\ D_6 \end{bmatrix} - P\frac{1}{L}\begin{bmatrix} \frac{24}{5} & \frac{L}{10} & -\frac{24}{5} & \frac{L}{10} & 0 & 0 \\ \frac{L}{10} & \frac{L^2}{30} & -\frac{L}{10} & -\frac{L^2}{120} & 0 & 0 \\ -\frac{24}{5} & -\frac{L}{10} & \frac{48}{5} & 0 & -\frac{24}{5} & \frac{L}{10} \\ \frac{L}{10} & -\frac{L^2}{120} & 0 & \frac{L^2}{15} & -\frac{L}{10} & -\frac{L^2}{120} \\ 0 & 0 & -\frac{24}{5} & -\frac{L}{10} & \frac{24}{5} & -\frac{L}{10} \\ 0 & 0 & \frac{L}{10} & -\frac{L^2}{120} & -\frac{L}{10} & \frac{L^2}{30} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} D_1 \\ D_2 \\ D_3 \\ D_4 \\ D_5 \\ D_6 \end{bmatrix} =$$

Sinir Şartları

$x=0 \longrightarrow w=0;\ D_1=0$
$w'=0;\ D_2=0$ } Ankastre mesnet

$x=\frac{L}{2} \longrightarrow w'=0;\ D_6=0$ } simetriden

$$\frac{EI}{L^3}\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1536 & 0 & -768 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 32L^2 & -96L & 0 \\ 0 & 0 & -768 & -96L & 768 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ D_3 \\ D_4 \\ D_5 \\ 0 \end{bmatrix} - P\frac{1}{L}\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{48}{5} & 0 & -\frac{24}{5} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{L^2}{15} & -\frac{L}{10} & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{24}{5} & -\frac{L}{10} & \frac{24}{5} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ D_3 \\ D_4 \\ D_5 \\ 0 \end{bmatrix} = 0$$

$$\frac{EI}{L^3}\left(1536D_3-768D_5\right)-P\frac{1}{L}\left(\frac{48}{5}D_3-\frac{24}{5}D_5\right)=0$$

$$\frac{EI}{L^3}\left(32L^2D_4-96LD_5\right)-P\frac{1}{L}\left(\frac{L^2}{15}D_4-\frac{L}{10}D_5\right)=0$$

$$\frac{EI}{L^3}\left(-768D_3-96LD_4+768D_5\right)-P\frac{1}{L}\left(-\frac{24}{5}D_3-\frac{L}{10}D_4+\frac{24}{5}D_5\right)=0$$

$$\left(\frac{EI}{L^3}1536-\frac{P}{L}\frac{48}{5}\right)D_3-\left(768\frac{EI}{L^3}-\frac{24}{5}\frac{P}{L}\right)D_5=0$$

$$\left(32L^2\frac{EI}{L^3}-\frac{P}{L}\frac{L^2}{15}\right)D_4-\left(96L\frac{EI}{L^3}-\frac{L}{10}\frac{P}{L}\right)D_5=0$$

$$-\left(768\frac{EI}{L^3}-\frac{P}{L}\frac{24}{5}\right)D_3-\left(96L\frac{EI}{L^3}-\frac{L}{10}\frac{P}{L}\right)D_4+\left(768\frac{EI}{L^3}-\frac{24}{5}\frac{P}{L}\right)D_5$$

Sistemin ilk konumunun kararsız hale gelmesi ve $\{D_5\}=0$'dan farklı kararlı bir başka denge konumunun bulunması için yukarıdaki denklem takımının katsayılar determinantının sıfır olması gerekir. (Δ) determinantını sıfır yapan yük kritik yüktür.

$$\Delta=\begin{vmatrix}\left(\frac{EI}{L^2}1536-P\frac{48}{5}\right) & 0 & -\left(768\frac{EI}{L^2}-P\frac{24}{5}\right)\\ 0 & \left(32EI-\frac{PL^2}{15}\right) & -\left(96\frac{EI}{L}-P\frac{L}{10}\right)\\ -\left(768\frac{EI}{L^2}-P\frac{24}{5}\right) & -\left(96\frac{EI}{L}-P\frac{L}{10}\right) & \left(768\frac{EI}{L^2}-P\frac{24}{5}\right)\end{vmatrix}=0$$

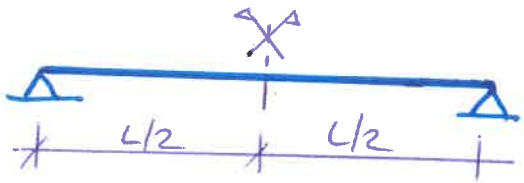
$$0{,}3P^2L^2-166{,}4PEI+\frac{6144(EI)^2}{L^2}=0$$

$P_{kr}=\frac{39{,}766EI}{L^2}$; sonlu eleman

$P_{kr}=\frac{4\pi^2EI}{L^2}\cong\frac{39{,}5EI}{L^2}$ kesin çözüm

---

Sistemin 2 ucunun basit mesnetli olması halinde,



$x=0\rightarrow w=0$ $(D_1=0)$ $\quad x=\frac{L}{2}\rightarrow w'=0$ $(D_6=0)$

$$\frac{EI}{L^3}\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 16L^2 & -96L & 8L^2 & 0 & 0 \\ 0 & -96L & 1536 & 0 & -768 & 0 \\ 0 & 8L^2 & 0 & 32L^2 & -96L & 0 \\ 0 & 0 & -768 & -96L & 768 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 \\ D_2 \\ D_3 \\ D_4 \\ D_5 \\ 0 \end{bmatrix} - \frac{P}{L}\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{L^2}{30} & -\frac{L}{10} & -\frac{L^2}{120} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{L}{10} & \frac{48}{5} & 0 & -\frac{24}{5} & 0 \\ 0 & -\frac{L^2}{120} & 0 & \frac{L^2}{15} & -\frac{L}{10} & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{24}{5} & -\frac{L}{10} & \frac{24}{5} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 \\ D_2 \\ D_3 \\ D_4 \\ D_5 \\ 0 \end{bmatrix} = 0$$

$$\left(16L^2\frac{EI}{L^2} - \frac{PL^2}{30}\right)D_2 - \left(96L\frac{EI}{L^2} - P\frac{L}{10}\right)D_3 + \left(8L^2\frac{EI}{L^2} + P\frac{L^2}{120}\right)D_4 = 0$$

$$-\left(96L\frac{EI}{L^2} - \frac{PL}{10}\right)D_2 + \left(1536\frac{EI}{L^2} - P\frac{48}{5}\right)D_3 - \left(768\frac{EI}{L^2} - P\frac{24}{5}\right)D_5 = 0$$

$$\left(8L^2\frac{EI}{L^2} + \frac{PL^2}{120}\right)D_2 + \left(32L^2\frac{EI}{L^2} - P\frac{L^2}{15}\right)D_4 - \left(96L\frac{EI}{L^2} - P\frac{L}{10}\right)D_5 = 0$$

$$-\left(768\frac{EI}{L^2} - P\frac{24}{5}\right)D_3 - \left(96L\frac{EI}{L^2} - P\frac{L}{10}\right)D_4 + \left(768\frac{EI}{L^2} - P\frac{24}{5}\right)D_5 = 0$$

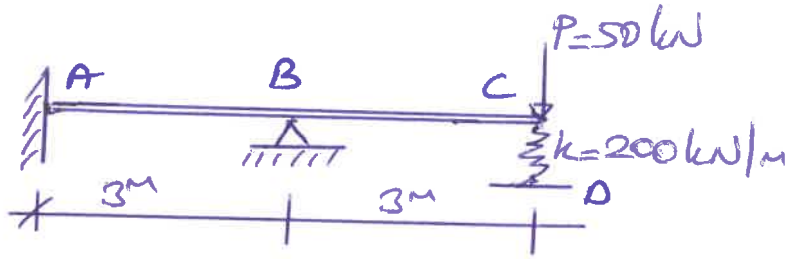
$$\begin{vmatrix} \left(16EI - \frac{PL^2}{30}\right) & -\left(96\frac{EI}{L} - P\frac{L}{10}\right) & \left(8EI + P\frac{L^2}{120}\right) & 0 \\ -\left(96\frac{EI}{L} - \frac{PL}{10}\right) & \left(1536\frac{EI}{L^2} - P\frac{48}{5}\right) & 0 & -\left(768\frac{EI}{L^2} - P\frac{24}{5}\right) \\ \left(8EI + \frac{PL^2}{120}\right) & 0 & \left(32EI - P\frac{L^2}{15}\right) & -\left(96\frac{EI}{L^2} - P\frac{L}{10}\right) \\ 0 & -\left(768\frac{EI}{L^2} - \frac{P24}{5}\right) & -\left(96\frac{EI}{L} - P\frac{L}{10}\right) & \left(768\frac{EI}{L^2} - P\frac{24}{5}\right) \end{vmatrix} = 0$$

$P_{kr} = \frac{987EI}{L^2}$ sonlu eleman ; $P_{kr} = \frac{\pi^2 EI}{L^2} \cong \frac{986EI}{L^2}$ kesin sözüm

ÇUBUKTA ELASTİK YAY OLMASI DURUMUNDA

Gubakta elastik yay olması durumu

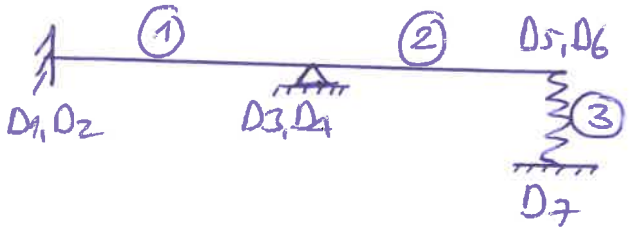
ÖRNEK



$E = 210 GPa = 21 \cdot 10^7 kN/m^2$

$I = 2 \cdot 10^{-4} m^4$

$k = 200 kN/m$



$$[k_1] = [k_2] = \begin{bmatrix} \frac{12EI}{L^3} & \frac{6EI}{L^2} & -\frac{12EI}{L^3} & \frac{6EI}{L^2} \\ \frac{6EI}{L^2} & \frac{4EI}{L} & -\frac{6EI}{L^2} & \frac{2EI}{L} \\ -\frac{12EI}{L^3} & -\frac{6EI}{L^2} & \frac{12EI}{L^3} & -\frac{6EI}{L^2} \\ \frac{6EI}{L^2} & \frac{2EI}{L} & -\frac{6EI}{L^2} & \frac{4EI}{L} \end{bmatrix}$$

$$[k_3] = \begin{bmatrix} k & -k \\ -k & k \end{bmatrix}$$

$$[C_1] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$[C_3] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$[C_2] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$[K_{e1}] = [C_1]^T [k_1] [C_1]$$

$$[K_{e2}] = [C_2]^T [k_2] [C_2]$$

$$[K_{e3}] = [C_3]^T [k_3] [C_3]$$

$$[K]_s = [K_{e1}] + [K_{e2}] + [K_{e3}]$$

E2

D_1 (v_1)	D_2 (φ_1)	D_3 (v_2)	D_4 (φ_2)	D_5 (v_3)	D_6 (φ_3)	D_7 (v_4)		
$\frac{12EI}{L^3}$	$\frac{6EI}{L^2}$	$-\frac{12EI}{L^3}$	$\frac{6EI}{L^2}$	0	0	0	D_1	0
$\frac{6EI}{L^2}$	$\frac{4EI}{L}$	$-\frac{6EI}{L^2}$	$\frac{2EI}{L}$	0	0	0	D_2	0
$-\frac{12EI}{L^3}$	$-\frac{6EI}{L^2}$	$\frac{24EI}{L^3}$	0	$-\frac{12EI}{L^3}$	$\frac{6EI}{L^2}$	0	D_3	0
$\frac{6EI}{L^2}$	$\frac{2EI}{L}$	0	$\frac{8EI}{L}$	$-\frac{6EI}{L^2}$	$\frac{2EI}{L}$	0	D_4	0
0	0	$-\frac{12EI}{L^3}$	$-\frac{6EI}{L^2}$	$\frac{12EI}{L^3}+k$	$-\frac{6EI}{L^2}$	$-k$	D_5	$-P$
0	0	$\frac{6EI}{L^2}$	$\frac{2EI}{L}$	$-\frac{6EI}{L^2}$	$\frac{4EI}{L}$	0	D_6	0
0	0	0	0	$-k$	0	k	D_7	0

$$\begin{bmatrix} \frac{8EI}{L} & -\frac{6EI}{L^2} & \frac{2EI}{L} \\ -\frac{6EI}{L^2} & \frac{12EI}{L^3}+k & -\frac{6EI}{L^2} \\ \frac{2EI}{L} & -\frac{6EI}{L^2} & \frac{4EI}{L} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} D_4\,(\varphi_2) \\ D_5\,(v_3) \\ D_6\,(\varphi_3) \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ -P \\ 0 \end{Bmatrix}$$

$$\frac{EI}{L^3} \begin{bmatrix} 8L^2 & -6L & 2L^2 \\ -6L & 12+k' & -6L \\ 2L^2 & -6L & 4L^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} D_4 \\ D_5 \\ D_6 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ -P \\ 0 \end{Bmatrix} \qquad k' = \frac{kL^3}{EI}$$

$$D_4\,(\varphi_2) = -\frac{3PL^2}{EI}\left(\frac{1}{12+7k'}\right); \quad D_5\,(v_3) = -\frac{7PL^3}{EI}\left(\frac{1}{12+7k'}\right)$$

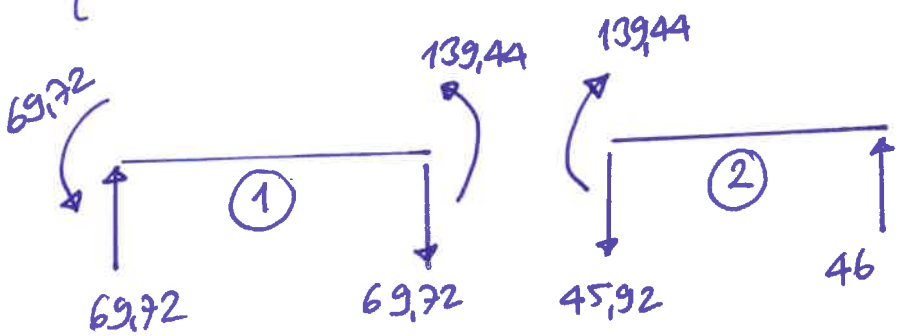
$$D_6\,(\varphi_3) = -\frac{9PL^2}{EI}\left(\frac{1}{12+7k'}\right) \qquad D_4 = -0{,}00249\ \text{rad.};\ D_5 = -0{,}07114;\ D_6 = -0{,}00247\ \text{rad.}$$

E3

$$\begin{Bmatrix} V_A \\ M_A \\ V_{B_1} \\ M_{B_1} \end{Bmatrix} = \frac{EI}{L^3} \begin{bmatrix} 12 & 6L & -12 & 6L \\ 6L & 4L^2 & -6L & 2L^2 \\ -12 & -6L & 12 & -6L \\ 6L & 2L^2 & -6L & 4L^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ -0{,}00249 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -69{,}72 \\ -69{,}72 \\ 69{,}72 \\ -139{,}44 \end{Bmatrix}$$

$$\begin{Bmatrix} V_{B_2} \\ M_{B_2} \\ V_C \\ M_C \end{Bmatrix} = \frac{EI}{L^3} \begin{bmatrix} 12 & 6L & -12 & 6L \\ 6L & 4L^2 & -6L & 2L^2 \\ -12 & -6L & 12 & -6L \\ 6L & 2L^2 & -6L & 4L^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 0 \\ -0{,}00249 \\ -0{,}0174 \\ -0{,}00747 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 45{,}92 \\ 139{,}44 \\ -46 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

$$\begin{Bmatrix} V_{CD} \\ V_{DC} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} k & -k \\ -k & k \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} -0{,}0174 \\ 0 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -3{,}48 \\ 3{,}48 \end{Bmatrix}$$





EK:1A

KAFES SİSTEMLERİN SONLU ELEMANLAR YÖNTEMİ İLE ÇÖZÜMÜ

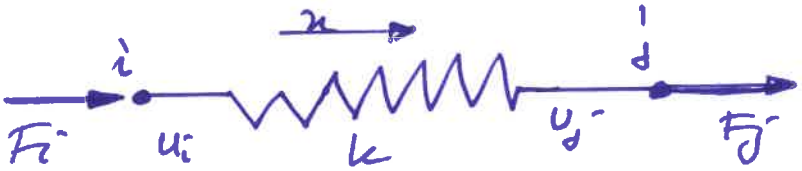
Kafes Sistemlerin Sonlu Elemanlar Yöntemi ile Hesabı

1- Giriş

Kafes Sistemlerin çözümünde yay elemanlarından faydalanmak sonlu elemanlarda basitliği yönünden tercih edilmektedir. Eleman ve sistem eşitliğini tanımlamak için derece kolay olmaktadır.

2- Yay Elemanı

Doğrusal elastik davranış gösteren yay elemanında yerdeğiştirmeler u, yay kuvveti F, yay eşitliği veya yay katsayısı k ise;



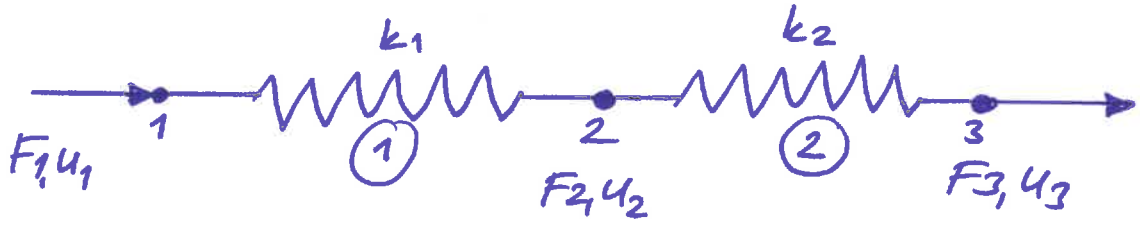
$$F = k(u_j - u_i) = k \cdot \Delta u$$

$$F_i + F_j = 0 \longrightarrow F_i = -F_j$$

$$\left.\begin{aligned} F_i + k(u_j - u_i) &= 0 \\ F_j - k(u_j - u_i) &= 0 \end{aligned}\right\} \begin{aligned} F_i &= ku_i - ku_j \\ F_j &= -ku_i + ku_j \end{aligned}$$

veya $[k]\{u\} = \{F\}$ dir. $\quad \begin{Bmatrix} F_i \\ F_j \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} k & -k \\ -k & k \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_i \\ u_j \end{Bmatrix}$ olur.

Tekli yay durumunda ise;



$\{u^1\} = \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{Bmatrix}$ $\{u^2\} = \begin{Bmatrix} u_2 \\ u_3 \end{Bmatrix}$ elemanda yerdeğiştirmeler

$\{F\}^1 = \begin{Bmatrix} F_1 \\ F_2 \end{Bmatrix}$ $\{F\}^2 = \begin{Bmatrix} F_2 \\ F_3 \end{Bmatrix}$ Elemanda kuvvetler

$$\begin{bmatrix} k_1 & -k_1 \\ -k_1 & k_1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} F_1 \\ F_2 \end{Bmatrix} ; \quad \begin{bmatrix} k_2 & -k_2 \\ -k_2 & k_2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_2 \\ u_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} F_2 \\ F_3 \end{Bmatrix}$$

Genel matrisleri ise;

$$[Ce_1] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \qquad Ce_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$[ke]_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} k_1 & -k_1 \\ -k_1 & k_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} k_1 & -k_1 & 0 \\ -k_1 & k_1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$[ke]_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} k_2 & -k_2 \\ -k_2 & k_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & k_2 & -k_2 \\ 0 & -k_2 & k_2 \end{bmatrix}$$

$$[K]_s = [ke_1] + [ke_2] = \begin{bmatrix} k_1 & -k_1 & 0 \\ 0 & k_1+k_2 & -k_2 \\ 0 & -k_2 & k_2 \end{bmatrix}$$

$$\{u\}_s = \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{Bmatrix} \qquad \{F\}_s = \begin{Bmatrix} F_1 \\ F_1+F_2 \\ F_2 \end{Bmatrix}$$

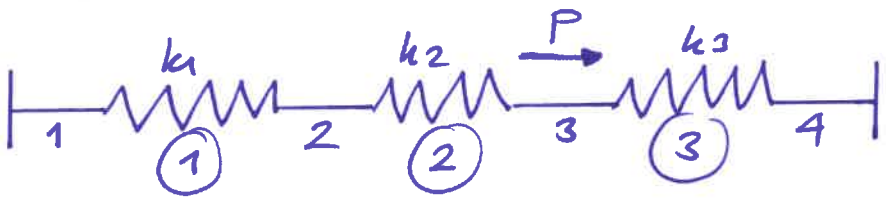
$$\{k\}_s \{u\}_s = \{F\}_s$$

ÖRNEK:1

Şekilde verilen sistemin 2 ve 3 nolu düğüm noktalarının yerdeğiştirmelerini, mesnet tepkilerini ve yay kuvvetlerini bulunuz.

$k = 100$ kN/m

$P = 0{,}5$ kN



$$k_1 = k_3 = \begin{bmatrix} 100 & -100 \\ -100 & 100 \end{bmatrix} \qquad k_2 = \begin{bmatrix} 200 & -200 \\ -200 & 200 \end{bmatrix}$$

$$[Ce_1] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad [Ce_2] = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \quad [Ce_3] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$[k]_s = \begin{bmatrix} 100 & -100 & 0 & 0 \\ -100 & 100+200 & -200 & 0 \\ 0 & -200 & 200+100 & -100 \\ 0 & 0 & -100 & 100 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 100 & -100 & 0 & 0 \\ -100 & 300 & -200 & 0 \\ 0 & -200 & 300 & -100 \\ 0 & 0 & -100 & 100 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} +100 & -100 & 0 & 0 \\ -100 & 300 & -200 & 0 \\ 0 & -200 & 300 & -100 \\ 0 & 0 & -100 & 100 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} R_1 \\ 0 \\ P \\ R_2 \end{Bmatrix} \quad \left| \begin{array}{l} u_1 = 0 \\ \\ u_4 = 0 \end{array} \right.$$

$$\begin{bmatrix} 300 & -200 \\ -200 & 300 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_2 \\ u_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ P \end{Bmatrix} \longrightarrow \begin{Bmatrix} u_2 \\ u_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0{,}002\,m \\ 0{,}003\,m \end{Bmatrix}$$

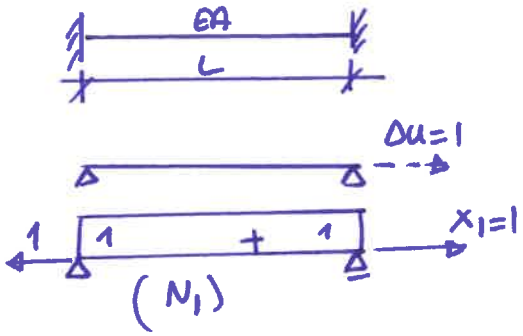
$$F_1 = \begin{bmatrix} k & -k \\ -k & k \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{Bmatrix} \quad F_2 = \begin{bmatrix} 2k & -2k \\ -2k & 2k \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_2 \\ u_3 \end{Bmatrix} \quad F_3 = \begin{bmatrix} k & -k \\ -k & k \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_3 \\ u_4 \end{Bmatrix}$$

$$F_1 = \begin{Bmatrix} F_1^- \\ F_j^- \end{Bmatrix}^1 = \begin{bmatrix} 100 & -100 \\ -100 & 100 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 0 \\ 0{,}002 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -0{,}2 \\ 0{,}2 \end{Bmatrix} kN$$

$$F_2 = \begin{Bmatrix} F_2^- \\ F_j^- \end{Bmatrix}^2 = \begin{bmatrix} 200 & -200 \\ -200 & 200 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 0{,}002 \\ 0{,}003 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -0{,}2 \\ 0{,}2 \end{Bmatrix} kN$$

$$F_3 = \begin{Bmatrix} F_3^- \\ F_j^- \end{Bmatrix}^3 = \begin{bmatrix} 100 & -100 \\ -100 & 100 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 0{,}003 \\ 0 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0{,}3 \\ -0{,}3 \end{Bmatrix} kN$$

Eksenel Kuvvet Elemanı



$$\delta_{1\omega} = -1.1 = -1 \qquad \delta_{11} = \frac{L.1.1}{EA}$$

$$\left.\begin{array}{l} \delta_{1\omega} + \delta_{11}.x_1 = 0 \\ x_1 = \dfrac{EA}{L} \end{array}\right\} \quad \boxed{F = \frac{EA}{L}}$$

$$\sigma = \frac{F}{A} \rightarrow F = \sigma.A = \varepsilon.\frac{\Delta u}{L}.A = \frac{EA}{L}.\Delta u$$

$$\sigma = E.\varepsilon = E.\frac{\Delta u}{L}$$

şeklinde olacağı ve $k = \frac{EA}{L}$ değerinin çubuğun eksenel eğiliğini temsil ettiği dikkate alınırsa;

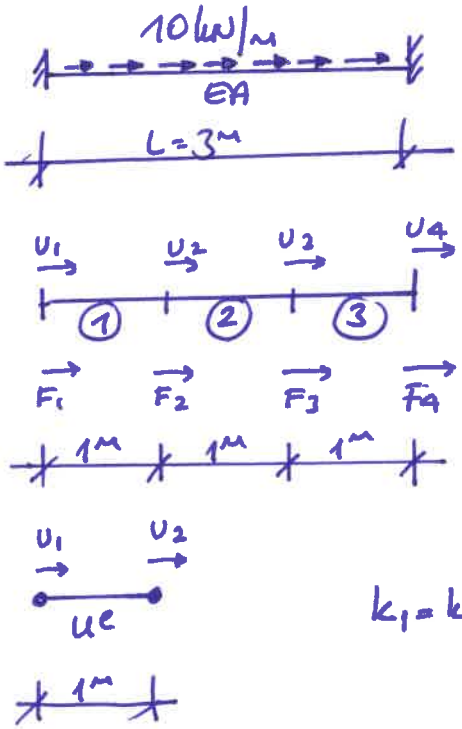
$$F_i = \frac{EA}{L}(u_i - u_j) = \overset{k}{\frac{EA}{L}} u_i - \overset{-k}{\frac{EA}{L}} u_j$$

$$F_j = -\frac{EA}{L}(u_i - u_j) = -\frac{EA}{L} u_i + \frac{EA}{L} u_j$$

$$\boxed{\begin{Bmatrix} F_i \\ F_j \end{Bmatrix} = \frac{EA}{L}\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} u_i \\ u_j \end{Bmatrix}}$$ olur.

Örnek

Şekilde görülen iki uçu ankastre normal kuvvet etkisiyle mesnet tepkilerini ve çubuk kuvvetlerini hesaplayınız.



$$k_1 = k_2 = k_3 = EA\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$[Ce_1] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad [Ce_2] = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \quad [Ce_3] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$[K_1]^e = [Ce_1]^T [K_1] [Ce_1] = \frac{EA}{L}\begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$[K_2]^e = [Ce_2]^T [K_2] [Ce_2] = \frac{EA}{L}\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$[K_3]^e = [Ce_3]^T [K_3] [Ce_3] = \frac{EA}{L}\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$[K]_s = \frac{EA}{L}\begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} F_1 \\ F_2 \\ F_3 \\ F_4 \end{Bmatrix} \quad \Big| \begin{array}{l} u_1 = 0 \\ u_4 = 0 \end{array}$$

Yerdeğiştirmelerin Hesabı

$$\frac{EA}{L}\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} u_2 \\ u_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} F_1 \\ F_2 \end{Bmatrix}$$

$F_1 = 5\ kN$
$F_2 = 10\ kN$
$F_3 = 10\ kN$
$F_4 = 5\ kN$

$$\frac{EA}{L}\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} u_2 \\ u_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 10 \\ 10 \end{Bmatrix}$$

$$\begin{Bmatrix} u_2 \\ u_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 10/EA \\ 10/EA \end{Bmatrix}$$

Mesnet Tepkilerinin Hesabı

$$\frac{EA}{L}\begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & -1 \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} 0 \\ 10/EA \\ 10/EA \\ 0 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} R_{Ax}+5 \\ 10 \\ 10 \\ R_{Bx}+5 \end{Bmatrix}$$

$$\frac{EA}{L}\left(-10/EA\right) = R_{Ax}+5 \qquad \frac{EA}{L}\left(-10/EA\right) = R_{Bx}+5$$

$$R_{Ax} = -15\ kN \qquad R_{Bx} = -15\ kN$$

Gubuk kuvvetlerinin hesabı

$$F_1 = ku = F_e - F_q$$

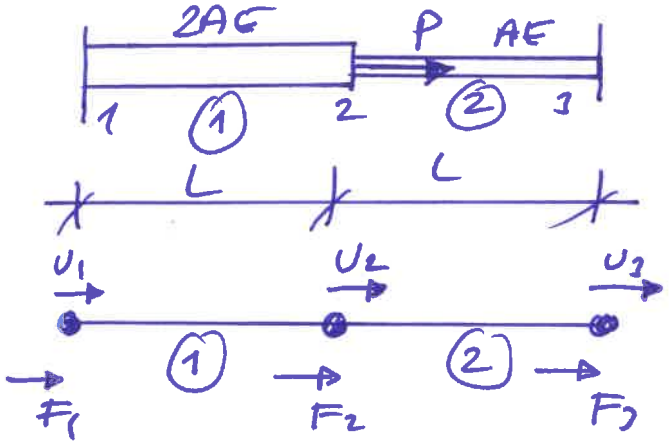
$$F_1^e = \begin{Bmatrix} N_i \\ N_j \end{Bmatrix} = \frac{EA}{L}\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{Bmatrix} - \begin{Bmatrix} 5 \\ 5 \end{Bmatrix}$$

$$= \frac{EA}{L}\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} 0 \\ 10/EA \end{Bmatrix} - \begin{Bmatrix} 5 \\ 5 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -15 \\ 5 \end{Bmatrix} kN$$

$$F_2^e = \begin{Bmatrix} N_i \\ N_j \end{Bmatrix} = \frac{EA}{L}\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} 10/EA \\ 10/EA \end{Bmatrix} - \begin{Bmatrix} 5 \\ 5 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -5 \\ -5 \end{Bmatrix}$$

$$F_3^e = \frac{EA}{L}\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} 10/EA \\ 0 \end{Bmatrix} - \begin{Bmatrix} 5 \\ 5 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 5 \\ -15 \end{Bmatrix}$$

ÖRNEK 2 : Yerdeğiştirmelerin hesaplanması.



$$k_1 = \frac{2EA}{L}\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$k_2 = \frac{EA}{L}\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$[Ce_1] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \qquad [Ce_2] = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\left.\begin{aligned} [K_1]^e &= [Ce_1]^T [k_1][Ce_1] \\ [K_2]^e &= [Ce_2]^T [k_2][Ce_2] \end{aligned}\right\} \quad [K]_s = [K_1]^e + [K_2]^e$$

$$[K_s] = \frac{EA}{L}\begin{bmatrix} 2 & -2 & 0 \\ -2 & 3 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

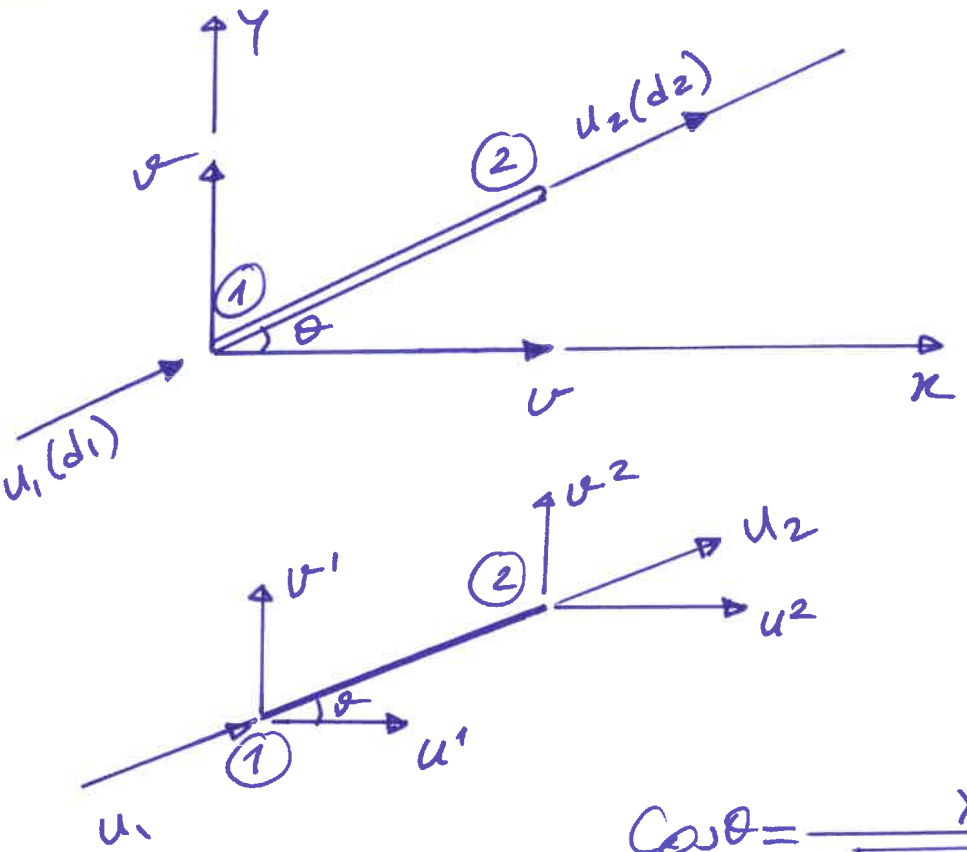
Yerdeğiştirmelerin Hesabı

$$\frac{EA}{L}\begin{bmatrix} 2 & -2 & 0 \\ -2 & 3 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} U_1 \\ U_2 \\ U_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} F_1 \\ F_2 \\ F_3 \end{Bmatrix} \quad \Big\| \begin{array}{l} U_1 = 0 \\ U_3 = 0 \\ F_2 = P \end{array}$$

$$\frac{3EA}{L} U_2 = P \rightarrow \boxed{U_2 = \frac{PL}{3EA}}$$

KAFES SİSTEMLER

Dönüşüm Matrisi



$$\cos\theta = \frac{x_2 - x_1}{\sqrt{(x_2-x_1)^2 + (y_2-y_1)^2}}$$

$$u_1 = u^1 \cdot \cos\theta + v^1 \sin\theta$$

$$\cos\theta = \frac{x_2 - x_1}{L}$$

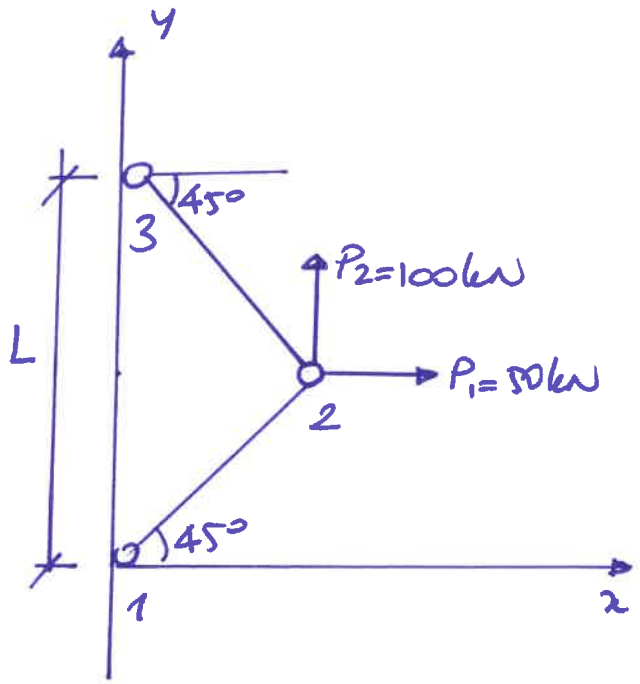
$$u_2 = u^2 \cdot \cos\theta + v^2 \sin\theta$$

$$\sin\theta = \frac{y_2 - y_1}{\sqrt{(x_2-x_1)^2 + (y_2-y_1)^2}}$$

$$[T] = \begin{bmatrix} c & s & 0 & 0 \\ 0 & 0 & c & s \end{bmatrix}$$

$$\sin\theta = \frac{y_2 - y_1}{L}$$

PRIMJER 1



$$[k_1]=[k_2]=\frac{EA}{L}\begin{bmatrix}1 & -1\\ -1 & 1\end{bmatrix}$$

DN	X	Y
1	0	0
2	L/2	L/2
3	0	L

EN	i	j	L	C	S
1	1	2	$\frac{L\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$
2	2	3	$\frac{L\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$

$$[T_1]=\begin{bmatrix}\sqrt{2}/2 & \sqrt{2}/2 & 0 & 0\\ 0 & 0 & \sqrt{2}/2 & \sqrt{2}/2\end{bmatrix}$$

$$[T_2]=\begin{bmatrix}-\sqrt{2}/2 & \sqrt{2}/2 & 0 & 0\\ 0 & 0 & -\sqrt{2}/2 & \sqrt{2}/2\end{bmatrix}$$

$$k_1=[T_1]^T[k_1][T_1]=\frac{EA}{2}\begin{bmatrix}1 & 1 & -1 & -1\\ 1 & 1 & -1 & -1\\ -1 & -1 & 1 & 1\\ -1 & -1 & 1 & 1\end{bmatrix}$$

$$k_2 = [T_2]^T [k_2] [T_2] = \frac{EA}{2} \begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

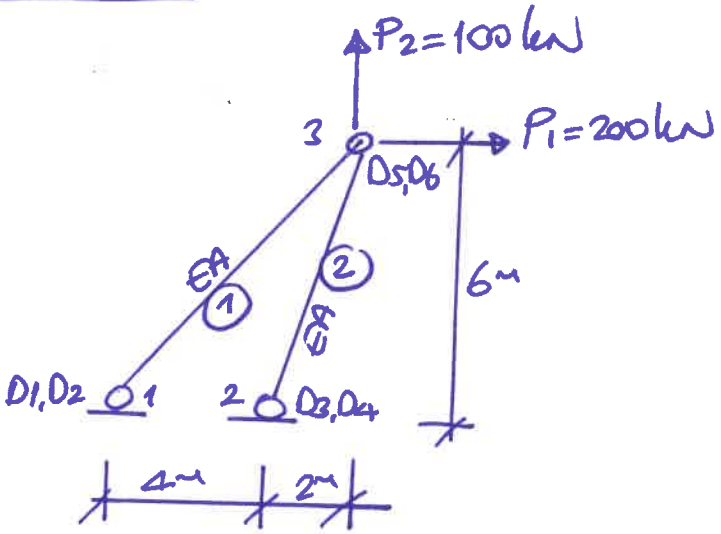
$$\frac{EA}{2L} \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & -1 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 2 & 0 & -1 & 1 \\ -1 & -1 & 0 & 2 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ v_1 \\ u_2 \\ v_2 \\ u_3 \\ v_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} F_{1x} \\ F_{1y} \\ F_{2x} \\ F_{2y} \\ F_{3x} \\ F_{3y} \end{Bmatrix}$$

$$u_1 = 0 \,,\; v_1 = 0 \,,\; u_3 = 0 \,,\; v_3 = 0$$

$$\frac{EA}{2L} \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_2 \\ v_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} F_{2x} \\ F_{2y} \end{Bmatrix}$$

$$\begin{Bmatrix} u_2 \\ v_2 \end{Bmatrix} = \frac{L}{EA} \begin{Bmatrix} 500 \\ 100 \end{Bmatrix}$$

ÖRNEK : 3



$E = 200\ GPa$

$A = 0{,}01\ m^2$

$L_1 = \sqrt{6^2+6^2} = 8{,}49\ m.$

$L_2 = \sqrt{(6-4)^2+6^2} = 6{,}32\ m.$

DN	X(m)	Y(m)
1	0	0
2	4	0
3	6	6

EN	i	j	L	C	S
1	1	3	8,49	0,707	0,707
2	2	3	6,32	0,316	0,949

$$C_1 = \cos\theta_1 = \frac{X_3 - X_1}{L_1} = \frac{6}{8{,}49} = 0{,}707$$

$$S_1 = \sin\theta_1 = \frac{y_3 - y_1}{L_1} = \frac{6}{8{,}49} = 0{,}707$$

$$C_2 = \cos\theta_2 = \frac{X_3 - X_2}{L_2} = \frac{2}{6{,}32} = 0{,}316$$

$$S_2 = \sin\theta_2 = \frac{y_1 - y_2}{L_2} = \frac{6}{6{,}32} = 0{,}949$$

$$[T_1] = \begin{bmatrix} 0{,}707 & 0{,}707 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0{,}707 & 0{,}707 \end{bmatrix}$$

$$[T_2] = \begin{bmatrix} 0{,}316 & 0{,}949 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0{,}316 & 0{,}949 \end{bmatrix}$$

$$[Ce_1] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$[Ce_2] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$k_1 = \frac{EA}{L_1}\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$k_1 = \frac{(200.10^9)0{,}01}{849}\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$k_1 = 2357.10^5\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$k_2 = \frac{EA}{L_2}\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= \frac{(200.10^9)0{,}01}{6{,}32}\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= 3162.10^5\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$[K_1] = [T_1]^T[k_1][T_1] = 2357.10^5\begin{vmatrix} 0{,}50 & 0{,}50 & -0{,}50 & -0{,}50 \\ 0{,}50 & 0{,}50 & -0{,}50 & -0{,}50 \\ -0{,}50 & -0{,}50 & 0{,}50 & 0{,}50 \\ -0{,}50 & -0{,}50 & 0{,}50 & 0{,}50 \end{vmatrix}$$

$$[K_2] = [T_2]^T[K_2][T_2] = 3162.10^5\begin{vmatrix} 0{,}10 & 0{,}30 & -0{,}10 & -0{,}30 \\ 0{,}30 & 0{,}90 & -0{,}30 & -0{,}90 \\ -0{,}10 & -0{,}30 & 0{,}10 & 0{,}30 \\ -0{,}30 & -0{,}90 & 0{,}30 & 0{,}90 \end{vmatrix}$$

$$[K_3]^1 = [Ce_1]^T[K_1][Ce_1] = 2357.10^5\begin{vmatrix} 0{,}50 & 0{,}50 & 0 & 0 & -0{,}50 & -0{,}50 \\ 0{,}50 & 0{,}50 & 0 & 0 & -0{,}50 & -0{,}50 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -0{,}50 & -0{,}50 & 0 & 0 & 0{,}50 & 0{,}50 \\ -0{,}50 & -0{,}50 & 0 & 0 & 0{,}50 & 0{,}50 \end{vmatrix}$$

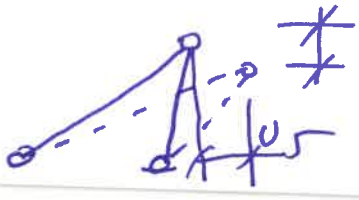
$$[K_3]^2 = [Ce_2]^T [K_2] [Ce_2] = 3162.10^5 \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0{,}10 & 0{,}30 & -0{,}1 & -0{,}3 \\ 0 & 0 & 0{,}3 & 0{,}9 & -0{,}3 & -0{,}9 \\ 0 & 0 & -0{,}1 & -0{,}3 & 0{,}1 & 0{,}3 \\ 0 & 0 & -0{,}3 & -0{,}9 & 0{,}3 & 0{,}9 \end{bmatrix}$$

$$[K_3] = [K_1]^3 + [K_2]^3 = 10^5 \begin{bmatrix} 1178{,}5 & 1178{,}5 & 0 & 0 & -1178{,}5 & -1178{,}5 \\ 1178{,}5 & 1178{,}5 & 0 & 0 & -1178{,}5 & -1178{,}5 \\ 0 & 0 & 316{,}2 & 948{,}6 & -316{,}2 & -948{,}6 \\ 0 & 0 & 948{,}6 & 2845{,}8 & -948{,}6 & -2845{,}8 \\ -1178{,}5 & -1178{,}5 & -316{,}2 & -948{,}6 & 1494{,}7 & 2127{,}1 \\ -1178{,}5 & -1178{,}5 & -948{,}6 & -2845{,}8 & 2127{,}1 & 4024{,}3 \end{bmatrix}$$

$$[K_3]\{U\} = \{F\}$$

$$10^5 \begin{bmatrix} \ddots & & & & & \\ & \ddots & & & & \\ & & \ddots & & & \\ & & & \ddots & & \\ & & & & \ddots & \\ & & & & & \ddots \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} U_1 \\ U_2 \\ U_3 \\ U_4 \\ U_5 \\ U_6 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} F_{1x} \\ F_{1y} \\ F_{2x} \\ F_{2y} \\ F_{3x} \\ F_{3y} \end{Bmatrix} \quad \Big\| \quad \begin{matrix} U_1 = 0 \\ U_2 = 0 \\ U_3 = 0 \\ U_4 = 0 \end{matrix}$$

$$10^5 \begin{bmatrix} 1494{,}7 & 2127{,}1 \\ 2127{,}1 & 4024{,}3 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} U_5 \\ U_6 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 200.10^3 \\ 100.10^3 \end{Bmatrix} \Rightarrow \begin{matrix} U_5 = 0{,}0033734\,m \\ U_6 = -0{,}0018857\,m \end{matrix}$$



Mesnet Tepkilerinin Hesabı

$$10^5 \begin{bmatrix} \ddots \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0{,}003973 \\ -0{,}001857 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} R_{1x} \\ R_{1y} \\ R_{2x} \\ R_{2y} \\ 200 \cdot 10^2 \\ 100 \cdot 10^3 \end{Bmatrix}$$

$$10^{-3}\left[10^5(-1178{,}5 \times 0{,}003973) - 10^5(-1178{,}5 \times 0{,}001857)\right] = R_{1x}$$

$$R_{1x} = -250\,kN$$

$$10^{-3}\left[10^5(\ \ \times\ \ ) - \ \ (\ \ \times\ \ )\right] = R_{1y}$$

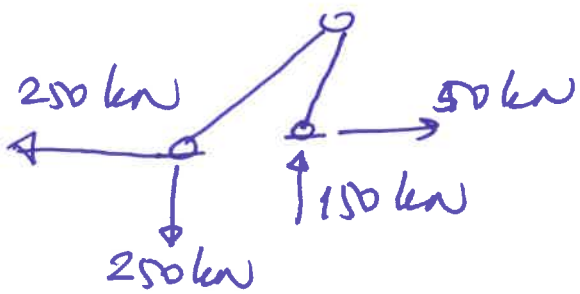
$$R_{1y} = -250\,kN$$

$$10^{-3}\left[10^5(-316{,}2 \times 0{,}003973) - 10^5(-948{,}6 \times 0{,}001857)\right] = R_{3x}$$

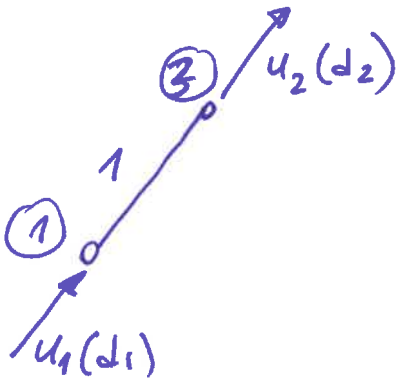
$$R_{3x} = 50\,kN$$

$$10^{-3}\left[10^5(-948{,}6 \times \ \ ) - 10^5(-2845{,}8 \times \ \ )\right] = R_{3y}$$

$$R_{3y} = 150\,kN$$



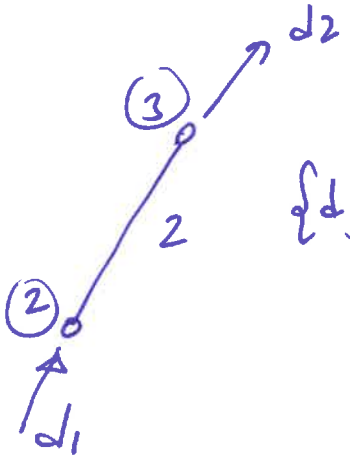
1 nolu elemanın lokal yerdeğiştirmeleri



$$\{d\}^1 = \begin{Bmatrix} d_1' \\ d_2' \end{Bmatrix} = [T_1]\{u^1\} = \begin{bmatrix} 0{,}707 & 0{,}707 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0{,}707 & 0{,}707 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0{,}0015 \\ -0{,}0015 \end{Bmatrix}$$

$$= \begin{Bmatrix} 0 \\ 0{,}0015\,m \end{Bmatrix}$$

2nolu elemanın lokal yerdeğiştirmeleri



$$\{d\}^2 = \begin{Bmatrix} d_1^2 \\ d_2^2 \end{Bmatrix} = [T_2]\{u^2\} = \begin{bmatrix} 0{,}316 & 0{,}949 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0{,}316 & 0{,}949 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0{,}0015 \\ -0{,}0015 \end{Bmatrix}$$

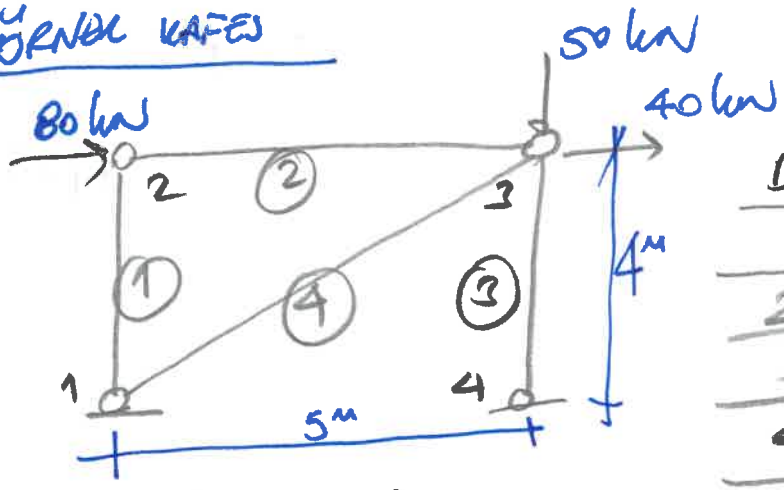
$$= \begin{Bmatrix} 0 \\ -0{,}0005\,m \end{Bmatrix}$$

Elemanlardaki Eksenel Kuvvetler

$$F^{(1)} = k_1 . u^1 = 10^5 \begin{bmatrix} 2357 & -2357 \\ -2357 & 2357 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 0 \\ 0{,}0015 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -353553 \\ 353553 \end{Bmatrix} N$$

$$F^{(2)} = k_2 . u^2 = 10^5 \begin{bmatrix} 3162 & -3162 \\ -3162 & 3162 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 0 \\ -0{,}0005 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 158114 \\ -158114 \end{Bmatrix} N$$

ÖRNEK KAFES



D.N	X	Y
1	0	0
2	0	4
3	5	4
4	5	0

E.N	(L) i	(R) d	L	C	S
1	1	2	4	0	1
2	2	3	5	1	0
3	3	4	4	0	-1
4	1	3	6,403	0,78	0,624

$$[k_1] = \begin{bmatrix} 2\cdot10^6 & -2\cdot10^6 \\ -2\cdot10^6 & 2\cdot10^6 \end{bmatrix} \quad [k_2] = 10^5 \begin{bmatrix} 8 & -8 \\ -8 & 8 \end{bmatrix} \quad [k_3] = 10^6 \begin{bmatrix} 2 & -2 \\ -2 & 2 \end{bmatrix}$$

$$[k_4] = \begin{bmatrix} 624 & -624 \\ -611 & +4 \end{bmatrix}$$

$$[T_1] = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad [T_2] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \quad [T_3] = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

$$[T_4] = \begin{bmatrix} 0,78 & 0,624 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0,78 & 0,624 \end{bmatrix}$$

$$[C_1] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad [C_2] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$[C_3] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad [C_4] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

K1/A

$$[K_J] = 10^6 \begin{bmatrix} 0{,}3809 & 0{,}3047 & 0 & 0 & -0{,}3809 & -0{,}3047 & 0 & 0 \\ 0{,}3047 & 2{,}2438 & 0 & -2 & -0{,}3047 & -0{,}2438 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0{,}8 & 0 & -0{,}8 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -0{,}3809 & -0{,}3047 & -98 & 0 & 1{,}1809 & 0{,}3047 & 0 & 0 \\ -0{,}3047 & -0{,}2438 & 0 & 0 & 0{,}3047 & 2{,}2438 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -2 & 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} D_1 \\ D_2 \\ D_3 \\ D_4 \\ D_5 \\ D_6 \\ D_7 \\ D_8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} P \\ 0 \\ 80 \\ 0 \\ 40 \\ -50 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$D_3 = 0{,}4734 \times 10^{-3}$

$D_4 = 0$

$D_5 = 0{,}3734 \times 10^{-3}$

$D_6 = -0{,}10730 \times 10^{-3}$

K2/A

Lokal yerdeğiştirmeler

$$\{d\}^1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0{,}4734 \cdot 10^{-3} \\ 0 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

$$\{d\}^2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 0{,}4734 \cdot 10^{-3} \\ 0 \\ 0{,}1734 \cdot 10^{-3} \\ -0{,}0730 \cdot 10^{-3} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0{,}4734 \cdot 10^{-3} \\ 0{,}1734 \cdot 10^{-3} \end{Bmatrix}$$

$$\{d\}^3 = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 0{,}1734 \cdot 10^{-3} \\ -0{,}0730 \cdot 10^{-3} \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} +0{,}0730 \cdot 10^{-3} \\ 0 \end{Bmatrix}$$

$$\{d\}^4 = \begin{bmatrix} 0{,}7809 & 0{,}6247 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0{,}7809 & 0{,}6247 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0{,}1734 \cdot 10^{-3} \\ -0{,}0730 \cdot 10^{-3} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0{,}246 \cdot 10^{-3} \end{Bmatrix}$$

k3/4

Quan Khuvetlen

$$F_1 = 10^6 \begin{bmatrix} 2 & -2 \\ -2 & 2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 10 \\ 0 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \end{Bmatrix}$$

$$F_2 = 10^5 \begin{bmatrix} 8 & -8 \\ -8 & 8 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 0{,}4734 \cdot 10^{-3} \\ 0{,}3724 \cdot 10^{-3} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 80 \\ -80 \end{Bmatrix}$$

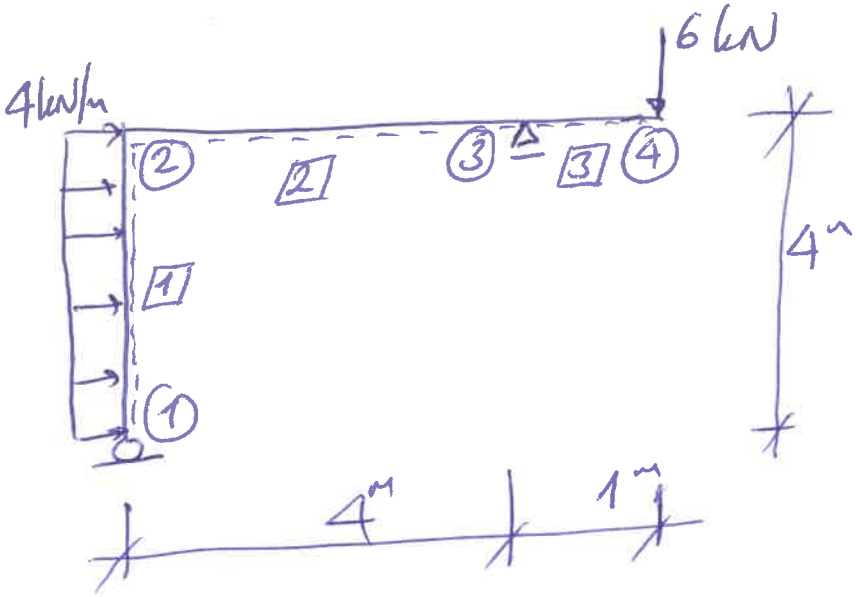
$$F_3 = 10^6 \begin{bmatrix} 2 & -2 \\ -2 & 2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 0{,}0730 \cdot 10^{-3} \\ 0 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 146 \\ -146 \end{Bmatrix}$$

$$F_4 = \begin{bmatrix} 624307 & -624307 \\ -624307 & 624307 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 0 \\ 0{,}246 \cdot 10^{-3} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -153{,}678 \\ +153{,}678 \end{Bmatrix}$$

K4/4

EK:1B

ÇERÇEVELERİN SONLU ELEMANLAR YÖNTEMİ İLE ÇÖZÜMÜ



2-4 oram



$I = 16 \cdot 10^4\ cm^4$

$A = 120\ cm^2$

$E = 21 \cdot 10^6\ N/cm^2$

$EA_2 = EA_3 = 252 \cdot 10^{10}\ N$

$EI_2 = EI_3 = 3{,}36 \cdot 10^{12}\ Ncm$

1-2 oram



$I = 72 \cdot 10^4\ cm^4$

$A = 2400\ cm^2$

$E = 21 \cdot 10^6\ N/cm^2$

$EA_1 = 5{,}04 \times 10^{10}\ N$

$EI_1 = 1{,}512 \cdot 10^{13}\ Ncm$

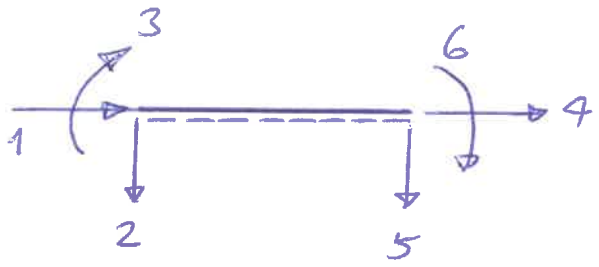
D.N	X(cm)	Y(cm)
1	0	0
2	0	400
3	400	400
4	500	400

E.N	i	r	l'(cm)	C	S
1	1	2	400	0	1
2	2	3	400	1	0
3	3	4	100	1	0

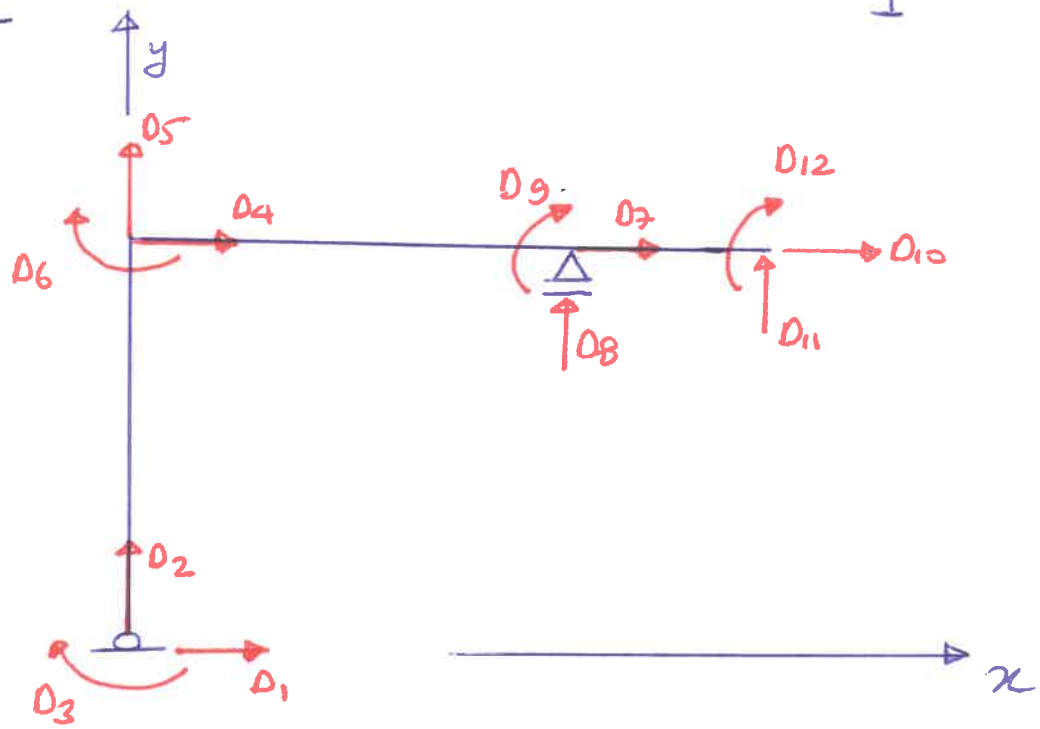
$$C_1 = \cos\theta_1 = \frac{X_2 - X_1}{L_1} = \frac{0}{400} = 0 \quad ; \quad S_1 = \sin\theta_1 = \frac{Y_2 - Y_1}{L_1} = \frac{400}{400} = 1$$

$$C_2 = \cos\theta_2 = \frac{X_3 - X_2}{L_2} = \frac{400-0}{400} = 1 \quad ; \quad S_2 = \sin\theta_2 = \frac{Y_3 - Y_2}{L_2} = \frac{400-400}{400} = 0$$

$$C_3 = \cos\theta_3 = \frac{X_4 - X_3}{L_3} = \frac{500-400}{100} = 1 \quad ; \quad S_3 = \sin\theta_3 = \frac{Y_4 - Y_3}{L_3} = \frac{400-400}{100} = 0$$



$$[ke] = \begin{bmatrix} \frac{EA}{L} & 0 & 0 & -\frac{EA}{L} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{12EI}{L^3} & \frac{6EI}{L^2} & 0 & -\frac{12EI}{L^3} & \frac{6EI}{L^2} \\ 0 & \frac{6EI}{L^2} & \frac{4EI}{L} & 0 & -\frac{6EI}{L^2} & \frac{2EI}{L} \\ -\frac{EA}{L} & 0 & 0 & \frac{EA}{L} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{12EI}{L^3} & -\frac{6EI}{L^2} & 0 & \frac{12EI}{L^3} & -\frac{6EI}{L^2} \\ 0 & \frac{6EI}{L^2} & \frac{2EI}{L} & 0 & -\frac{6EI}{L^2} & \frac{4EI}{L} \end{bmatrix}$$



Sistem serbestlik leri

$$[k_1] = 10^6 \begin{bmatrix} 126 & 0 & 0 & -126 & 0 & 0 \\ 0 & 2,835 & 567 & 0 & -2835 & 567 \\ 0 & 567 & 151200 & 0 & -567 & 75600 \\ -126 & 0 & 0 & 126 & 0 & 0 \\ 0 & -2835 & -567 & 0 & 2835 & -567 \\ 0 & 567 & 75600 & 0 & -567 & 151200 \end{bmatrix}$$

$$[k_2] = 10^6 \begin{bmatrix} 63 & 0 & 0 & -63 & 0 & 0 \\ 0 & 0,63 & 126 & 0 & -0,63 & 126 \\ 0 & 126 & 33600 & 0 & -126 & 16800 \\ -63 & 0 & 0 & 63 & 0 & 0 \\ 0 & -0,63 & -126 & 0 & 0,63 & -126 \\ 0 & 126 & 16800 & 0 & -126 & 33600 \end{bmatrix}$$

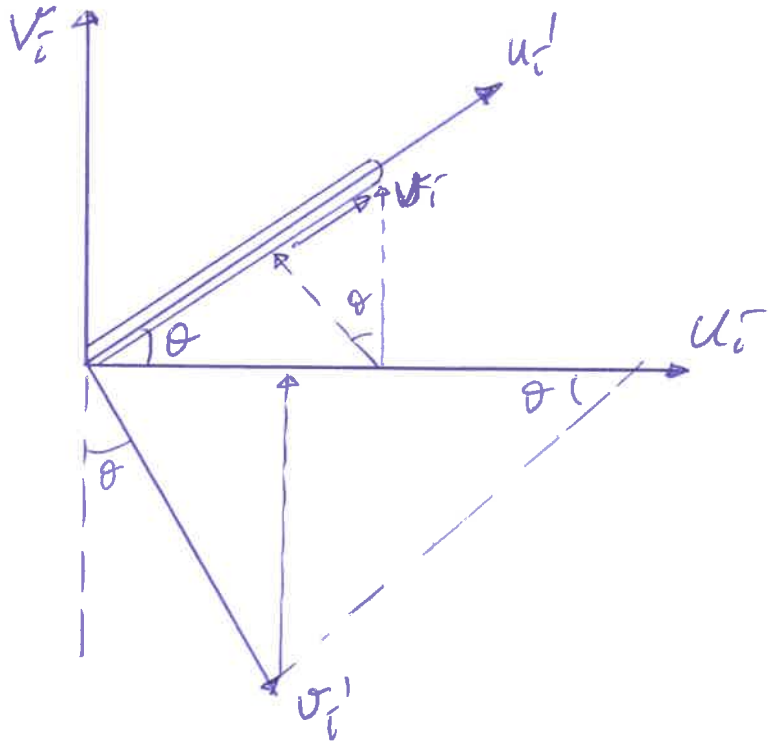
$$[k_3] = 10^6 \begin{bmatrix} 252 & 0 & 0 & -252 & 0 & 0 \\ 0 & 40,32 & 2016 & 0 & -40,32 & 2016 \\ 0 & 2016 & 134400 & 0 & -2016 & 67200 \\ -252 & 0 & 0 & 252 & 0 & 0 \\ 0 & -40,32 & -2016 & 0 & 40,32 & -2016 \\ 0 & 2016 & 67200 & 0 & -2016 & 134400 \end{bmatrix}$$

$$[T] = \begin{bmatrix} c & s & & & \\ s & -c & & 0 & \\ & & 1 & & \\ & 0 & & c & s \\ & & & s & -c \end{bmatrix} \quad \text{(1 in the last diagonal position)}$$

$$[T_1] = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$[T_2] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$[T_3] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$



$$[ke_1] = [T_1]^T [k_1] [T_1]$$

$$[ke_2] = [T_2]^T [k_2] [T_2]$$

$$[ke_3] = [T_3]^T [k_3] [T_3]$$

$$u_i' = u_i \cdot \cos\theta + v_i \cdot \sin\theta$$

$$v_i' = u_i \cdot \sin\theta - v_i \cdot \cos\theta$$

$$[Ce_1]=\begin{bmatrix} 1&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\ 0&1&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\ 0&0&1&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&1&0&0&0&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&1&0&0&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&1&0&0&0&0&0&0 \end{bmatrix}$$

$$[Ce_2]=\begin{bmatrix} 0&0&0&1&0&0&0&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&1&0&0&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&1&0&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&1&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&0&1&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&0&0&1&0&0&0 \end{bmatrix}$$

$$[Ce_3]=\begin{bmatrix} 0&0&0&0&0&0&1&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&0&1&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&0&0&1&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&0&0&0&1&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&1&0\\ 0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&1 \end{bmatrix}$$

$$[ke]^1=[Ce_1]^T[ke_1][Ce_1]$$

$$[ke]^2=[Ce_2]^T[ke_2][Ce_2]$$

$$[ke]^3=[Ce_3]^T[ke_3][Ce_3]$$

$$\{Q\}^T=\{\overset{D_1}{\frac{qL}{2}+R_{AH}},\ \overset{D_2}{0+R_{AV}},\ \overset{D_3}{+\frac{qL^2}{12}},\ \overset{D_4}{\frac{qL}{2}},\ \overset{D_5}{0},\ \overset{D_6}{-\frac{qL^2}{12}},\ \overset{D_7}{0},\ \overset{D_8}{R_{BV}},\ \overset{D_9}{0},\ \overset{D_{10}}{0},\ \overset{D_{11}}{-6},\ \overset{D_{12}}{0}\}$$

$$=\{8+R_{AH},\ R_{AV},\ +53{,}33,\ 8,\ 0,\ -53{,}33,\ 0,\ R_{BV},\ 0,\ 0,\ -6,\ 0\}$$

$$[ke_1] = 10^6$$

2.835	0	567	-2.835	0	567
0	126	0	0	-126	0
567	0	151200	-567	0	75600
-2.835	0	-567	2.835	0	-567
0	-126	0	0	126	0
567	0	75600	-567	0	151200

$[ke_1] = [T_1]^T [k_1][T_1]$

$$[ke_2] = 10^6$$

63	0	0	-63	0	0
0	0.63	-126	0	-0.63	-126
0	-126	33600	0	126	16800
-63	0	0	63	0	0
0	-0.63	126	0	0.63	126
0	-126	16800	0	126	33600

$[ke_2] = [T_2]^T [k_2][T_2]$

$$[ke_3] = 10^6$$

252	0	0	-252	0	0
0	40.32	-2016	0	-40.32	-2016
0	-2016	134400	0	2016	67200
-252	0	0	252	0	0
0	-40.32	2016	0	40.32	2016
0	-2016	67200	0	2016	134400

$[ke_3] = [T_3]^T [k_3][T_3]$

Birimler Ncm, ve N' dur.

$$[ke]^1 = [ce_1]^T [ke_1][ce_1]$$

$$[ke]^2 = [ce_2]^T [ke_2][ce_2]$$

$$[ke]^3 = [ce_3]^T [ke_3][ce_3]$$

$$[Ksis] = [ke]^1 + [ke]^2 + [ke]^3$$

$$[is] = 10^6 \begin{bmatrix}
2.8350 & 0 & 567 & -2.835 & 0 & 567 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 126 & 0 & 0 & -126 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
567 & 0 & 151200 & -567 & 0 & 75600 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
-2.835 & 0 & -567 & 65.835 & 0 & -567 & -63 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & -126 & 0 & 0 & 126.63 & -126 & 0 & -0.63 & -126 & 0 & 0 & 0 \\
567 & 0 & 75600 & -567 & -126 & 184800 & 0 & 126 & 16800 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & -63 & 0 & 0 & 315 & 0 & 0 & -252 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0.63 & 126 & 0 & 40.95 & 1890 & 0 & 40.32 & 2020 \\
0 & 0 & 0 & 0 & -126 & 16800 & 0 & -1890 & 168000 & 0 & 2016 & 67200 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -252 & 0 & 0 & 252 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -40.32 & 2016 & 0 & 40.32 & 2016 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -2016 & 67200 & 0 & 2016 & 134400
\end{bmatrix}$$

$$\{Q\} = \begin{Bmatrix} \frac{qL}{2} + R_{AH} \\ 0 + R_{AV} \\ -\frac{qL^2}{12} \\ \frac{qL}{2} \\ 0 \\ \frac{qL^2}{12} \\ 0 \\ R_{BV} \\ 0 \\ 0 \\ -6 \\ 0 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 800 + R_{AH} \\ R_{AV} \\ 533333.33 \\ 80000 \\ 0 \\ -533333.33 \\ 0 \\ R_{BV} \\ 0 \\ 0 \\ -6000 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

$[K]\{D\} = \{Q\}$ 'den; [indirgenmemiş matristen]

$(10^6)(567 \times 0{,}000171705) + (-2{,}835 \times 0{,}060216491) + (567 \times 0{,}000115268) = 8000 + R_{AH}$

$R_{AH} = -16000\ N$

$(10^6)(-126 \times 7{,}53968E-05) = R_{AV} \longrightarrow R_{AV} = -9500\ N$

$(10^6)(-9{,}3 \times 7{,}53968E-05) + (126 \times 0{,}000115268) + (1890 \times 3{,}9494E-05) - (40{,}32 \times 0{,}003354167) + 2020 \times 3{,}0565E-05 \cong 15500\ N = R_{BV}$

Tüm sistemin indirgenmemiş rijitlik matrisi hesabından R_{AV}=-9500 N, R_{AH}=-16000 N, R_{BV}=15500 N bulunmuştur.

$$\{D\} veya\ \{U\} = [K_{sis}]^{-1} * \{Q\}$$

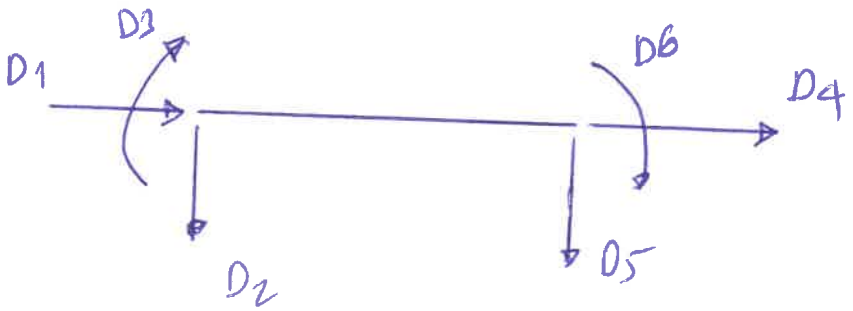
$$\{D\} veya\ \{U\} = \begin{Bmatrix} U1 \\ U2 \\ U3 \\ U4 \\ U5 \\ U6 \\ U7 \\ U8 \\ U9 \\ U10 \\ U11 \\ U12 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0.000171705 \\ 0.060216491 \\ 7.53968E-05 \\ 0.000115268 \\ 0.060216491 \\ 0 \\ -3.9494E-05 \\ 0.060216491 \\ 0.003354167 \\ -3.0565E-05 \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} - \\ - \\ radyan \\ cm \\ cm \\ radyan \\ cm \\ - \\ radyan \\ cm \\ cm \\ radyan \end{Bmatrix}$$

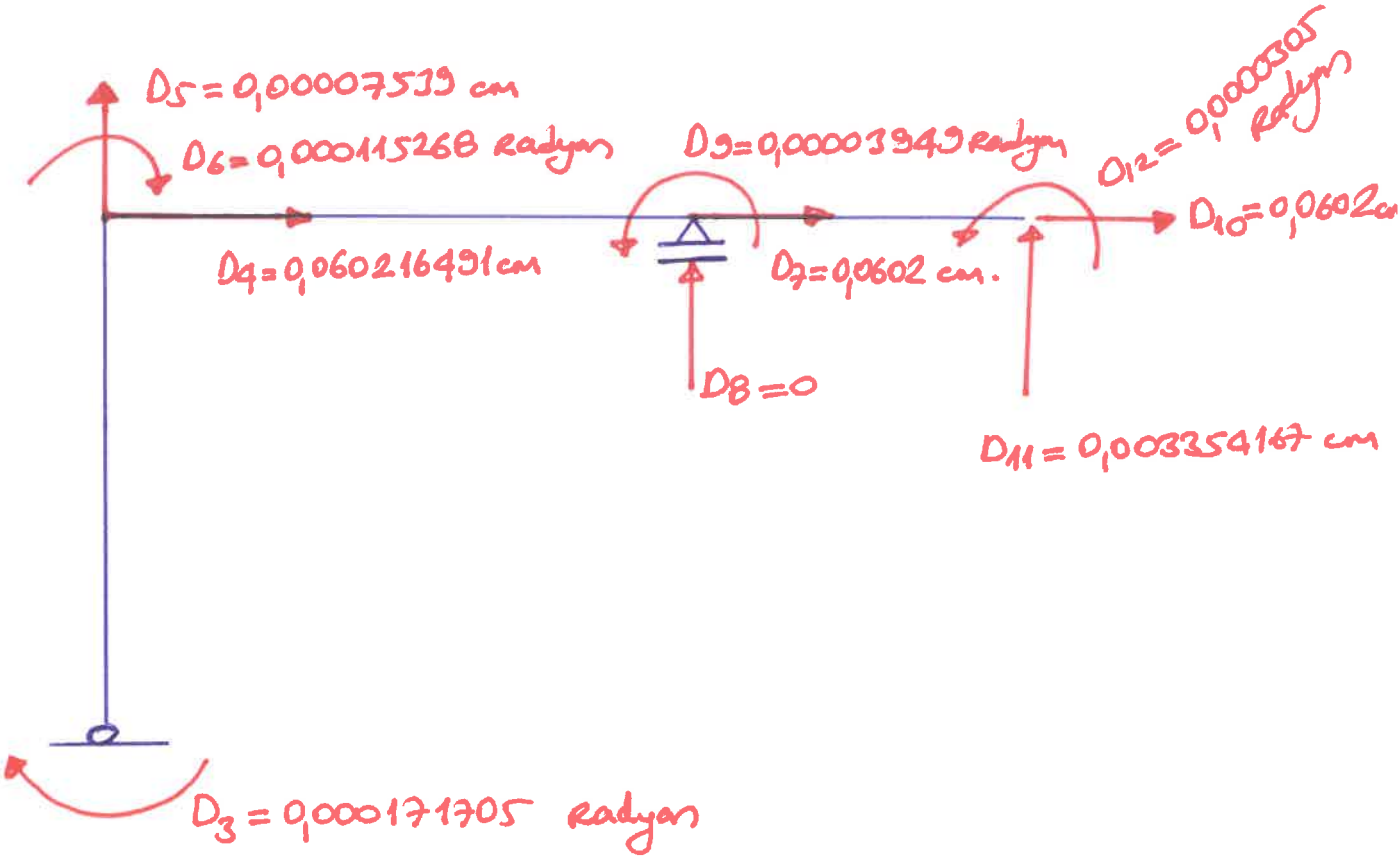
Yerel Koordinatlarda Yerdeğiştirmeler

$$U_1' = [T_1] * \{U\} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0.000171705 \\ 0.060216491 \\ 7.53968E-05 \\ -0.000115268 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} D1 \\ D2 \\ D3 \\ D4 \\ D5 \\ D6 \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0.000171705 \\ 7.53968E-05 \\ 0.060216491 \\ 0.000115268 \end{Bmatrix}$$

$$U_2' = [T_2] * \{U\} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 0.060216491 \\ 7.53968E-05 \\ -0.000115268 \\ 0.060216491 \\ 0 \\ 3.9494E-05 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} D1 \\ D2 \\ D3 \\ D4 \\ D5 \\ D6 \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} 0.060216491 \\ -7.53968E-05 \\ 0.000115268 \\ 0.060216491 \\ 0 \\ -0.39494E-05 \end{Bmatrix}$$

$$U_3' = [T_3] * \{U\} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 0.060216491 \\ 0 \\ 3.9494E-05 \\ 0.06021491 \\ 0.003354167 \\ -3.0565E-05 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} D1 \\ D2 \\ D3 \\ D4 \\ D5 \\ D6 \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} 0.060216491 \\ 0 \\ -3.9494E-05 \\ 0.060216491 \\ -0.003354167 \\ -3.05655E-05 \end{Bmatrix}$$




D5 = 0,00007539 cm
D6 = 0,000115268 radyan
D9 = 0,00003949 radyan
D12 = 0,0000305 radyan
D10 = 0,0602cm
D4 = 0,060216491 cm
D7 = 0,0602 cm.
D8 = 0
D11 = 0,003354167 cm
D3 = 0,000171705 radyan

$$\{f_1\} + \{Q_1\} = \begin{Bmatrix} N_1^1 \\ V_1^1 \\ M_1^1 \\ N_2^1 \\ V_2^1 \\ M_2^1 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} 0 \\ 8000 \\ 533333.33 \\ 0 \\ 8000 \\ -533333.33 \end{Bmatrix} = [k_1] * \{U_1'\}$$

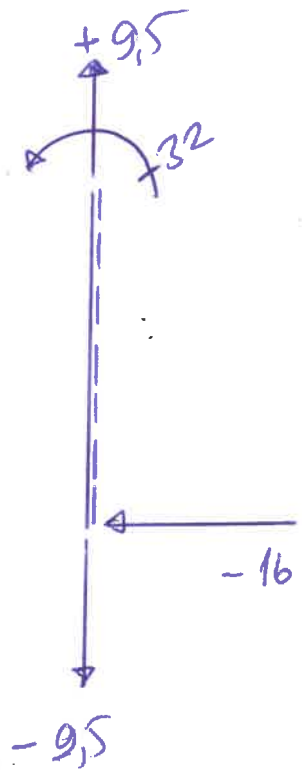
$$\{F\}_e = [k]_e \{D\}_e - \{Q\}_e$$

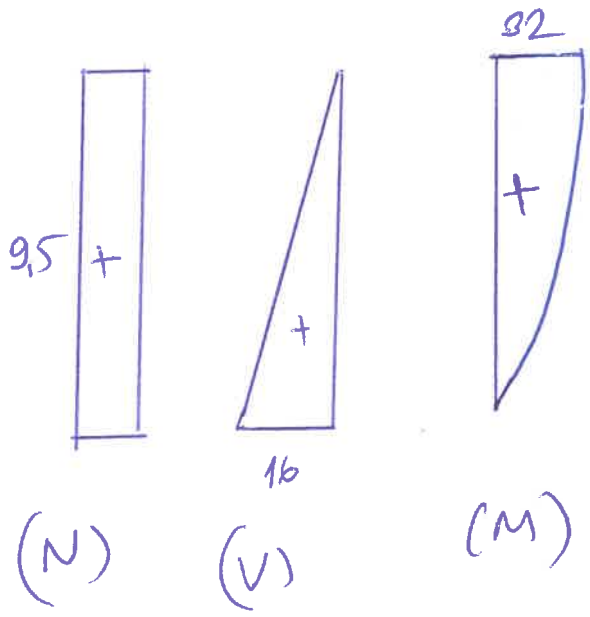
$$= 10^6 \begin{bmatrix} 126 & 0 & 0 & -126 & 0 & 0 \\ 0 & 2.835 & 567 & 0 & -2.835 & 567 \\ 0 & 567 & 151200 & 0 & -567 & 75600 \\ -126 & 0 & 0 & 126 & 0 & 0 \\ 0 & -2.835 & -567 & 0 & 2.835 & -567 \\ 0 & 567 & 75600 & 0 & -567 & 151200 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0.000171705 \\ 7.53968E-05 \\ 0.060216491 \\ 0.000115268 \end{Bmatrix} * 10^{-3} + \begin{Bmatrix} 0 \\ -8000 \\ -533333.33 \\ 0 \\ -8000 \\ 533333.33 \end{Bmatrix} =$$

$$\begin{Bmatrix} -9.5 \\ -8 \\ 533.333 \\ 9.5 \\ 8 \\ -3733333.33 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} 0 \\ -8 \\ -533.333 \\ 0 \\ -8 \\ 533333.33 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -9.5 \\ -16 \\ 0 \\ 9.5 \\ 0 \\ -32 \end{Bmatrix} \begin{matrix} kN \\ kN \\ kNm \\ kN \\ kN \\ kNm \end{matrix} \begin{Bmatrix} N1 \\ V1 \\ M1 \\ N2 \\ V2 \\ M2 \end{Bmatrix}$$

Ncm

N

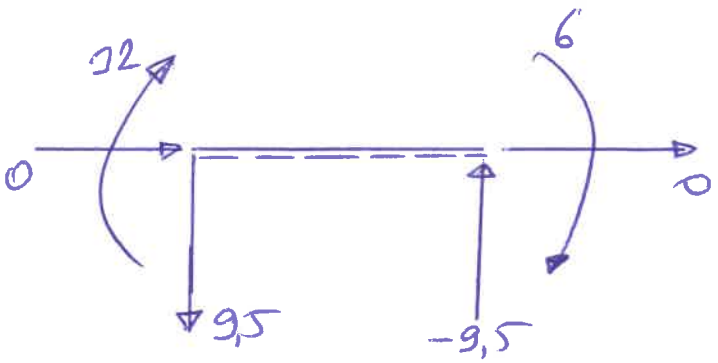


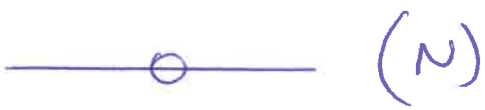


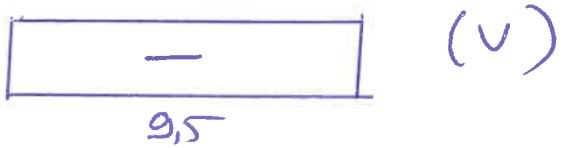
$$\{f_2\} + \{Q_2\} = \begin{Bmatrix} N_1^2 \\ V_1^2 \\ M_1^2 \\ N_2^2 \\ V_2^2 \\ M_2^2 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} = [k_2] * \{U_2'\}$$

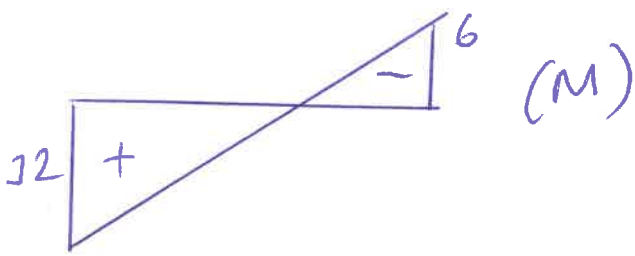
$$= 10^6 \begin{bmatrix} 63 & 0 & 0 & -63 & 0 & 0 \\ 0 & 0.63 & 126 & 0 & -0.63 & 126 \\ 0 & 126 & 33600 & 0 & -126 & 16800 \\ -63 & 0 & 0 & 63 & 0 & 0 \\ 0 & -0.63 & -126 & 0 & 0.63 & -126 \\ 0 & 126 & 16800 & 0 & -126 & 33600 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 0.060216491 \\ -7.53968E-05 \\ 0.000115268 \\ 0.060216491 \\ 0 \\ -3.9494E-05 \end{Bmatrix} * 10^{-3} - \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} =$$

$$= \begin{Bmatrix} 0 \\ 9.5 \\ 32 \\ 0 \\ -9.5 \\ 6 \end{Bmatrix} \begin{matrix} kN \\ kN \\ kNm \\ kN \\ kN \\ kNm \end{matrix} \begin{Bmatrix} N1 \\ V1 \\ M1 \\ N2 \\ V2 \\ M2 \end{Bmatrix}$$





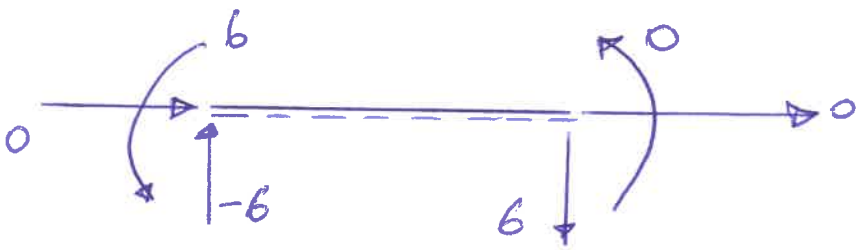




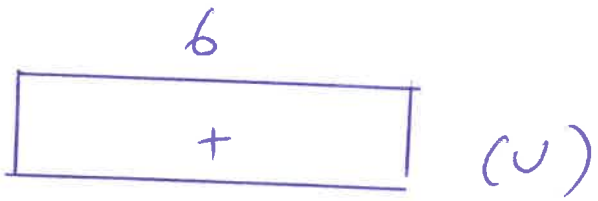
$$\{f_3\} + \{Q_3\} = \begin{Bmatrix} N_1^3 \\ V_1^3 \\ M_1^3 \\ N_2^3 \\ V_2^3 \\ M_2^3 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} = [k_3] * \{U_3'\}$$

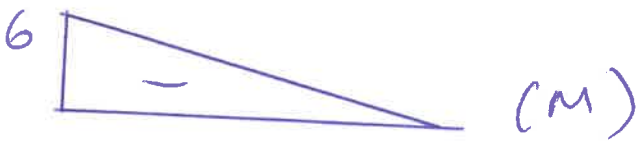
$$= 10^6 \begin{bmatrix} 252 & 0 & 0 & -252 & 0 & 0 \\ 0 & 40.32 & 2016 & 0 & -40.32 & 2016 \\ 0 & 2016 & 134400 & 0 & -2016 & 67200 \\ -252 & 0 & 0 & 252 & 0 & 0 \\ 0 & -40.32 & -2016 & 0 & 40.32 & -2016 \\ 0 & 2016 & 67200 & 0 & -2016 & 134400 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 0.060216491 \\ 0 \\ -3.9494E-05 \\ 0.060216491 \\ -0.003354167 \\ -3.05655E-05 \end{Bmatrix} * 10^{-3} - \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

$$= \begin{Bmatrix} 0 \\ -6 \\ -6 \\ 0 \\ 6 \\ 0 \end{Bmatrix} \begin{matrix} kN \\ kN \\ kNm \\ kN \\ kN \\ kNm \end{matrix} \begin{Bmatrix} N1 \\ V1 \\ M1 \\ N2 \\ V2 \\ M2 \end{Bmatrix}$$

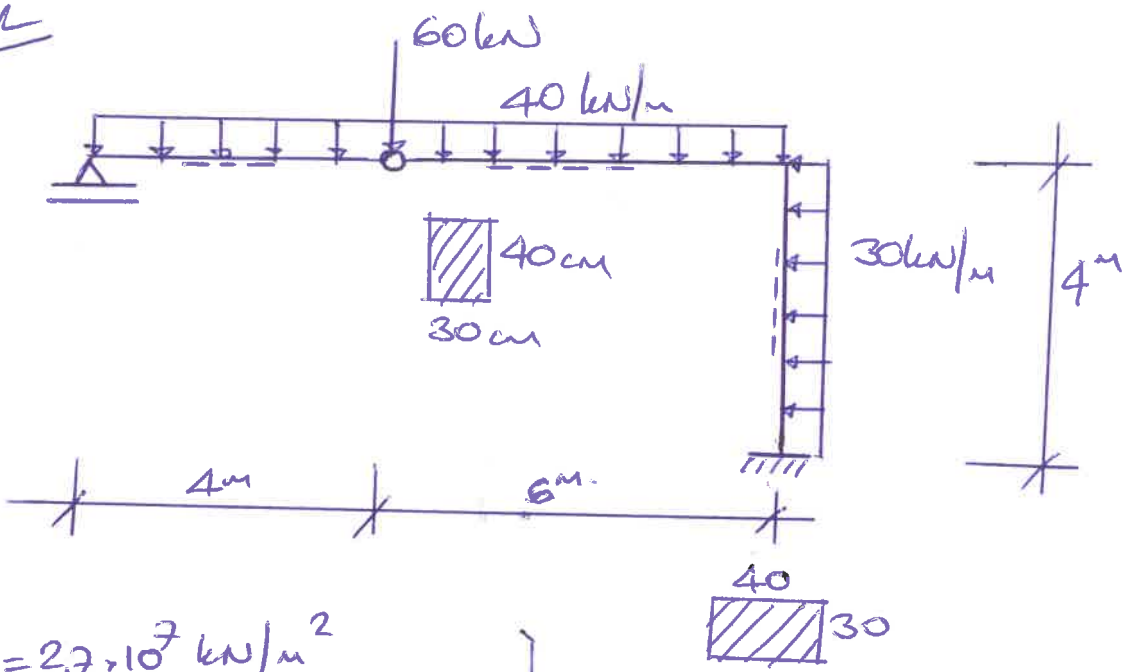








ÖRNEK



$E = 2{,}7 \cdot 10^7 \ kN/m^2$

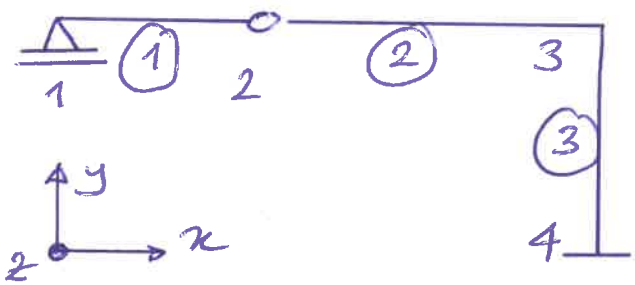
$I = \frac{0{,}30 \cdot 0{,}40^3}{12} = 1{,}6 \cdot 10^{-3} \ m^4$

$A = 0{,}12 \ m^2$

$EA = 324 \cdot 10^4 \ kN$

$EI = 4{,}32 \cdot 10^3 \ kNm^2$

Verilen sistemin yerdeğiştirmelerini ve kesit tesirlerini hesaplayalım.



D.N	X(m)	Y(m)
1	0	4
2	4	4
3	10	4
4	10	0

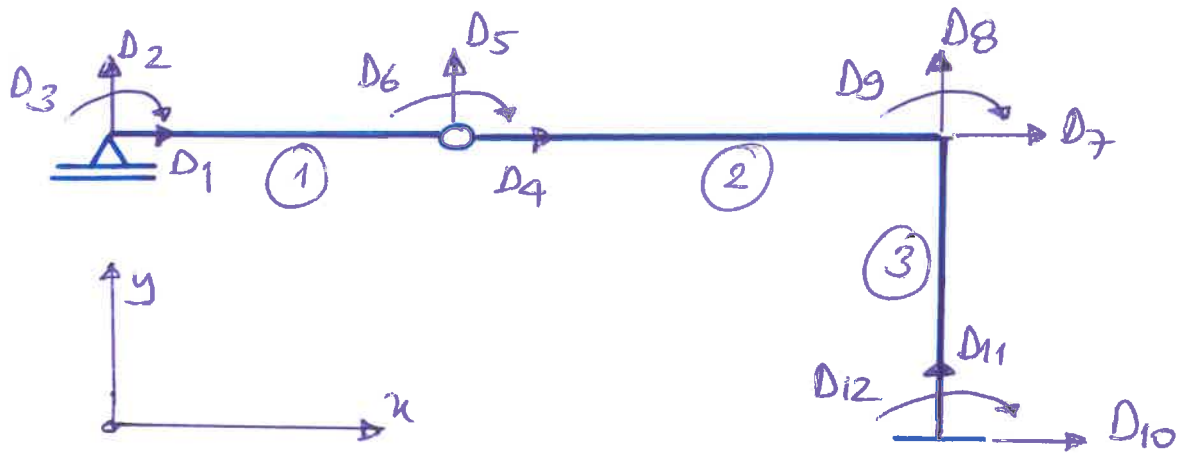
E.N	l	r	li(m)	c	s
1	1	2	4	1	0
2	2	3	6	1	0
3	3	4	4	0	-1

$c = \frac{X_r - X_l}{L}$

$s = \frac{y_r - y_l}{L}$

$c_1 = \frac{X_2 - X_1}{L_1} = \frac{4-0}{4} = 1$ | $c_2 = \frac{X_3 - X_2}{L_2} = \frac{10-4}{6} = 1$ | $c_3 = \frac{X_4 - X_3}{L_3} = \frac{10-10}{4} = 0$

$s_1 = \frac{y_2 - y_1}{L_1} = \frac{4-4}{4} = 0$ | $s_2 = \frac{y_3 - y_2}{L_2} = \frac{4-4}{6} = 0$ | $s_3 = \frac{y_4 - y_3}{L_3} = \frac{0-4}{4} = -1$



Mafsal 1 nolu elemanda değişkenler.

$$[k_1]=\begin{array}{c} \begin{matrix} u_1 & \vartheta_1 & \varphi_1 & u_2 & \vartheta_2 & \varphi_2 \end{matrix} \\ \left[\begin{array}{cccccc|c} \frac{EA}{L} & 0 & 0 & -\frac{EA}{L} & 0 & 0 & u_1 \\ 0 & \frac{3EI}{L^3} & \frac{3EI}{L^2} & 0 & -\frac{3EI}{L^3} & 0 & \vartheta_1 \\ 0 & \frac{3EI}{L^2} & \frac{3EI}{L} & 0 & -\frac{3EI}{L^2} & 0 & \varphi_1(\theta_1) \\ -\frac{EA}{L} & 0 & 0 & \frac{EA}{L} & 0 & 0 & u_2 \\ 0 & -\frac{3EI}{L^3} & -\frac{3EI}{L^2} & 0 & \frac{3EI}{L^3} & 0 & \vartheta_2 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \varphi_2 \end{array}\right] \end{array}$$

$$[k_1]=10^9\begin{bmatrix} 81 & 0 & 0 & -81 & 0 & 0 \\ 0 & 0{,}2025 & 0{,}81 & 0 & -0{,}2025 & 0 \\ 0 & 0{,}81 & 3{,}24 & 0 & -0{,}81 & 0 \\ -81 & 0 & 0 & 81 & 0 & 0 \\ 0 & -0{,}2025 & -0{,}81 & 0 & 0{,}2025 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$[k_2] = \begin{array}{c} \begin{matrix} u_1 & \vartheta_1 & \varphi_1 & u_2 & \vartheta_2 & \varphi_2 \end{matrix} \\ \begin{bmatrix} \frac{EA}{L} & 0 & 0 & -\frac{EA}{L} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{12EI}{L^3} & \frac{6EI}{L^2} & 0 & -\frac{12EI}{L^3} & \frac{6EI}{L^2} \\ 0 & \frac{6EI}{L^2} & \frac{4EI}{L} & 0 & -\frac{6EI}{L^2} & \frac{2EI}{L} \\ -\frac{EA}{L} & 0 & 0 & \frac{EA}{L} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{12EI}{L^3} & -\frac{6EI}{L^2} & 0 & \frac{12EI}{L^3} & -\frac{6EI}{L^2} \\ 0 & \frac{6EI}{L^2} & \frac{2EI}{L} & 0 & -\frac{6EI}{L^2} & \frac{4EI}{L} \end{bmatrix} \end{array} \begin{matrix} u_1 \\ \vartheta_1 \\ \varphi_1 \\ u_2 \\ \vartheta_2 \\ \varphi_2 \end{matrix}$$

$$[k_2] = 10^4 \begin{bmatrix} 54 & 0 & 0 & -54 & 0 & 0 \\ 0 & 0{,}24 & 0{,}72 & 0 & -0{,}24 & 0{,}72 \\ 0 & 0{,}72 & 2{,}88 & 0 & -0{,}72 & 1{,}44 \\ -54 & 0 & 0 & 54 & 0 & 0 \\ 0 & -0{,}24 & -0{,}72 & 0 & 0{,}24 & -0{,}72 \\ 0 & 0{,}72 & 1{,}44 & 0 & -0{,}72 & 2{,}88 \end{bmatrix}$$

$$[k_3] = 10^4 \begin{bmatrix} 81 & 0 & 0 & -81 & 0 & 0 \\ 0 & 0{,}81 & 1{,}62 & 0 & -0{,}81 & 1{,}62 \\ 0 & 1{,}62 & 4{,}32 & 0 & -1{,}62 & 2{,}16 \\ -81 & 0 & 0 & 81 & 0 & 0 \\ 0 & -0{,}81 & -1{,}62 & 0 & 0{,}81 & -1{,}62 \\ 0 & 1{,}62 & 2{,}16 & 0 & -1{,}62 & 4{,}32 \end{bmatrix}$$

$$[T_1] = [T_2] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$[T_3] = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$[C_1] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$[C_2] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$[C_3] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\{Q\}_s \begin{Bmatrix} 0 \\ -\frac{40\times4}{2} + R_{AV} \\ 0 \\ 0 \\ -\frac{40\times4}{2} - 60 - \frac{40\times6}{2} \\ \frac{40\times6^2}{12} \\ -\frac{30\times4}{2} \\ -\frac{40\times6}{2} \\ -\frac{40\times6^2}{12} + \frac{30\times4^2}{12} \\ -\frac{30\times4}{2} + R_{BH} \\ 0 + R_{BV} \\ -\frac{30\times4^2}{12} + M_B \end{Bmatrix} \begin{matrix} D_1 \\ D_2 \\ D_3 \\ D_4 \\ D_5 \\ D_6 \\ D_7 \\ D_8 \\ D_9 \\ D_{10} \\ D_{11} \\ D_{12} \end{matrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ -80 + R_{AV} \\ 0 \\ 0 \\ -260 \\ 120 \\ -60 \\ -120 \\ -80 \\ -60 + R_{BH} \\ R_{BV} \\ -40 + M_B \end{Bmatrix}$$

$$[Ke_1] = [T_1]^T [k_1] [T_1]$$

$$[Ke_2] = [T_2]^T [k_1] [T_2]$$

$$[Ke_3] = [T_3]^T [k_3] [T_3]$$

$$[Ke]^1 = [C_1]^T [Ke_1] [C_1]$$

$$[Ke]^2 = [C_2]^T [Ke_2] [C_2]$$

$$[Ke]^3 = [C_3]^T [Ke_3] [C_3]$$

$$[K]_s = [Ke]^1 + [Ke]^2 + [Ke]^3$$

$$10^4 \begin{bmatrix}
81 & 0 & 0 & -81 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0{,}2025 & -0{,}81 & 0 & -0{,}2025 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & -0{,}81 & 3{,}24 & 0 & 0{,}81 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
-81 & 0 & 0 & 135 & 0 & 0 & -54 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & -0{,}2025 & 0{,}81 & 0 & 0{,}4425 & -0{,}72 & 0 & -0{,}24 & -0{,}72 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & -0{,}72 & 2{,}88 & 0 & 0{,}72 & 1{,}44 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & -54 & 0 & 0 & 54{,}81 & 0 & -1{,}62 & -0{,}81 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & -0{,}24 & 0{,}72 & 0 & 81{,}24 & 0{,}72 & 0 & -81 \\
0 & 0 & 0 & 0 & -0{,}72 & 1{,}44 & -1{,}62 & 0{,}72 & 7{,}20 & 1{,}62 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -0{,}81 & 0 & 1{,}62 & -0{,}81 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -81 & 0 & 0 & -81 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1{,}62 & 0 & 2{,}16 & 1{,}62 & 0
\end{bmatrix}
\begin{bmatrix} D_1 \\ D_2 \\ D_3 \\ D_4 \\ D_5 \\ D_6 \\ D_7 \\ D_8 \\ D_9 \\ D_{10} \\ D_{11} \\ D_{12} \end{bmatrix}
=
\begin{bmatrix} 0 \\ -80+R_{3V} \\ 0 \\ 0 \\ -260 \\ 120 \\ -60 \\ -120 \\ -80 \\ -60+R_{3H} \\ R_{3V} \\ -40+M_3 \end{bmatrix}$$

$$D_2 = D_{10} = D_{11} = D_{12} = 0$$

$D_1 = -0{,}3111$ m. ; $D_3 = 0{,}3237$ rad. ; $D_4 = -0{,}3111$ m. ; $D_5 = -1{,}2949$ m ; $D_6 = -0{,}2935$ rad.

$D_7 = -0{,}3111$ m ; $D_8 = -0{,}000469$; $D_9 = -9{,}1519$ rad.

$$
10^4\begin{bmatrix}
81 & 0 & 0 & -81 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0{,}2025 & -0{,}81 & 0 & -0{,}2025 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & -0{,}81 & 3{,}24 & 0 & 0{,}81 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
-81 & 0 & 0 & 135 & 0 & 0 & -54 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & -0{,}2025 & 0{,}81 & 0 & 0{,}4425 & -0{,}72 & 0 & -0{,}24 & -0{,}72 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & -0{,}72 & 2{,}88 & 0 & 0{,}72 & 1{,}44 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & -54 & 0 & 0 & 54{,}81 & 0 & -1{,}62 & -0{,}81 & 0 & 1{,}62 \\
0 & 0 & 0 & 0 & -0{,}24 & 0{,}72 & 0 & 81{,}24 & 0{,}72 & 0 & -81 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & -0{,}72 & 1{,}44 & -1{,}62 & 0{,}72 & 7{,}20 & 1{,}62 & 0 & 2{,}16 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -0{,}81 & 0 & 1{,}62 & 0{,}81 & 0 & 1{,}62 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -81 & 0 & 0 & 81 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1{,}62 & 0 & 2{,}16 & 1{,}62 & 0 & 4{,}32
\end{bmatrix}
\begin{Bmatrix} D_1 = -0{,}3111 \\ D_2 = 0 \\ D_3 = 0{,}3237 \\ D_4 = -0{,}3111 \\ D_5 = -1{,}2949 \\ D_6 = -0{,}2485 \\ D_7 = -0{,}3111 \\ D_8 = -0{,}000469 \\ D_9 = -0{,}1519 \\ D_{10} = 0 \\ D_{11} = 0 \\ D_{12} = 0 \end{Bmatrix}
=
\begin{Bmatrix} 0 \\ -80 + R_{AV} \\ 0 \\ 0 \\ -260 \\ 120 \\ -60 \\ -120 \\ -80 \\ -60 + R_{BH} \\ R_{BV} \\ -40 + M_B \end{Bmatrix}
$$

1A

$[k]\{D\} - \{P\} = \{R_V, R_H\}$

2. sátor illetve alumínia.

$10^4(-0{,}81 \cdot 0{,}3237 - 0{,}2025 \cdot (-1{,}2949)) = -80 + R_{AV} \rightarrow R_{AV} \approx 80\ kN$

10. sátor illetve alumínia

$10^4(-0{,}81 \cdot (-0{,}3111) + 1{,}62(-0{,}1519)) = -60 + R_{BH} \rightarrow R_{BH} \approx 120$

12. sátor illetve alumínia.

$10^4(-1{,}62(-0{,}3111) + 2{,}16(-0{,}1519)) = -40 + M_B$

$M_B \approx 1800\ kNm$

11. sátor illetve alumínia.

$10^4(-81 \cdot (-0{,}000469)) = R_{BV} \rightarrow R_{BV} \approx 380\ kN$

Jeoel koordinatlarda yerdeğiştirmeler

$$\{u_1\}' = [T_1]\{u\} = \begin{bmatrix} 1&0&0&0&0&0 \\ 0&-1&0&0&0&0 \\ 0&0&1&0&0&0 \\ 0&0&0&1&0&0 \\ 0&0&0&0&-1&0 \\ 0&0&0&0&0&1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} -0{,}3111 \\ 0 \\ 0{,}3237 \\ -0{,}3111 \\ -1{,}2949 \\ -0{,}2435 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} d_1 \\ d_2 \\ d_3 \\ d_4 \\ d_5 \\ d_6 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -0{,}3111 \\ 0 \\ 0{,}3237 \\ -0{,}3111 \\ +1{,}2949 \\ -0{,}2435 \end{Bmatrix}$$

$$\{u_2\}' = [T_2]\{u\} = \begin{bmatrix} 1&0&0&0&0&0 \\ 0&-1&0&0&0&0 \\ 0&0&1&0&0&0 \\ 0&0&0&1&0&0 \\ 0&0&0&0&-1&0 \\ 0&0&0&0&0&1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} -0{,}3111 \\ -1{,}2949 \\ -0{,}2435 \\ -0{,}3111 \\ -0{,}000469 \\ -0{,}1579 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} d_1 \\ d_2 \\ d_3 \\ d_4 \\ d_5 \\ d_6 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -0{,}3111 \\ +1{,}2949 \\ -0{,}2435 \\ -0{,}3111 \\ +0{,}000469 \\ -0{,}1579 \end{Bmatrix}$$

$$\{u_3\}' = [T_3]\{u\} = \begin{bmatrix} 0&-1&0&0&0&0 \\ -1&0&0&0&0&0 \\ 0&0&1&0&0&0 \\ 0&0&0&0&-1&0 \\ 0&0&0&-1&0&0 \\ 0&0&0&0&0&1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} -0{,}3111 \\ -0{,}000469 \\ -0{,}1579 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} d_1 \\ d_2 \\ d_3 \\ d_4 \\ d_5 \\ d_6 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0{,}000469 \\ 0{,}3111 \\ -0{,}1579 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad *$$

* $u = -0{,}3111$ m. yerdeğiştirme genel sistemde D_7'ye dik düzlemde ve genel sistemde yatay yerdeğiştirmedir. (3) nolu çubuk için ise düşey yerdeğiştirmedir.

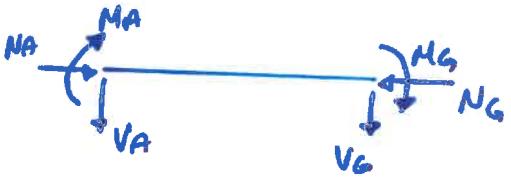
Gubuk kirişlerin hesabı

1 nolu gubuk

$$\{F\}^e = [K]^e \cdot \{D\}^e - \{Q\}^e$$

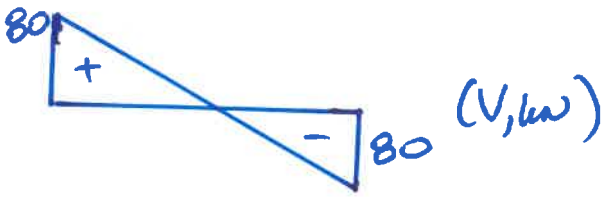
$$\{F\} = \begin{Bmatrix} N_1 \\ V_1 \\ M_1 \\ N_2 \\ V_2 \\ M_2 \end{Bmatrix} = 10^4 * \begin{bmatrix} 81 & 0 & 0 & -81 & 0 & 0 \\ 0 & 0{,}2025 & 0{,}81 & 0 & -0{,}2025 & 0 \\ 0 & 0{,}81 & 3{,}24 & 0 & -0{,}81 & 0 \\ -81 & 0 & 0 & 81 & 0 & 0 \\ 0 & -0{,}2025 & -0{,}81 & 0 & 0{,}2025 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} -0{,}3111 \\ 0 \\ 0{,}3237 \\ -0{,}3111 \\ +1{,}2949 \\ -0{,}2435 \end{Bmatrix} - \begin{Bmatrix} 0 \\ +80 \\ 0 \\ 0 \\ +80 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

$$\begin{Bmatrix} N_1 \\ V_1 \\ M_1 \\ N_2 \\ V_2 \\ M_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} N_A \\ V_A \\ M_A \\ N_G \\ V_G \\ M_G \end{Bmatrix} \triangleq \begin{Bmatrix} 0 \\ -80 \\ 0 \\ 0 \\ -80 \\ 0 \end{Bmatrix}$$





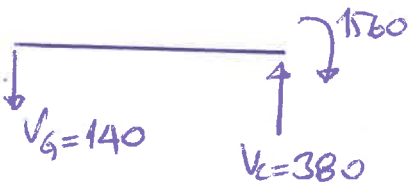


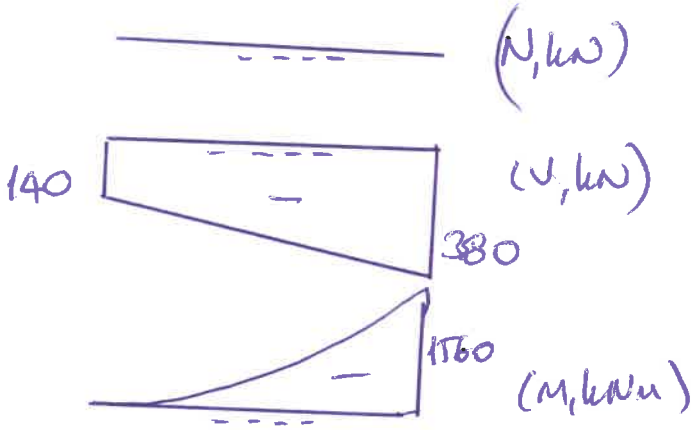




2 nolu çubuk

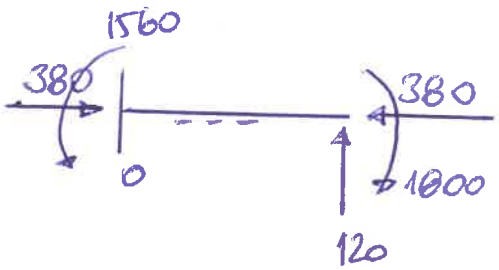
$$\begin{Bmatrix} N_1 \\ V_1 \\ M_1 \\ N_2 \\ V_2 \\ M_2 \end{Bmatrix} = 10^4 \times \begin{bmatrix} 54 & 0 & 0 & -54 & 0 & 0 \\ 0 & 0{,}24 & 0{,}72 & 0 & -0{,}24 & 0{,}72 \\ 0 & 0{,}72 & 2{,}88 & 0 & -0{,}72 & 1{,}44 \\ -54 & 0 & 0 & 54 & 0 & 0 \\ 0 & -0{,}24 & -0{,}72 & 0 & 0{,}24 & -0{,}72 \\ 0 & 0{,}72 & 1{,}44 & 0 & -0{,}72 & 2{,}88 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} -0{,}3111 \\ +1{,}2949 \\ -0{,}2435 \\ -0{,}3111 \\ 0{,}000469 \\ -0{,}1519 \end{Bmatrix} - \begin{Bmatrix} 0 \\ 120 \\ 120 \\ 0 \\ 120 \\ -120 \end{Bmatrix} \overset{u}{=} \begin{Bmatrix} 0 \\ 140 \\ 0 \\ 0 \\ -380 \\ 1560 \end{Bmatrix}$$

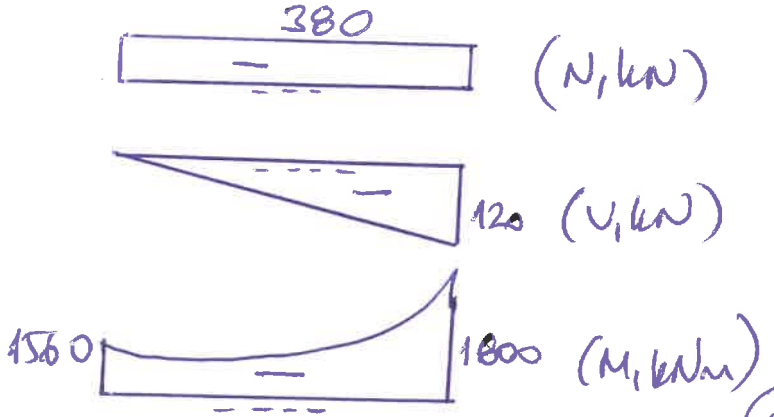




3 nolu çubuk

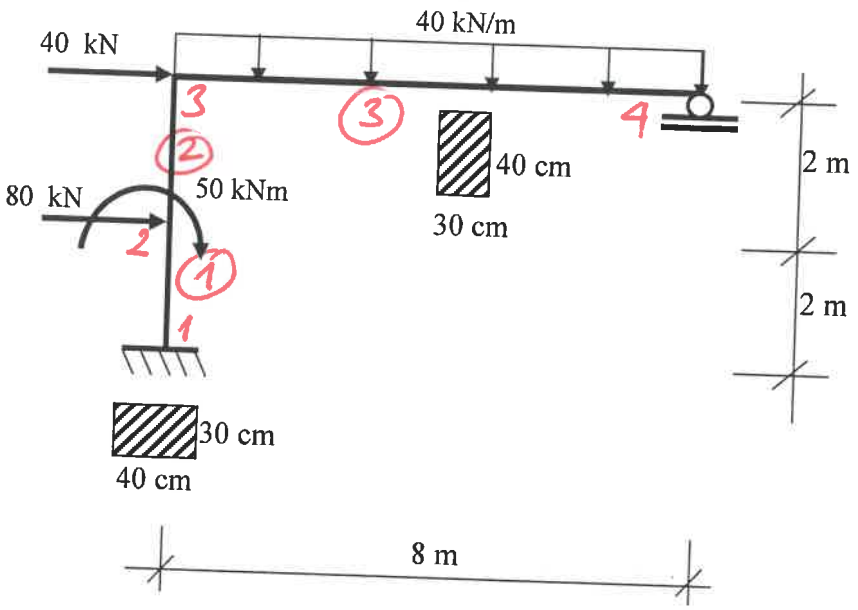
$$\begin{Bmatrix} N_1 \\ V_1 \\ M_1 \\ N_2 \\ V_2 \\ M_2 \end{Bmatrix} = 10^4 \times \begin{bmatrix} 81 & 0 & 0 & -81 & 0 & 0 \\ 0 & 0{,}81 & 1{,}62 & 0 & -0{,}81 & 1{,}62 \\ 0 & 1{,}62 & 4{,}32 & 0 & -1{,}62 & 2{,}16 \\ -81 & 0 & 0 & 81 & 0 & 0 \\ 0 & -0{,}81 & -1{,}62 & 0 & 0{,}81 & -1{,}62 \\ 0 & 1{,}62 & 2{,}16 & 0 & -1{,}62 & 4{,}32 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 0{,}000469 \\ 0{,}3111 \\ -0{,}1519 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} - \begin{Bmatrix} 0 \\ 60 \\ 40 \\ 0 \\ 60 \\ -40 \end{Bmatrix} \overset{u}{=} \begin{Bmatrix} 380 \\ 0 \\ -1560 \\ -380 \\ -120 \\ 1800 \end{Bmatrix}$$





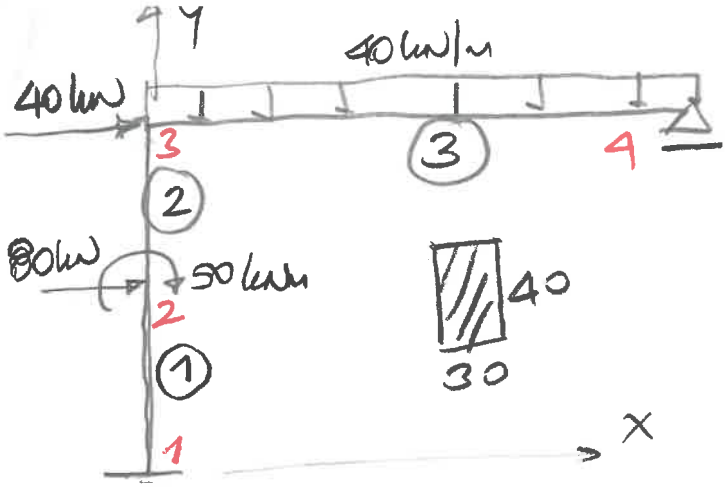
ÖRNEK: Şekilde verilen sistemin düğüm noktalarının yerdeğiştirmelerini ve çubuk kuvvetlerini sonlu elemanlar yöntemi ile bulunuz.

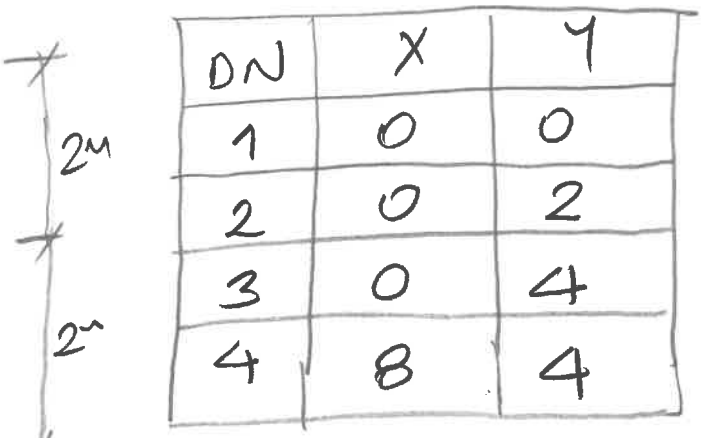
(E:21x10^6 kN/ m^2)



Not: Tekil yük bulunan çubuklarda, tekil yükün etkidiği noktaları düğüm noktası olarak ele almak işlem kolaylığı sağlayacaktır!

ÖRNEK
1-9 sayfa





DN	X	Y
1	0	0
2	0	2
3	0	4
4	8	4





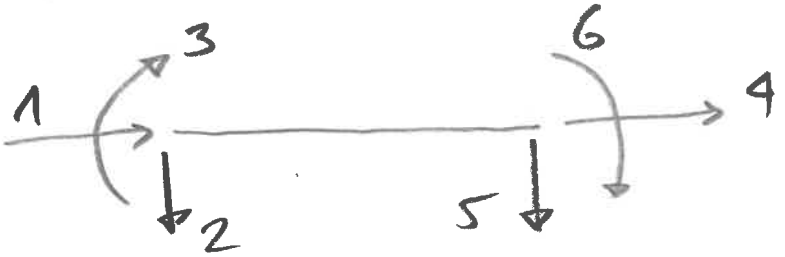
$E = 21 \times 10^6 \ kN/m^2$

$I = \frac{0{,}3 \times 0{,}4^3}{12} = 1{,}6 \times 10^{-3} \ m^4$

$EA = 252 \times 10^9 \ kN$

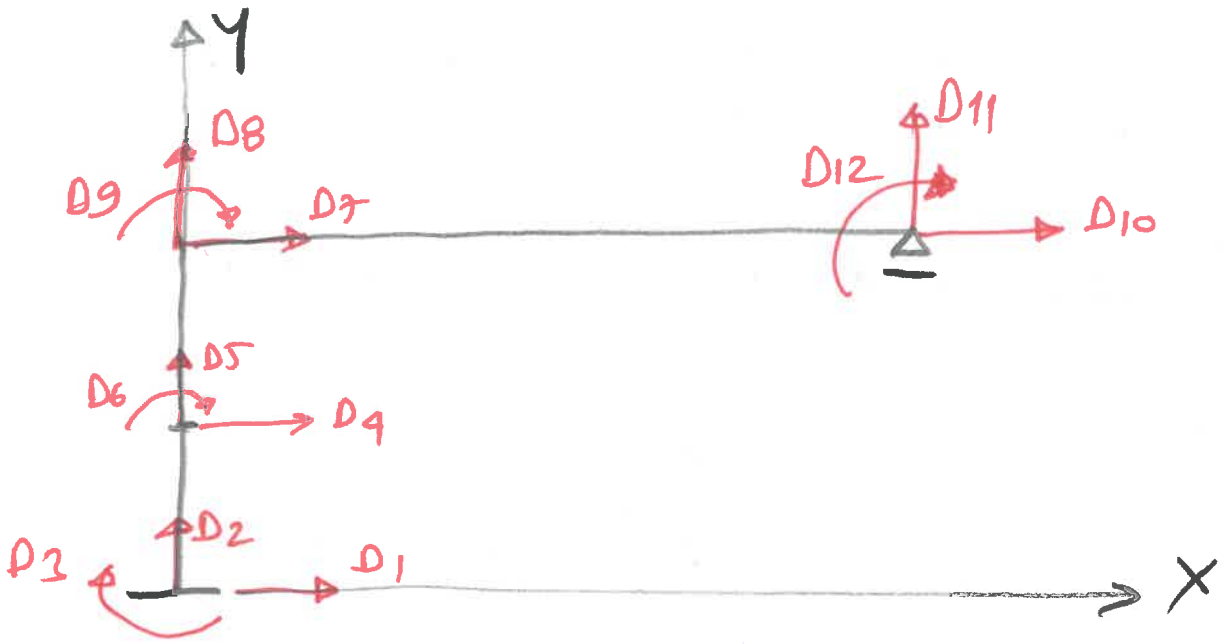
$EI = 3{,}36 \times 10^9 \ kNm^2$

E.N	i	j	L	C	S
1	1	2	2	0	1
2	2	3	2	0	1
3	3	4	8	1	0



Eleman yerdeğiştirme yönleri

$$[k_e] = \begin{bmatrix} EA/L & 0 & 0 & -EA/L & 0 & 0 \\ 0 & 12EI/l^3 & 6EI/l^2 & 0 & -12EI/l^3 & 6EI/l^2 \\ 0 & 6EI/l^2 & 4EI/L & 0 & -6EI/l^2 & 2EI/L \\ -EA/L & 0 & 0 & EA/L & 0 & 0 \\ 0 & -12EI/l^3 & -6EI/l^2 & 0 & 12EI/l^3 & -6EI/l^2 \\ 0 & 6EI/l^2 & 2EI/L & 0 & -6EI/l^2 & 4EI/L \end{bmatrix}$$



$$[k_1]+[k_2]=10^4\begin{bmatrix}
126 & 0 & 0 & -126 & 0 & 0\\
0 & 5,04 & 5,04 & 0 & -5,04 & 5,04\\
0 & 5,04 & 6,72 & 0 & -5,04 & 3,36\\
-126 & 0 & 0 & 126 & 0 & 0\\
0 & -5,04 & -5,04 & 0 & 5,04 & -5,04\\
0 & 5,04 & 3,36 & 0 & -5,04 & 6,72
\end{bmatrix}$$

$$[k_3]=10^4\begin{bmatrix}
31,5 & 0 & 0 & -31,5 & 0 & 0\\
0 & 0,07875 & 0,315 & 0 & -0,07875 & 0,315\\
0 & 0,315 & 1,68 & 0 & -0,315 & 0,84\\
-31,5 & 0 & 0 & 31,5 & 0 & 0\\
0 & -0,07875 & -0,315 & 0 & 0,07875 & -0,315\\
0 & 0,315 & 0,84 & 0 & -0,315 & 1,68
\end{bmatrix}$$

$$[T_1] = [T_2] = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad [T_3] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$[C_1] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$[C_2] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$[C_3] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$[ke_1] = [T_1]^T [k_1] [T_1] \qquad [KS_1] = [C_1]^T [ke_1] [C_1]$$

$$[ke_2] = [T_2]^T [k_2] [T_2] \qquad [KS_2] = [C_2]^T [ke_2] [C_2]$$

$$[k_3] = [T_3]^T [k_3] [T_3] \qquad [KS_3] = [C_3]^T [ke_3] [C_3]$$

$$[K] = [KS_1] + [KS_2] + [KS_3]$$

$$
10^9 \cdot
\begin{bmatrix}
5{,}04 & 0 & 5{,}04 & -5{,}04 & 0 & 5{,}04 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 126 & 0 & 0 & -126 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
5{,}04 & 0 & 6{,}72 & -5{,}04 & 0 & 3{,}36 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
-5{,}04 & 0 & -5{,}04 & 10{,}08 & 0 & 0 & -5{,}04 & 0 & 5{,}04 & 0 & 0 & 0 \\
0 & -126 & 0 & 0 & 252 & 0 & 0 & -126 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
5{,}04 & 0 & 3{,}36 & 0 & 0 & 13{,}44 & -5{,}04 & 0 & 3{,}36 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & -5{,}04 & 0 & -5{,}04 & 36{,}54 & 0 & -5{,}04 & -31{,}5 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & -126 & 0 & 0 & 126{,}07875 & -0{,}315 & 0 & -0{,}07875 & -0{,}315 \\
0 & 0 & 0 & 5{,}04 & 0 & 3{,}36 & -5{,}04 & -0{,}315 & 8{,}4 & 0 & 0{,}315 & 0{,}84 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -31{,}5 & 0 & 0 & 31{,}5 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -0{,}07875 & 0{,}315 & 0 & 0{,}07875 & 0{,}315 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -0{,}315 & 0{,}84 & 0 & 0{,}315 & 1{,}68
\end{bmatrix}
\begin{bmatrix} D_1 \\ D_2 \\ D_3 \\ D_4 \\ D_5 \\ D_6 \\ D_7 \\ D_8 \\ D_9 \\ D_{10} \\ D_{11} \\ D_{12} \end{bmatrix}
=
\begin{bmatrix} 0 \\ 10 \\ 0 \\ 80 \\ 0 \\ 50 \\ 40 \\ -\frac{40 \cdot 8}{2} \\ \frac{40 \cdot 8^2}{12} \\ 0 \\ -\frac{40 \cdot 8}{2} \\ -\frac{40 \cdot 8^2}{12} \end{bmatrix}
$$

$D_4 = 90197$ m.

$D_5 = -0{,}000131$ m

$D_6 = 0{,}0173$ rad

$D_7 = 0{,}0599$ m.

$D_8 = -0{,}0003$ m.

$D_9 = 0{,}0221$ rad

$D_{10} = 0{,}0599$ m.

$D_{12} = -0{,}0238$

4
04/9

10^4

5,04	0	5,04	-5,04	0	5,04	0	0	0	0	0	0	0	RAH
0	126	0	0	-126	0	0	0	0	0	0	0	0	RAV
5,04	0	6,72	-5,04	0	3,36	0	0	0	0	0	0	0	MA
-5,04	0	-5,04	10,08	0	0	-5,04	0	5,04	0	0	0	0,0197	80
0	-126	0	0	252	0	0	-126	0	0	0	0	-0,000131	0
5,04	0	3,36	0	0	13,44	-5,04	0	3,36	0	0	0	0,0173	50
0	0	0	-5,04	0	-5,04	36,54	0	-5,04	-31,5	0	0	0,0599	40
0	0	0	0	-126	0	0	126,07875	-0,315	0	-0,07875	-0,315	-0,000262	-160
0	0	0	5,04	0	3,36	-5,04	-0,315	8,4	0	0,315	4,84	0,0221	213,333
0	0	0	0	0	0	31,5	0	0	31,5	0	0	0,0599	0
0	0	0	0	0	0	0	-0,07875	0,315	0	0,07875	0,315	0	-160+RBV
0	0	0	0	0	0	0	-0,315	4,84	0	0,315	1,68	-0,022	-213,333
0	0	0	0	0	0	0	-0,315	0,84	0	0,315	1,68		

$R_{AH} \overset{\uparrow}{=} -120,00\ kN$

$R_{AV} \overset{\uparrow}{=} 165,06\ kN$

$M_A = -411,60\ kNm$

$-160 + R_{BV} = -5,11 \rightarrow R_{BV} \overset{\uparrow}{=} 154,90$

8.5/9

Yerel Koordinatlarda Yerdeğiştirmeler

$$\{u_1\}^1 = [T_1]\{u\} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0{,}0197 \\ -0{,}000131 \\ 0{,}0173 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ -0{,}000131 \\ 0{,}0197 \\ 0{,}0173 \end{Bmatrix}$$ 1.e

$$\{u_2\}^2 = [T_2]\{u\} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 0{,}0197 \\ -0{,}000131 \\ 0{,}0173 \\ 0{,}0599 \\ -0{,}000262 \\ 0{,}0221 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -0{,}000131 \\ 0{,}0197 \\ 0{,}0173 \\ -0{,}000262 \\ 0{,}0599 \\ 0{,}0221 \end{Bmatrix}$$ 2.e

$$\{u_3\}^3 = [T_3]\{u\} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 0{,}0599 \\ -0{,}000262 \\ 0{,}0221 \\ 0{,}0599 \\ 0 \\ -0{,}0238 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0{,}0599 \\ 0{,}000262 \\ 0{,}0221 \\ 0{,}0599 \\ 0 \\ -0{,}0238 \end{Bmatrix}$$

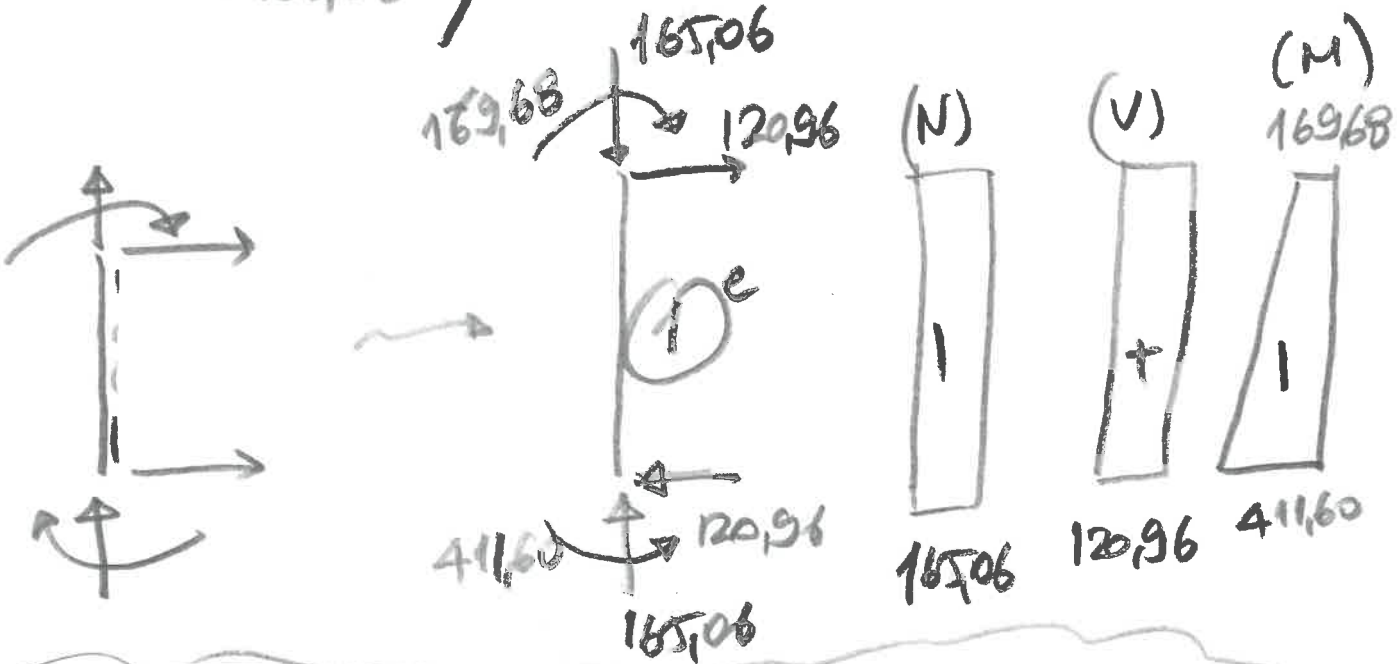
4 0.6/9

Gubuk Kuvvetlerinin Hesabı

1. eleman

$$\begin{Bmatrix} N_1 \\ V_1 \\ M_1 \\ N_2 \\ V_2 \\ M_2 \end{Bmatrix}^{1.e} = 10^4 \begin{bmatrix} 126 & 0 & 0 & -126 & 0 & 0 \\ 0 & 5{,}04 & 5{,}04 & 0 & -5{,}04 & 5{,}04 \\ 0 & 5{,}04 & 6{,}72 & 0 & -5{,}04 & 3{,}36 \\ -126 & 0 & 0 & 126 & 0 & 0 \\ 0 & -5{,}04 & -5{,}04 & 0 & 5{,}04 & -5{,}04 \\ 0 & 5{,}04 & 3{,}36 & 0 & -5{,}04 & 6{,}72 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ -0{,}000131 \\ 0{,}0197 \\ 0{,}0133 \end{Bmatrix} - * \begin{Bmatrix} 0 \\ \\ \\ \\ \\ \end{Bmatrix}$$

$$\begin{Bmatrix} N_1 \\ V_1 \\ M_1 \\ N_2 \\ V_2 \\ M_2 \end{Bmatrix}^{1.e} = \begin{Bmatrix} 165{,}06 \\ -120{,}96 \\ -411{,}60 \\ -165{,}06 \\ 120{,}96 \\ 169{,}68 \end{Bmatrix}$$



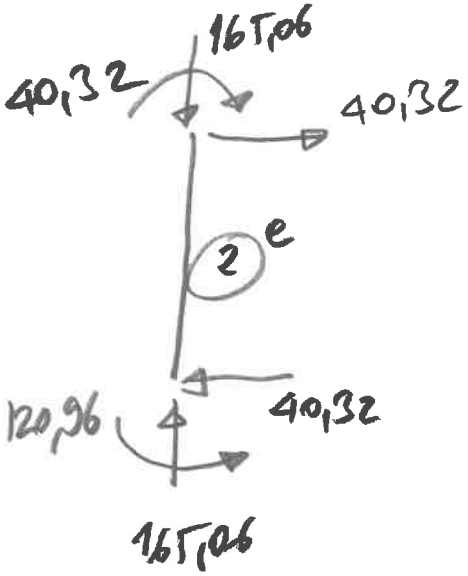
* Not: $D_5 = -0{,}000131$ değeri hesaplarda $-0{,}0001$ olarak gözükebilir. Bu durumda N değeri 126 kN gibi ($N_{gerçek} \neq 165$ kN) farklı bir değer hesaplanabilmektedir.

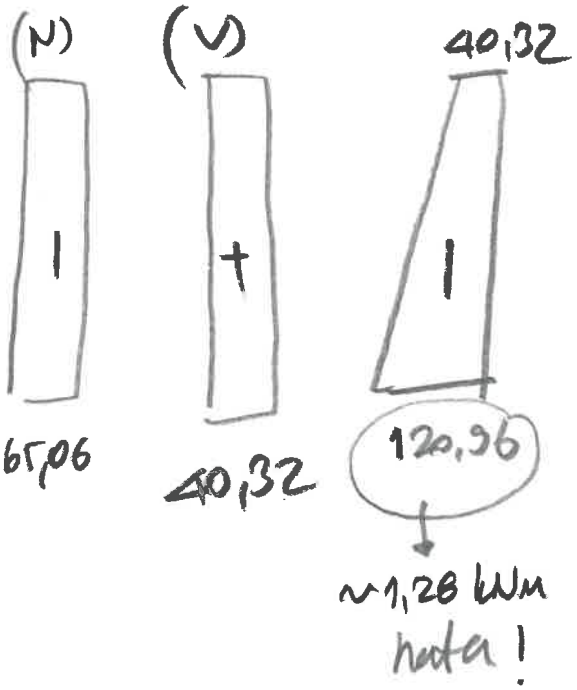
Ö.7/9

2. elemen

$$\begin{Bmatrix} N_1 \\ V_1 \\ M_1 \\ N_2 \\ V_2 \\ M_2 \end{Bmatrix}^{2e} = 10^4 \begin{bmatrix} 126 & 0 & 0 & -126 & 0 & 0 \\ 0 & 5{,}04 & 5{,}04 & 0 & -5{,}04 & 5{,}04 \\ 0 & 5{,}04 & 6{,}72 & 0 & -5{,}04 & 3{,}36 \\ -126 & 0 & 0 & 126 & 0 & 0 \\ 0 & -5{,}04 & -5{,}04 & 0 & 5{,}04 & -5{,}04 \\ 0 & 5{,}04 & 3{,}36 & 0 & -5{,}04 & 6{,}72 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} -0{,}000131 \\ 0{,}0197 \\ 0{,}0173 \\ -0{,}000262 \\ 0{,}0199 \\ 0{,}0221 \end{Bmatrix} - \begin{Bmatrix} 0 \\ \underline{Q} \end{Bmatrix}$$

$$\begin{Bmatrix} N_1 \\ V_1 \\ M_1 \\ N_2 \\ V_2 \\ M_2 \end{Bmatrix}^{2e} = \begin{Bmatrix} 165{,}06 \\ -40{,}32 \\ -120{,}96 \\ -165{,}06 \\ 40{,}32 \\ 40{,}32 \end{Bmatrix}$$



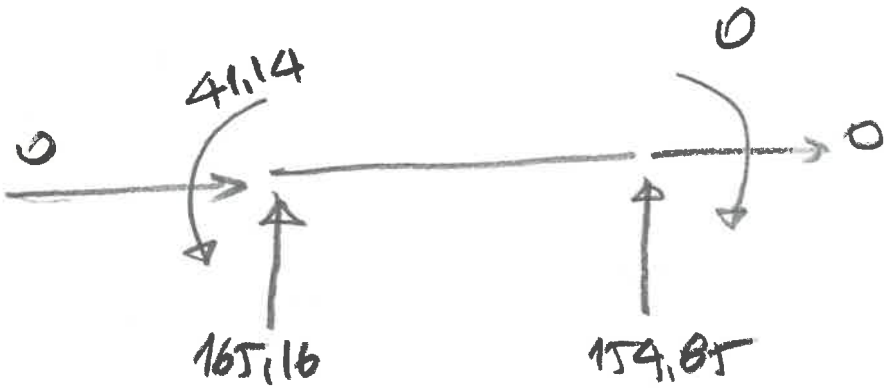


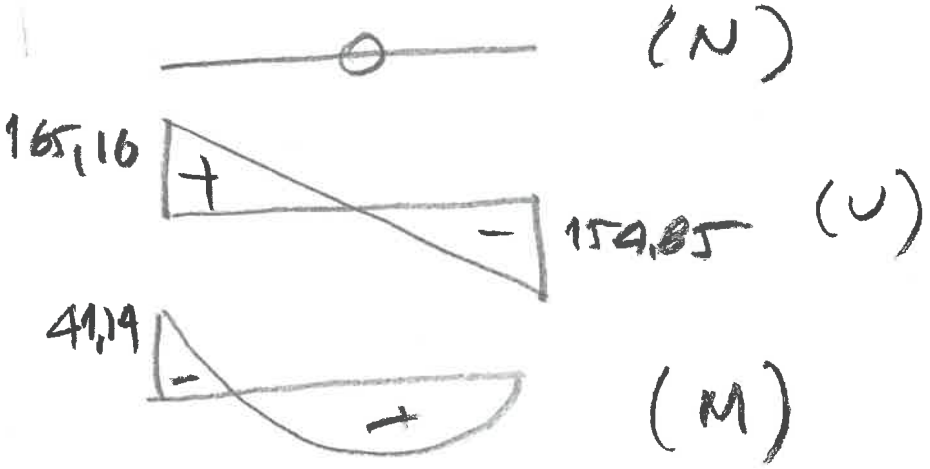
3. elemanı

$$\begin{Bmatrix} N_1 \\ V_1 \\ M_1 \\ N_2 \\ V_2 \\ M_2 \end{Bmatrix}^{3.e} = 10^4 \begin{bmatrix} 31,5 & 0 & 0 & -31,5 & 0 & 0 \\ 0 & 0,07875 & 0,315 & 0 & -0,07875 & 0,315 \\ 0 & 0,315 & 1,68 & 0 & -0,315 & 0,84 \\ -31,5 & 0 & 0 & 31,5 & 0 & 0 \\ 0 & -0,07875 & -0,315 & 0 & 0,07875 & -0,315 \\ 0 & 0,315 & 0,84 & 0 & -0,315 & 1,68 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 0,0593 \\ 0,000262 \\ 0,0221 \\ 0,0593 \\ 0 \\ -0,0238 \end{Bmatrix} - \begin{Bmatrix} 0 \\ +160 \\ 213,333 \\ 0 \\ +160 \\ -213,333 \end{Bmatrix}$$

elemanda yerel eksenlerde doğru pozitif alınmıştır.

$$\begin{Bmatrix} N_1 \\ V_1 \\ M_1 \\ N_2 \\ V_2 \\ M_2 \end{Bmatrix}^{3.e} = \begin{Bmatrix} 0 \\ -165,15 \\ -41,14 \\ 0 \\ -154,85 \\ 0 \end{Bmatrix} \rightarrow 0,826 \text{ kNm hata!}$$



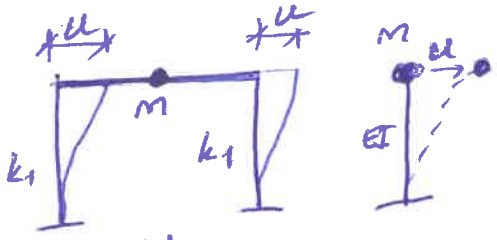


9.9/9

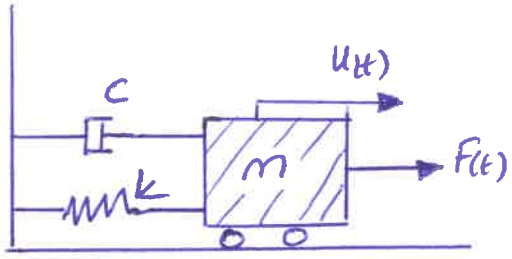
EK:2

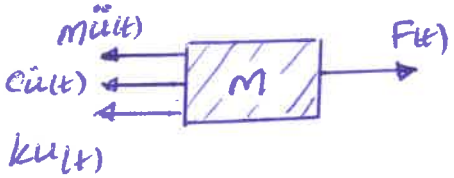
ÇERÇEVELERİN SONLU ELEMANLAR YÖNTEMİ İLE SERBEST TİTREŞİMİ

SERBEST TİTREŞİM



Şekil 1





$m\ddot{u}_{(t)} + c\dot{u}_{(t)} + k u_{(t)} = F_{(t)}$

(Hareket Denklemi)

m = kütle matrisi

$\ddot{u}_{(t)}$ = ivme vektörü

c = sönüm matrisi

$\dot{u}_{(t)}$ = hız vektörü

k = eşitlik matrisi

u = yerdeğiştirme vektörü

$F_{(t)}$ = zamana bağlı dış kuvvet

$$[M]\{\ddot{u}\} + [C]\{\dot{u}\} + [K]\{u\} = \{F\}$$

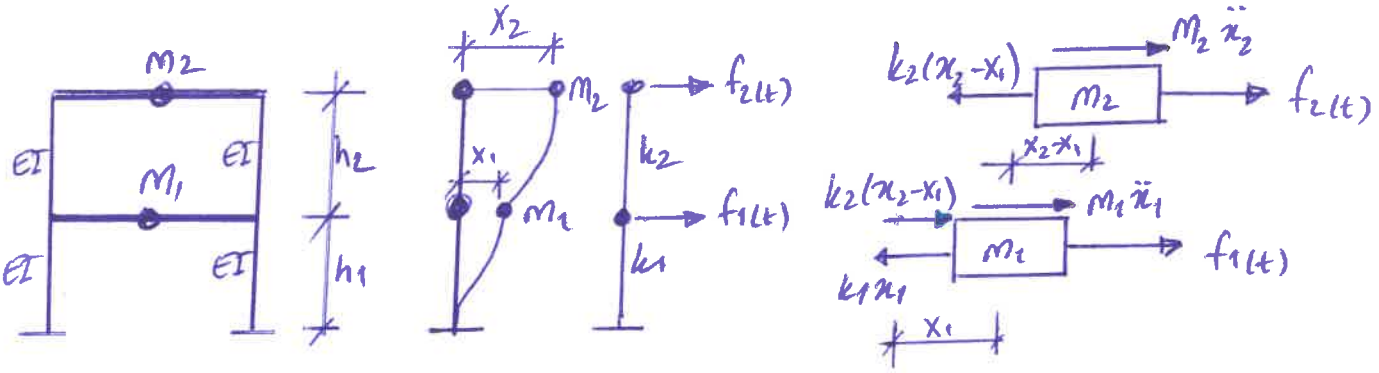
$$([K] - \omega_i^2[M])\{u_i\} = 0$$ özdeğer problemi

ω_i = sistemin doğal açısal frekansı

$T = \frac{2\pi}{\omega_i}$ sistemin doğal titreşim periyodu

Sayet, Şekil 1'de verilen çerçeve kayma çerçevesi olarak dikkate alınıyorsa kolon eşitliği k_1,

$$k_1 = \frac{12EI}{h^3}$$ olarak hesaplanacaktır.



$$\Sigma F = m.a$$

$$f_1(t) - k_1.x_1 + k_2(x_2-x_1) = m_1.\ddot{x}_1 \rightsquigarrow -m_1\ddot{x}_1 - k_1.x_1 - k_2.x_1 + k_2.x_2 = -f_1(t)$$

$$f_2(t) - k_2(x_2-x_1) = m_2.\ddot{x}_2 \rightsquigarrow -m_2.\ddot{x}_2 - k_2.x_2 + k_2.x_1 = -f_{(2)}(t)$$

$$m_1.\ddot{x}_1 + (k_1+k_2)x_1 - k_2.x_2 = f_1(t) \quad ---(1)$$

$$m_2.\ddot{x}_2 - k_2.x_1 + k_2.x_2 = f_2(t) \quad ---(2)$$

(1) ve (2) bağıntıları matris formunda yazılırsa;

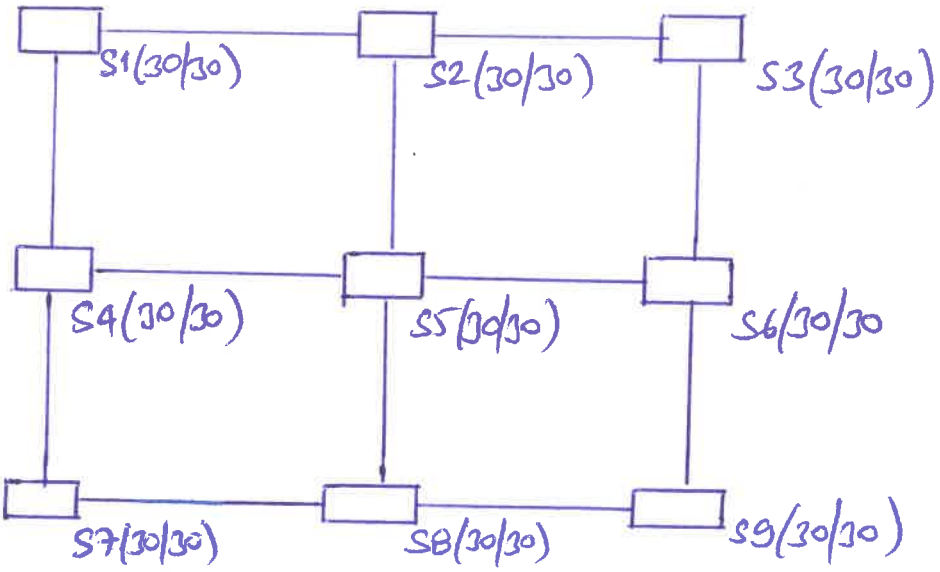
$$\begin{bmatrix} m_1 & 0 \\ 0 & m_2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{x}_1 \\ \ddot{x}_2 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} (k_1+k_2) & -k_2 \\ -k_2 & +k_2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} f_1(t) \\ f_2(t) \end{Bmatrix}$$

Bağımlı serbest titreşim durumunda;

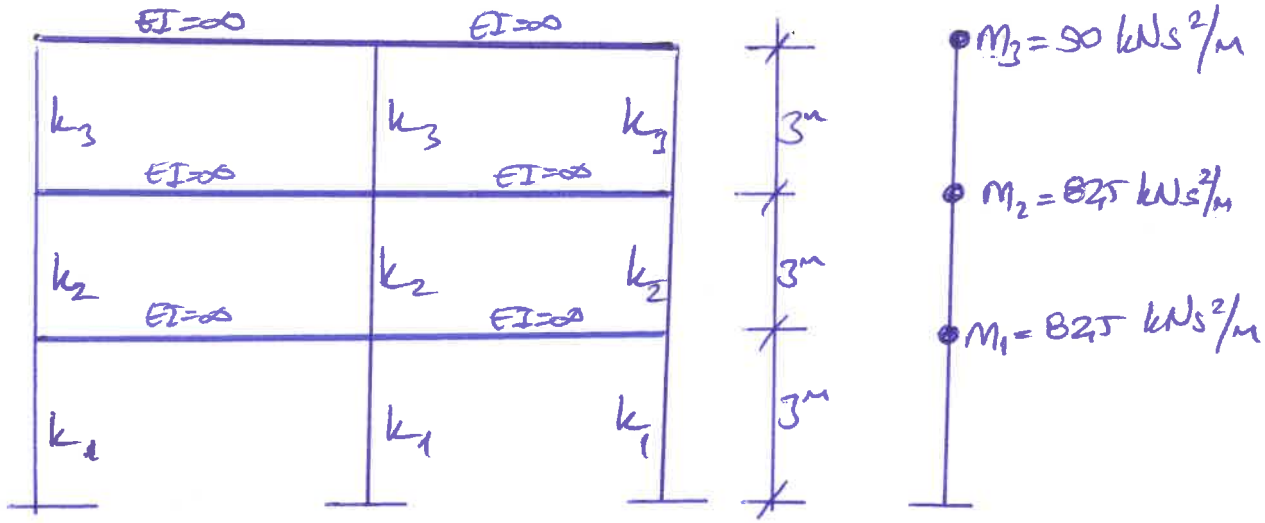
$$\left| \begin{bmatrix} k_1+k_2 & -k_2 \\ -k_2 & +k_2 \end{bmatrix} - \omega^2 \begin{bmatrix} m_1 & 0 \\ 0 & m_2 \end{bmatrix} \right| = 0$$

olarak ele alınacaktır. Buradan determinantın kökleri olan ω_i^2 sistemin doğal açısal frekansları hesaplanacaktır. Hesaplanan ω_i'lerden her bir periyoda karşı geleceğinden $T_i = \frac{2\pi}{\omega_i}$ ile serbestlik derecesi kadar periyot bulunabilecektir.

ÖRNEK



$E_c = 2{,}8 \cdot 10^7 \ kN/m^2$



$$k = \frac{12EI}{h^3} = 12 \cdot 2{,}8 \cdot 10^7 \cdot \frac{0{,}30 \cdot 0{,}3^3}{12} \cdot \frac{1}{3^3} = 8400 \ kN/m$$

Kat Rijtlig $\quad \Sigma k_1 = \Sigma k_2 = \Sigma k_3 = 9 \cdot k = 75600 \ kN/m$

$$[K] = \begin{bmatrix} k_1+k_2 & -k_2 & 0 \\ -k_2 & k_2+k_3 & -k_3 \\ 0 & -k_3 & k_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 151200 & -75600 & 0 \\ -75600 & 151200 & -75600 \\ 0 & -75600 & 75600 \end{bmatrix}.$$

$$[M] = \begin{bmatrix} M_1 & 0 & 0 \\ 0 & M_2 & 0 \\ 0 & 0 & M_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 825 & 0 & 0 \\ 0 & 825 & 0 \\ 0 & 0 & 50 \end{bmatrix}$$

$|[K] - \omega^2[M]| = 0$ serbest titreşim

$$\left| \begin{bmatrix} 15720 & -75600 & 0 \\ -75600 & 15720 & -75600 \\ 0 & -75600 & 75600 \end{bmatrix} - \omega^2 \begin{bmatrix} 825 & 0 & 0 \\ 0 & 825 & 0 \\ 0 & 0 & 50 \end{bmatrix} \right| = 0$$

$$\begin{vmatrix} 15720 - 825\omega^2 & -75600 & 0 \\ -75600 & 15720 - 825\omega^2 & -75600 \\ 0 & -75600 & 75600 - 50\omega^2 \end{vmatrix} = 0$$

$\omega^2 = \lambda$ ise ve determinant açılımı yapılırsa;

$$(15720 - 825\omega^2)\left[(15720 - 825\omega^2)(75600 - 50\omega^2) - (-75600)(-75600)\right]$$

$$-(-75600)\left[(-75600)(75600 - 50\omega^2) - (0)(-75600)\right] = 0$$

elde edilir. Bağıntı yeniden düzenlenirse;

$340312.5\,\lambda^3 - 1761952500\,\lambda^2 + 22718356.10^5\,\lambda - 432081216.10^6 = 0$

Denklem çözümünden;

$\lambda_1 = \omega_1^2 = 0{,}2291.10^3 \ (rad/sec)^2 \longrightarrow \omega_1 = 15{,}1357 \ rad/s$

$\lambda_2 = \omega_2^2 = 1{,}7130.10^3 \ (rad/sec)^2 \longrightarrow \omega_2 = 41{,}3883 \ rad/s$

$\lambda_3 = \omega_3^2 = 3{,}2354.10^3 \ (rad/sec)^2 \longrightarrow \omega_3 = 56{,}8803 \ rad/s$

değerleri elde edilir. Buradan;

$$T_1 = \frac{2\pi}{\omega_1} = 0{,}42 \ s.$$

$$T_2 = \frac{2\pi}{\omega_2} = 0{,}15 \ s.$$

$$T_3 = \frac{2\pi}{\omega_3} = 0{,}11 \ s.$$

olarak periyotlar bulunur.

Yukarıda verilen örnekte yığılı kütle olarak ele alınan kütle matrisi yaygın olarak dikkate alınacak ise;

$$[m^e] = \int_V \rho \phi^T \phi \, dV = \int_0^1 \phi^T \phi (L\,d\xi) \int_A \rho \, dA$$

bağıntısı kullanılacaktır. Bağıntıdaki;

$$\phi^T = \begin{Bmatrix} \phi_i \\ \varphi_i \\ \phi_j \\ \varphi_j \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 1-3\xi^2+2\xi^3 \\ L\xi-2L\xi^2+L\xi^3 \\ 3\xi^2-2\xi^3 \\ -L\xi^2+L\xi^3 \end{Bmatrix}$$

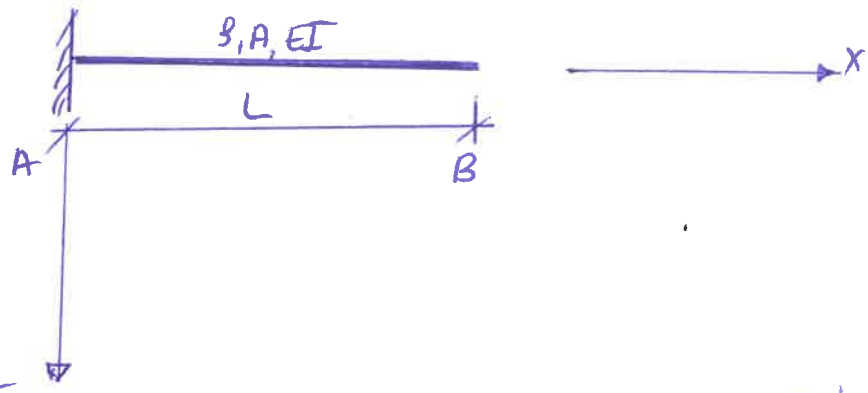
ρ = birim hacim kütledir.

Bu durumda kütle matrisi;

$$[m^e] = L\int_0^1 \begin{bmatrix} 1-3\xi^2+2\xi^3 \\ L(\xi-2\xi^2+\xi^3) \\ 3\xi^2-2\xi^3 \\ L(-\xi^2+\xi^3) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1-3\xi^2+2\xi^3 & L(\xi-2\xi^2+\xi^3) & 3\xi^2-2\xi^3 & L(-\xi^2+\xi^3) \end{bmatrix} d\xi \int_A \rho \, dA$$

$$= \frac{\rho A L}{420} \begin{bmatrix} 156 & 22L & 54 & -13L \\ 22L & 4L^2 & 13L & -3L^2 \\ 54 & 13L & 156 & -22L \\ -13L & -3L^2 & -22L & 4L^2 \end{bmatrix}$$

ÖRNEK



$$\left(\frac{EI}{L^2} \begin{bmatrix} 12 & 6L & -12 & 6L \\ 6L & 4L^2 & -6L & 2L^2 \\ -12 & -6L & 12 & -6L \\ 6L & 2L^2 & -6L & 4L^2 \end{bmatrix} - \omega^2 \frac{\rho AL}{420} \begin{bmatrix} 156 & 22L & 54 & -13L \\ 22L & 4L^2 & 13L & -3L^2 \\ 54 & 13L & 156 & -22L \\ -13L & -3L^2 & -22L & 4L^2 \end{bmatrix} \right) \begin{Bmatrix} D_1 \\ D_2 \\ D_3 \\ D_4 \end{Bmatrix} =$$

$$\left(\frac{EI}{L^3} \begin{bmatrix} 12 & -6L \\ -6L & 4L^2 \end{bmatrix} - \omega^2 \frac{\rho AL}{420} \begin{bmatrix} 156 & -22L \\ -22L & 4L^2 \end{bmatrix} \right) \begin{Bmatrix} D_1 \\ D_4 \end{Bmatrix} = 0$$

$\lambda = \omega^2$ ise,

$$\left| \begin{bmatrix} \frac{12EI}{L^3} & -\frac{6EI}{L^2} \\ -\frac{6EI}{L^2} & \frac{4EI}{L} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \frac{156\rho AL}{420}\lambda & -\frac{22}{420}\rho AL^2\lambda \\ -\frac{22}{420}\rho AL^2\lambda & +\frac{4}{420}\rho AL^3\lambda \end{bmatrix} \right| = 0$$

$$\begin{vmatrix} \frac{12EI}{L^3} - \frac{156\rho AL}{420}\lambda & -\frac{6EI}{L^2} + \frac{22}{420}\rho AL^2\lambda \\ -\frac{6EI}{L^2} + \frac{22}{420}\rho AL^2\lambda & \frac{4EI}{L} - \frac{4}{420}\rho AL^3\lambda \end{vmatrix} = 0$$

$$\frac{48(EI)^2}{L^4} - \frac{48}{420}\rho\frac{AL^3}{L^3}EI\lambda - \frac{624}{420}EI\rho A\lambda + \frac{624}{420^2}\rho^2A^2L^4\lambda^2$$

$$-\left[\frac{36(EI)^2}{L^4} - \frac{132}{420}\frac{EI}{L^2}\rho AL^2\lambda - \frac{132}{420}\frac{EI}{L^2}\rho AL^2\lambda + \frac{484}{420^2}\rho^2A^2L^4\lambda^2\right]=0$$

$$\alpha = \omega^2\frac{\rho AL^4}{EI} \quad \text{de;}$$

$$\frac{12(EI)^2}{L^4} - \alpha\left(\frac{48}{420}\frac{(EI)^2}{L^4}\right) - \alpha\left(\frac{624}{420}\frac{(EI)^2}{L^4}\right) + \alpha^2\left(\frac{624}{420^2}\frac{(EI)^2}{L^4}\right)$$

$$+\alpha\left(\frac{132}{420}\frac{(EI)^2}{L^4}\right) + \alpha\left(\frac{132}{420}\frac{(EI)^2}{L^4}\right) - \alpha^2\left(\frac{484}{420^2}\frac{(EI)^2}{L^4}\right) = 0$$

$$\frac{12(EI)^2}{L^4} - \frac{408}{420}\frac{(EI)^2}{L^4}\alpha + \frac{1}{1260}\frac{(EI)^2}{L^4}\alpha^2 = 0$$

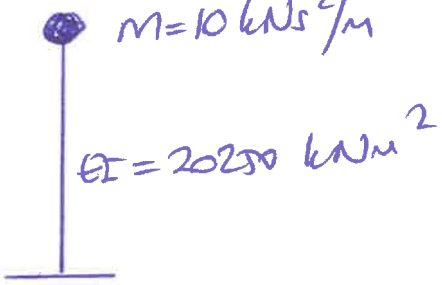
$$12 - 0{,}971\alpha + \frac{1}{1260}\alpha^2 = 0$$

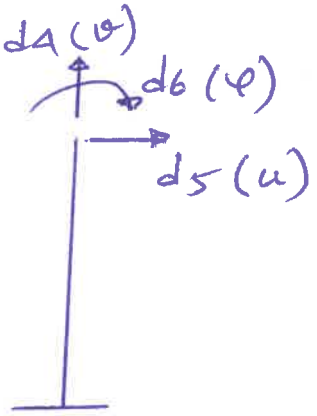
$$\alpha_1 = 1248 \qquad \alpha_2 = 1211{,}52$$

$$1248 = \omega_1^2\frac{\rho AL^4}{EI} \longrightarrow \omega_1 = \sqrt{\frac{1248\,EI}{\rho AL^4}}$$

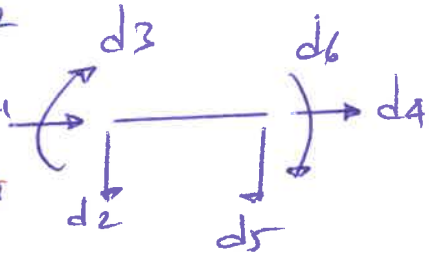
$$1211{,}52 = \omega_2^2\frac{\rho AL^4}{EI} \longrightarrow \omega_2 = \sqrt{\frac{1211{,}52\,EI}{\rho AL^4}}$$

ÖRNEK





$$[K_e] = \begin{bmatrix}
 & D_1 & D_2 & D_3 & D_4 & D_5 & D_6 & \\
 & \frac{EA}{L} & 0 & 0 & \frac{EA}{L} & 0 & 0 & D_1 \\
 & 0 & \frac{12EI}{L^3} & \frac{6EI}{L^2} & 0 & -\frac{12EI}{L^3} & \frac{6EI}{L^2} & D_2 \\
 & 0 & \frac{6EI}{L^2} & \frac{4EI}{L} & 0 & -\frac{6EI}{L^2} & \frac{2EI}{L} & D_3 \\
 & \frac{EA}{L} & 0 & 0 & \frac{EA}{L} & 0 & 0 & D_4 \\
 & 0 & -\frac{12EI}{L^3} & -\frac{6EI}{L^2} & 0 & \frac{12EI}{L^3} & -\frac{6EI}{L^2} & D_5 \\
 & 0 & \frac{6EI}{L^2} & \frac{2EI}{L} & 0 & -\frac{6EI}{L^2} & \frac{4EI}{L} & D_6
\end{bmatrix}$$



Boyuna yerdeğiştirme olmayacağından $D_4 = 0$

$$\left| [K] - \omega^2 [M] \right| = 0$$

$$\left| \begin{bmatrix} \frac{12EI}{L^3} & -\frac{6EI}{L^2} \\ -\frac{6EI}{L^2} & \frac{4EI}{L} \end{bmatrix} - \omega^2 \begin{bmatrix} 10 & 0 \\ 0 & 10 \end{bmatrix} \right| = 0$$

$$\left| \begin{bmatrix} 9000 & -13500 \\ -13500 & 27000 \end{bmatrix} - \omega^2 \begin{bmatrix} 10 & 0 \\ 0 & 10 \end{bmatrix} \right| = 0$$

$$\begin{vmatrix} 9000 - 10\omega^2 & -13500 \\ -13500 & 27000 - 10\omega^2 \end{vmatrix} = 0$$

$\omega^2 = \lambda$ ise

$$(9000 - 10\lambda)(27000 - 10\omega^2) - (-13500)(-13500) = 0$$

$$243000000 - 90000\lambda - 270000\lambda + 100\lambda^2 - 13500^2 = 0$$

$$60750000 - 360000\lambda + 100\lambda^2 = 0$$

$$607500 - 3600\lambda + \lambda^2 = 0$$

$\lambda_1 = \omega_1^2 = 17750 \longrightarrow \omega_1 = 13,32$ rad/s

$\lambda_2 = \omega_2^2 = 342250 \longrightarrow \omega_2 = 58,50$ rad/s

$$T_1 = \frac{2\pi}{\omega_1} = 0,47 \text{ sn.}$$

$$T_2 = \frac{2\pi}{\omega_2} = 0,10 \text{ sn.}$$

EK:3

MATLAB ÖRNEKLERİ

KOD1-İKİ MATRİS ÇARPIMI

$$[\boldsymbol{C1}] = [\boldsymbol{A1}] * [\boldsymbol{B1}]$$

$$[\boldsymbol{A1}] * [\boldsymbol{B1}] = \begin{bmatrix} 3 & 4 & 7 & -4 & 2 \\ 2 & -1 & 0 & -7 & 1 \\ 3 & 5 & 11 & 1 & 2 \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} 1 & 2 & -6 & 3 \\ 3 & 4 & 5 & 10 \\ -1 & 11 & 3 & -2 \\ 0 & 5 & 1 & 5 \\ 3 & 7 & 2 & 3 \end{bmatrix}$$

>> A1=[3 4 7 -4 2 ; 2 -1 0 -7 1; 3 5 11 1 2];

$$A1 = \begin{bmatrix} 3 & 4 & 7 & -4 & 2 \\ 2 & -1 & 0 & -7 & 1 \\ 3 & 5 & 11 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

>> B1=[1 2 -6 3; 3 4 5 10; -1 11 3 -2; 0 5 1 5; 3 7 2 3];

$$B1 = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -6 & 3 \\ 3 & 4 & 5 & 10 \\ -1 & 11 & 3 & -2 \\ 0 & 5 & 1 & 5 \\ 3 & 7 & 2 & 3 \end{bmatrix}$$

>> C1=A1*B1

$$C1 = \begin{bmatrix} 14 & 93 & 23 & 21 \\ 2 & -28 & -22 & -36 \\ 13 & 166 & 45 & 48 \end{bmatrix}$$

KOD2-ÜÇ MATRİSİN ÇARPIMI

$$[D2] = [A2] * [B2] * [C2]$$

$$[A2] * [B2] * [C2] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} 12 & 6 & -12 & 6 \\ 6 & 4 & -6 & 2 \\ -12 & -6 & 12 & -6 \\ 6 & 2 & -6 & 4 \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

clear, clc

>>syms L

>>syms x

>> A2=[1 0 0 0 ; 0 1 0 0 ; 0 0 1 0; 0 0 0 1; 0 0 0 0; 0 0 0 0; 0 0 0 0; 0 0 0 0]

$$A2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

>> B2=[12 6 -12 6; 6 4 -6 2; -12 -6 12 -6; 6 2 -6 4]

$$B2 = \begin{bmatrix} 12 & 6 & -12 & 6 \\ 6 & 4 & -6 & 2 \\ -12 & -6 & 12 & -6 \\ 6 & 2 & -6 & 4 \end{bmatrix}$$

>> C2=[1 0 0 0 0 0 0 0 ; 0 1 0 0 0 0 0 0 ; 0 0 1 0 0 0 0 0 ; 0 0 0 1 0 0 0 0]

$$C2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

>> D2=A2*B2*C2

$$D2 = \begin{bmatrix} 12 & 6 & -12 & 6 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 6 & 4 & -6 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -12 & -6 & 12 & -6 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 6 & 2 & -6 & 4 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

KOD3-DÖRT MATRİSİN ÇARPIMI

$$\boldsymbol{Carp_3 = [A3] * [B3] * [C3] * [D3]}$$

$$[A3] * [B3] * [C3] * [D3] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -\frac{3}{L^2} & \frac{2}{L^3} \\ 0 & 1 & -\frac{2}{L} & \frac{1}{L^2} \\ 0 & 0 & \frac{3}{L^2} & -\frac{2}{L^3} \\ 0 & 0 & -\frac{1}{L} & \frac{1}{L^2} \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -2 \\ -6x \end{bmatrix} * [0 \quad 0 \quad -2 \quad -6x] * \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\frac{3}{L^2} & -\frac{2}{L} & \frac{3}{L^2} & -\frac{1}{L} \\ \frac{2}{L^3} & \frac{1}{L^2} & -\frac{2}{L^3} & \frac{1}{L^2} \end{bmatrix}$$

clear, clc

syms L

syms x

>> A3=[1 0 -3/(L^2) 2/(L^3) ; 0 1 -2/L 1/(L^2); 0 0 3/(L^2) -2/(L^3); 0 0 -1/L 1/(L^2)]

$$A3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -\frac{3}{L^2} & \frac{2}{L^3} \\ 0 & 1 & -\frac{2}{L} & \frac{1}{L^2} \\ 0 & 0 & \frac{3}{L^2} & -\frac{2}{L^3} \\ 0 & 0 & -\frac{1}{L} & \frac{1}{L^2} \end{bmatrix}$$

>> B3=[0; 0; -2; -6*x]

$$B3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -2 \\ -6x \end{bmatrix}$$

>> C3 =[0, 0, -2, -6*x]

$$C3 = [0 \quad 0 \quad -2 \quad -6x]$$

>> D3=[1 0 0 0 ; 0 1 0 0 ; -3/(L^2) -2/L 3/(L^2) -1/L; 2/(L^3) 1/(L^2) -2/(L^3) 1/(L^2)];

$$D3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\frac{3}{L^2} & -\frac{2}{L} & \frac{3}{L^2} & -\frac{1}{L} \\ \frac{2}{L^3} & \frac{1}{L^2} & -\frac{2}{L^3} & \frac{1}{L^2} \end{bmatrix}$$

>> Carp_3= A3*B3*C3*D3

$$Carp_3 = \begin{bmatrix} 12x\frac{\left(\frac{12x}{L^3}-\frac{6}{L^2}\right)}{L^3} - 3\frac{\frac{24x}{L^3}-\frac{12}{L^2}}{L^2} & 6x\frac{\left(\frac{12x}{L^3}-\frac{6}{L^2}\right)}{L^2} - 2\frac{\frac{24x}{L^3}-\frac{12}{L^2}}{L} & 3\frac{\left(\frac{24x}{L^3}-\frac{12}{L^2}\right)}{L^2} - 12x\frac{\frac{12x}{L^3}-\frac{6}{L^2}}{L^3} & 6x\frac{\left(\frac{12x}{L^3}-\frac{6}{L^2}\right)}{L^2} - \frac{\frac{24x}{L^3}-\frac{12}{L^2}}{L} \\ 12x\frac{\left(\frac{6x}{L^2}-\frac{4}{L}\right)}{L^3} - 3\frac{\frac{12x}{L^2}-\frac{8}{L}}{L^2} & 6x\frac{\left(\frac{6x}{L^2}-\frac{4}{L}\right)}{L^2} - 2\frac{\frac{12x}{L^2}-\frac{8}{L}}{L} & 3\frac{\left(\frac{12x}{L^2}-\frac{8}{L}\right)}{L^2} - 12x\frac{\frac{6x}{L^2}-\frac{4}{L}}{L^3} & 6x\frac{\left(\frac{6x}{L^2}-\frac{4}{L}\right)}{L^2} - \frac{\frac{12x}{L^2}-\frac{8}{L}}{L} \\ 3\frac{\left(\frac{24x}{L^3}-\frac{12}{L^2}\right)}{L^2} - 12x\frac{\frac{12x}{L^3}-\frac{6}{L^2}}{L^3} & 2\frac{\left(\frac{24x}{L^3}-\frac{12}{L^2}\right)}{L} - 6x\frac{\frac{12x}{L^3}-\frac{6}{L^2}}{L^2} & 12x\frac{\left(\frac{12x}{L^3}-\frac{6}{L^2}\right)}{L^3} - 3\frac{\frac{24x}{L^3}-\frac{12}{L^2}}{L^2} & \frac{\left(\frac{24x}{L^3}-\frac{12}{L^2}\right)}{L} - 6x\frac{\frac{12x}{L^3}-\frac{6}{L^2}}{L^2} \\ 12x\frac{\left(\frac{6x}{L^2}-\frac{2}{L}\right)}{L^3} - 3\frac{\frac{12x}{L^2}-\frac{4}{L}}{L^2} & 6x\frac{\left(\frac{6x}{L^2}-\frac{2}{L}\right)}{L^2} - 2\frac{\frac{12x}{L^2}-\frac{4}{L}}{L} & 3\frac{\left(\frac{12x}{L^2}-\frac{4}{L}\right)}{L^2} - 12x\frac{\frac{6x}{L^2}-\frac{2}{L}}{L^3} & 6x\frac{\left(\frac{6x}{L^2}-\frac{2}{L}\right)}{L^2} - \frac{\frac{12x}{L^2}-\frac{4}{L}}{L} \end{bmatrix}$$

KOD4-DÖRT MATRİSİN ÇARPIMININ İNTEGRALİ

Çubuk eleman rijitlik matrisinin hesabı [ke]

$$[Carp_3_intg] = \int_0^L [A3] * [B3] * [C3] * [D3]$$

```
>> InT_D3=int(Carp_3, x, 0, L)
```

$$Carp_3 = \int_0^L \begin{bmatrix} 12x\frac{\left(\frac{12x}{L^3}-\frac{6}{L^2}\right)}{L^3} - 3\frac{\frac{24x}{L^3}-\frac{12}{L^2}}{L^2} & 6x\frac{\left(\frac{12x}{L^3}-\frac{6}{L^2}\right)}{L^2} - 2\frac{\frac{24x}{L^3}-\frac{12}{L^2}}{L} & 3\frac{\left(\frac{24x}{L^3}-\frac{12}{L^2}\right)}{L^2} - 12x\frac{\frac{12x}{L^3}-\frac{6}{L^2}}{L^3} & 6x\frac{\left(\frac{12x}{L^3}-\frac{6}{L^2}\right)}{L^2} - \frac{\frac{24x}{L^3}-\frac{12}{L^2}}{L} \\ 12x\frac{\left(\frac{6x}{L^2}-\frac{4}{L}\right)}{L^3} - 3\frac{\frac{12x}{L^2}-\frac{8}{L}}{L^2} & 6x\frac{\left(\frac{6x}{L^2}-\frac{4}{L}\right)}{L^2} - 2\frac{\frac{12x}{L^2}-\frac{8}{L}}{L} & 3\frac{\left(\frac{12x}{L^2}-\frac{8}{L}\right)}{L^2} - 12x\frac{\frac{6x}{L^2}-\frac{4}{L}}{L^3} & 6x\frac{\left(\frac{6x}{L^2}-\frac{4}{L}\right)}{L^2} - \frac{\frac{12x}{L^2}-\frac{8}{L}}{L} \\ 3\frac{\left(\frac{24x}{L^3}-\frac{12}{L^2}\right)}{L^2} - 12x\frac{\frac{12x}{L^3}-\frac{6}{L^2}}{L^3} & 2\frac{\left(\frac{24x}{L^3}-\frac{12}{L^2}\right)}{L} - 6x\frac{\frac{12x}{L^3}-\frac{6}{L^2}}{L^2} & 12x\frac{\left(\frac{12x}{L^3}-\frac{6}{L^2}\right)}{L^3} - 3\frac{\frac{24x}{L^3}-\frac{12}{L^2}}{L^2} & \frac{\left(\frac{24x}{L^3}-\frac{12}{L^2}\right)}{L} - 6x\frac{\frac{12x}{L^3}-\frac{6}{L^2}}{L^2} \\ 12x\frac{\left(\frac{6x}{L^2}-\frac{2}{L}\right)}{L^3} - 3\frac{\frac{12x}{L^2}-\frac{4}{L}}{L^2} & 6x\frac{\left(\frac{6x}{L^2}-\frac{2}{L}\right)}{L^2} - 2\frac{\frac{12x}{L^2}-\frac{4}{L}}{L} & 3\frac{\left(\frac{12x}{L^2}-\frac{4}{L}\right)}{L^2} - 12x\frac{\frac{6x}{L^2}-\frac{2}{L}}{L^3} & 6x\frac{\left(\frac{6x}{L^2}-\frac{2}{L}\right)}{L^2} - \frac{\frac{12x}{L^2}-\frac{4}{L}}{L} \end{bmatrix}$$

$$InT_{D3} = \begin{bmatrix} \frac{12}{L^3} & \frac{6}{L^2} & -\frac{12}{L^3} & \frac{6}{L^2} \\ \frac{6}{L^2} & \frac{4}{L} & -\frac{6}{L^2} & \frac{2}{L} \\ -\frac{12}{L^3} & -\frac{6}{L^2} & \frac{12}{L^3} & -\frac{6}{L^2} \\ \frac{6}{L^2} & \frac{2}{L} & -\frac{6}{L^2} & \frac{4}{L} \end{bmatrix}$$

KOD5-ŞEKİL FONKSİYONUNDAN FAYDALANARAK ELEMAN RİJİTLİK MATRİSİNİN HESABI

$$[k_e] = \int_0^L \begin{bmatrix} -N_1'' \\ -N_2'' \\ -N_3'' \\ -N_4'' \end{bmatrix} [-N_1'' \quad -N_2'' \quad -N_3'' \quad -N_4''] \, dx$$

```
clear, clc
>>syms L
>>syms x
```

```
>> N1=1-3*(x^2)/(L^2)+2*(x^3)/(L^3)
```

$$N1 = 1 - \frac{3x^2}{L^2} + \frac{2x^3}{L^3}$$

```
>> N2=L*(x/L-2*(x^2)/(L^2)+(x/L)^3)
```

$$N2 = L(\frac{x}{L} - \frac{2x^2}{L^2} + \frac{x^3}{L^3})$$

```
>> N3=3*x/(L^2)-2*((x/L)^3)
```

$$N3 = \frac{3x^2}{L^2} - \frac{2x^3}{L^3}$$

```
>> N4=-1*(x^2)/L+(x^3)/(L^2)
```

$$N4 = -\frac{x^2}{L} + \frac{x^3}{L^2}$$

```
>> N1_dev2=diff(diff(N1))
>> N2_dev2=diff(diff(N2))
>> N3_dev2=diff(diff(N3))
>> N4_dev2=diff(diff(N4))
```

$$N1_dev2 = -\frac{6}{L^2} + \frac{12x}{L^3}$$

$$N2_dev2 = L(-4/L\text{^}2 \; + 6x/L\text{^}3\,)$$

$$N3_dev2 = \frac{6}{L^2} - \frac{12x}{L^3}$$

$$N4_dev2 = -\frac{2}{L} + \frac{6x}{L^2}$$

>> NN_VEC1=-[N1_dev2; N2_dev2; N3_dev2; N4_dev2]

$$NN_VEC1 = \begin{bmatrix} \frac{6}{L^2} - \frac{12x}{L^3} \\ -L(-4/L\text{^}2 + 6x/L\text{^}3\,) \\ -\frac{6}{L^2} + \frac{12x}{L^3} \\ \frac{2}{L} - \frac{6x}{L^2} \end{bmatrix}$$

>> NN_VEC2=-[N1_dev2 N2_dev2 N3_dev2 N4_dev2]

$$NN_VEC2 = \left[\frac{6}{L^2} - \frac{12x}{L^3} \quad -L(-4/L\text{^}2 + 6x/L\text{^}3\,) \quad -\frac{6}{L^2} + \frac{12x}{L^3} \quad \frac{2}{L} - \frac{6x}{L^2}\right]$$

>> kL=NN_VEC1*NN_VEC2;

$$kL = \begin{bmatrix} \left(\frac{12x}{L^3} - \frac{6}{L^2}\right)^2 & L\left(\left(\frac{6x}{L^3} - \frac{4}{L^2}\right) * \left(\frac{12x}{L^3} - \frac{6}{L^2}\right)\right) & -\left(\frac{12x}{L^3} - \frac{6}{L^2}\right)^2 & \left(\frac{6x}{L^2} - \frac{2}{L}\right) * \left(\frac{12x}{L^3} - \frac{6}{L^2}\right) \\ L\left(\left(\frac{6x}{L^3} - \frac{4}{L^2}\right) * \left(\frac{12x}{L^3} - \frac{6}{L^2}\right)\right) & L^2\left(\frac{6x}{L^3} - \frac{4}{L^2}\right)^2 & L\left(\left(\frac{6x}{L^3} - \frac{4}{L^2}\right) * \left(\frac{12x}{L^3} - \frac{6}{L^2}\right)\right) & L\left(\left(\frac{6x}{L^2} - \frac{2}{L}\right) * \left(\frac{6x}{L^3} - \frac{4}{L^2}\right)\right) \\ -\left(\frac{12x}{L^3} - \frac{6}{L^2}\right)^2 & -L\left(\left(\frac{6x}{L^3} - \frac{4}{L^2}\right) * \left(\frac{12x}{L^3} - \frac{6}{L^2}\right)\right) & \left(\frac{12x}{L^3} - \frac{6}{L^2}\right)^2 & -\left(\frac{6x}{L^2} - \frac{2}{L}\right) * \left(\frac{12x}{L^3} - \frac{6}{L^2}\right) \\ \left(\frac{6x}{L^2} - \frac{2}{L}\right) * \left(\frac{12x}{L^3} - \frac{6}{L^2}\right) & L\left(\left(\frac{6x}{L^2} - \frac{2}{L}\right) * \left(\frac{6x}{L^3} - \frac{4}{L^2}\right)\right) & \left(\frac{6x}{L^2} - \frac{2}{L}\right) * \left(\frac{12x}{L^3} - \frac{6}{L^2}\right) & \left(\frac{6x}{L^2} - \frac{2}{L}\right)^2 \end{bmatrix}$$

>> InT_NN_VEC=int(kL, x, 0, L)

$$kL = \int_0^L \begin{bmatrix} \left(\frac{12x}{L^3} - \frac{6}{L^2}\right)^2 & L\left(\left(\frac{6x}{L^3} - \frac{4}{L^2}\right) * \left(\frac{12x}{L^3} - \frac{6}{L^2}\right)\right) & -\left(\frac{12x}{L^3} - \frac{6}{L^2}\right)^2 & \left(\frac{6x}{L^2} - \frac{2}{L}\right) * \left(\frac{12x}{L^3} - \frac{6}{L^2}\right) \\ L\left(\left(\frac{6x}{L^3} - \frac{4}{L^2}\right) * \left(\frac{12x}{L^3} - \frac{6}{L^2}\right)\right) & L^2\left(\frac{6x}{L^3} - \frac{4}{L^2}\right)^2 & L\left(\left(\frac{6x}{L^3} - \frac{4}{L^2}\right) * \left(\frac{12x}{L^3} - \frac{6}{L^2}\right)\right) & L\left(\left(\frac{6x}{L^2} - \frac{2}{L}\right) * \left(\frac{6x}{L^3} - \frac{4}{L^2}\right)\right) \\ -\left(\frac{12x}{L^3} - \frac{6}{L^2}\right)^2 & -L\left(\left(\frac{6x}{L^3} - \frac{4}{L^2}\right) * \left(\frac{12x}{L^3} - \frac{6}{L^2}\right)\right) & \left(\frac{12x}{L^3} - \frac{6}{L^2}\right)^2 & -\left(\frac{6x}{L^2} - \frac{2}{L}\right) * \left(\frac{12x}{L^3} - \frac{6}{L^2}\right) \\ \left(\frac{6x}{L^2} - \frac{2}{L}\right) * \left(\frac{12x}{L^3} - \frac{6}{L^2}\right) & L\left(\left(\frac{6x}{L^2} - \frac{2}{L}\right) * \left(\frac{6x}{L^3} - \frac{4}{L^2}\right)\right) & \left(\frac{6x}{L^2} - \frac{2}{L}\right) * \left(\frac{12x}{L^3} - \frac{6}{L^2}\right) & \left(\frac{6x}{L^2} - \frac{2}{L}\right)^2 \end{bmatrix}$$

$$InT_NN_VEC = \begin{bmatrix} \frac{12}{L^3} & \frac{6}{L^2} & -\frac{12}{L^3} & \frac{6}{L^2} \\ \frac{6}{L^2} & \frac{4}{L} & -\frac{6}{L^2} & \frac{2}{L} \\ -\frac{12}{L^3} & -\frac{6}{L^2} & \frac{12}{L^3} & -\frac{6}{L^2} \\ \frac{6}{L^2} & \frac{2}{L} & -\frac{6}{L^2} & \frac{4}{L} \end{bmatrix}$$

KOD6-KİRİŞ MOMENTLERİNİN HESABI

$$M_1 = -\frac{EI}{L^2}[-N_1^{"} \quad -N_2^{"} \quad -N_3^{"} \quad -N_4^{"}]\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{3}{8}q\frac{L^4}{EI} \\ \frac{1}{2}q\frac{L^3}{EI} \end{bmatrix}$$

clear, clc

syms L

syms x

syms q

syms E

syms I

>> N1=1-3*(x^2)/(L^2)+2*(x^3)/(L^3)

$$N1 = 1 - \frac{3x^2}{L^2} + \frac{2x^3}{L^3}$$

>> N2=L*(x/L-2*(x^2)/(L^2)+(x/L)^3)

$$N2 = L(\frac{x}{L} - \frac{2x^2}{L^2} + \frac{x^3}{L^3})$$

>> N3=3*x/(L^2)-2*((x/L)^3)

$$N3 = \frac{3x^2}{L^2} - \frac{2x^3}{L^3}$$

>> N4=-1*(x^2)/L+(x^3)/(L^2)

$$N4 = -\frac{x^2}{L} + \frac{x^3}{L^2}$$

>> N1_dev2=diff(diff(N1))

>> N2_dev2=diff(diff(N2))

>> N3_dev2=diff(diff(N3))

>> N4_dev2=diff(diff(N4))

$$N1_dev2 = -\frac{6}{L^2} + \frac{12x}{L^3}$$

$$N2_dev2 = L(-4/L\text{^}2 \; + 6x/L\text{^}3\,)$$

$$N3_dev2 = \frac{6}{L^2} - \frac{12x}{L^3}$$

$$N4_dev2 = -\frac{2}{L} + \frac{6x}{L^2}$$

>> NN_VEC2=-[N1_dev2 N2_dev2 N3_dev2 N4_dev2]

$$NN_VEC2 = \left[\frac{6}{L^2} - \frac{12x}{L^3} \quad -L(-4/L\text{^}2 + 6x/L\text{^}3) \quad -\frac{6}{L^2} + \frac{12x}{L^3} \quad \frac{2}{L} - \frac{6x}{L^2}\right]$$

>> M1=-(E*I/(L^2))*(-NN_VEC2)*[0 ; 0 ; 3*q*(L^4)/(8*E*I); (1/2)*q*(L^3)/(E*I)]

$$M1 = \frac{3qL^2}{8}\left(\frac{12x}{L^3} - \frac{6}{L^2}\right) - \frac{qL}{2}\left(\frac{6x}{L^2} - \frac{2}{L}\right)$$

>> M1_x_0=subs(M1,x,0)

M1_x_0 =

-(5*q)/4

>> M1_x_L=subs(M1,x,L)

M1_x_L =

q/4

>> M2=-(E*I/(L^2))*(-NN_VEC2)*[3*q*(L^4)/(8*E*I) ; (1/2)*q*(L^3)/(E*I) ; ((2/3)*q*(L^4))/(E*I); 0]

$$M2 = \frac{7qL\text{^}2}{24}\left(\frac{12x}{L^3} - \frac{6}{L^2}\right) - \frac{qL^2}{2}\left(\frac{6x}{L^3} - \frac{4}{L^2}\right)$$

>> M2_x_0=subs(M2,x,0)

M2_x_0 =

q/4

>> M2_x_L=subs(M2,x,L)

M2_x_L =

(3*q)/4

KOD7-ÇUBUK ELEMAN RJİTLİK MATRİSİNİN HESABI

$$[k_e] = EI\int_0^{L/4}\begin{bmatrix}1 & 0 & -\frac{48}{L^2} & \frac{128}{L^3}\\ 0 & 1 & -\frac{8}{L} & \frac{16}{L^2}\\ 0 & 0 & \frac{48}{L^2} & -\frac{128}{L^3}\\ 0 & 0 & -\frac{4}{L} & \frac{16}{L^2}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0\\0\\-2\\-6x\end{bmatrix}[0 \quad 0 \quad -2 \quad -6x]\begin{bmatrix}1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0 & 0\\ -\frac{48}{L^2} & -\frac{8}{L} & \frac{48}{L^2} & -\frac{4}{L}\\ \frac{128}{L^3} & \frac{16}{L^2} & -\frac{128}{L^3} & \frac{16}{L^2}\end{bmatrix}$$

```
clear, clc
syms L
syms x
syms q
syms E
syms I
```

```
>> A4=[1 0 -48/L^2 128/L^3;0 1 -8/L 16/L^2;0 0 48/L^2 -128/L^3;0 0 -4/L 16/L^2]
```

$$A4 = \begin{bmatrix}1 & 0 & -\frac{48}{L^2} & \frac{128}{L^3}\\ 0 & 1 & -\frac{8}{L} & \frac{16}{L^2}\\ 0 & 0 & \frac{48}{L^2} & -\frac{128}{L^3}\\ 0 & 0 & -\frac{4}{L} & \frac{16}{L^2}\end{bmatrix}$$

>> B4=[0;0;-2;-6*x]

$$B4 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -2 \\ -6x \end{bmatrix}$$

>> C4=[0 0 -2 -6*x]

$$C4 = [0 \quad 0 \quad -2 \quad -6x]$$

>> D4=A4.'

$$D4 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\frac{48}{L^2} & -\frac{8}{L} & \frac{48}{L^2} & -\frac{4}{L} \\ \frac{128}{L^3} & \frac{16}{L^2} & -\frac{128}{L^3} & \frac{16}{L^2} \end{bmatrix}$$

>> kL_2=A4*B4*C4*D4

$$kL_2 = \begin{bmatrix} 768x\frac{\left(\frac{768x}{L^3}-\frac{96}{L^2}\right)}{L^3}-48\frac{\frac{1536x}{L^3}-\frac{192}{L^2}}{L^2} & 96x\frac{\left(\frac{768x}{L^3}-\frac{96}{L^2}\right)}{L^2}-8\frac{\frac{1536x}{L^3}-\frac{192}{L^2}}{L} & 48\frac{\left(\frac{1536x}{L^3}-\frac{192}{L^2}\right)}{L^2}-768x\frac{\frac{768x}{L^3}-\frac{96}{L^2}}{L^3} & 96x\frac{\left(\frac{768x}{L^3}-\frac{96}{L^2}\right)}{L^2}-4\frac{\frac{1536x}{L^3}-\frac{192}{L^2}}{L} \\ 768x\frac{\left(\frac{96x}{L^2}-\frac{16}{L}\right)}{L^3}-48\frac{\frac{192x}{L^2}-\frac{32}{L}}{L^2} & 96x\frac{\left(\frac{96x}{L^2}-\frac{16}{L}\right)}{L^2}-8\frac{\frac{192x}{L^2}-\frac{32}{L}}{L} & 48\frac{\left(\frac{192x}{L^2}-\frac{32}{L}\right)}{L^2}-768x\frac{\frac{96x}{L^2}-\frac{16}{L}}{L^3} & 96x\frac{\left(\frac{96x}{L^2}-\frac{16}{L}\right)}{L^2}-4\frac{\frac{192x}{L^2}-\frac{32}{L}}{L} \\ 48\frac{\left(\frac{1536x}{L^3}-\frac{192}{L^2}\right)}{L^2}-768x\frac{\frac{768x}{L^3}-\frac{96}{L^2}}{L^3} & 8\frac{\left(\frac{1536x}{L^3}-\frac{192}{L^2}\right)}{L}-96x\frac{\frac{768x}{L^3}-\frac{96}{L^2}}{L^2} & 768x\frac{\left(\frac{768x}{L^3}-\frac{96}{L^2}\right)}{L^3}-48\frac{\frac{1536x}{L^3}-\frac{192}{L^2}}{L^2} & 4\frac{\left(\frac{1536x}{L^3}-\frac{192}{L^2}\right)}{L}-96x\frac{\frac{768x}{L^3}-\frac{96}{L^2}}{L^2} \\ 768x\frac{\left(\frac{96x}{L^2}-\frac{8}{L}\right)}{L^3}-48\frac{\frac{192x}{L^2}-\frac{16}{L}}{L^2} & 96x\frac{\left(\frac{96x}{L^2}-\frac{8}{L}\right)}{L^2}-8\frac{\frac{192x}{L^2}-\frac{16}{L}}{L} & 48\frac{\left(\frac{192x}{L^2}-\frac{16}{L}\right)}{L^2}-768x\frac{\frac{96x}{L^2}-\frac{8}{L}}{L^3} & 96x\frac{\left(\frac{96x}{L^2}-\frac{8}{L}\right)}{L^2}-4\frac{\frac{192x}{L^2}-\frac{16}{L}}{L} \end{bmatrix}$$

>> INT_kL_2=E*I*int(kL_2,0,L/4)

$$kL_2 = \int_0^{L/4} \begin{bmatrix} 768x\frac{\left(\frac{768x}{L^3}-\frac{96}{L^2}\right)}{L^3}-48\frac{\frac{1536x}{L^3}-\frac{192}{L^2}}{L^2} & 96x\frac{\left(\frac{768x}{L^3}-\frac{96}{L^2}\right)}{L^2}-8\frac{\frac{1536x}{L^3}-\frac{192}{L^2}}{L} & 48\frac{\left(\frac{1536x}{L^3}-\frac{192}{L^2}\right)}{L^2}-768x\frac{\frac{768x}{L^3}-\frac{96}{L^2}}{L^3} & 96x\frac{\left(\frac{768x}{L^3}-\frac{96}{L^2}\right)}{L^2}-4\frac{\frac{1536x}{L^3}-\frac{192}{L^2}}{L} \\ 768x\frac{\left(\frac{96x}{L^2}-\frac{16}{L}\right)}{L^3}-48\frac{\frac{192x}{L^2}-\frac{32}{L}}{L^2} & 96x\frac{\left(\frac{96x}{L^2}-\frac{16}{L}\right)}{L^2}-8\frac{\frac{192x}{L^2}-\frac{32}{L}}{L} & 48\frac{\left(\frac{192x}{L^2}-\frac{32}{L}\right)}{L^2}-768x\frac{\frac{96x}{L^2}-\frac{16}{L}}{L^3} & 96x\frac{\left(\frac{96x}{L^2}-\frac{16}{L}\right)}{L^2}-4\frac{\frac{192x}{L^2}-\frac{32}{L}}{L} \\ 48\frac{\left(\frac{1536x}{L^3}-\frac{192}{L^2}\right)}{L^2}-768x\frac{\frac{768x}{L^3}-\frac{96}{L^2}}{L^3} & 8\frac{\left(\frac{1536x}{L^3}-\frac{192}{L^2}\right)}{L}-96x\frac{\frac{768x}{L^3}-\frac{96}{L^2}}{L^2} & 768x\frac{\left(\frac{768x}{L^3}-\frac{96}{L^2}\right)}{L^3}-48\frac{\frac{1536x}{L^3}-\frac{192}{L^2}}{L^2} & 4\frac{\left(\frac{1536x}{L^3}-\frac{192}{L^2}\right)}{L}-96x\frac{\frac{768x}{L^3}-\frac{96}{L^2}}{L^2} \\ 768x\frac{\left(\frac{96x}{L^2}-\frac{8}{L}\right)}{L^3}-48\frac{\frac{192x}{L^2}-\frac{16}{L}}{L^2} & 96x\frac{\left(\frac{96x}{L^2}-\frac{8}{L}\right)}{L^2}-8\frac{\frac{192x}{L^2}-\frac{16}{L}}{L} & 48\frac{\left(\frac{192x}{L^2}-\frac{16}{L}\right)}{L^2}-768x\frac{\frac{96x}{L^2}-\frac{8}{L}}{L^3} & 96x\frac{\left(\frac{96x}{L^2}-\frac{8}{L}\right)}{L^2}-4\frac{\frac{192x}{L^2}-\frac{16}{L}}{L} \end{bmatrix}$$

$$INT_kL_2 = \begin{bmatrix} \frac{768}{L^3} & \frac{96}{L^2} & -\frac{768}{L^3} & \frac{96}{L^2} \\ \frac{96}{L^2} & \frac{16}{L} & -\frac{96}{L^2} & \frac{8}{L} \\ -\frac{768}{L^3} & -\frac{96}{L^2} & \frac{768}{L^3} & -\frac{96}{L^2} \\ \frac{96}{L^2} & \frac{8}{L} & -\frac{96}{L^2} & \frac{16}{L} \end{bmatrix}$$

KOD8-GEOMETRİK YÜK MATRİSİNİN HESABI

ÇUBUK ELEMANI Ls=L/4 için

$$[n_e] = EI\int_0^{L/4} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -\frac{48}{L^2} & \frac{128}{L^3} \\ 0 & 1 & -\frac{8}{L} & \frac{16}{L^2} \\ 0 & 0 & \frac{48}{L^2} & -\frac{128}{L^3} \\ 0 & 0 & -\frac{4}{L} & \frac{16}{L^2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 2x \\ 3x^2 \end{bmatrix} [0 \quad 1 \quad 2x \quad 3x^2] \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\frac{48}{L^2} & -\frac{8}{L} & \frac{48}{L^2} & -\frac{4}{L} \\ \frac{128}{L^3} & \frac{16}{L^2} & -\frac{128}{L^3} & \frac{16}{L^2} \end{bmatrix}$$

clear, clc

syms L

syms x

>> A5= [1 0 -48/L^2 128/L^3;0 1 -8/L 16/L^2;0 0 48/L^2 -128/L^3;0 0 -4/L 16/L^2]

$$A5 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -\frac{48}{L^2} & \frac{128}{L^3} \\ 0 & 1 & -\frac{8}{L} & \frac{16}{L^2} \\ 0 & 0 & \frac{48}{L^2} & -\frac{128}{L^3} \\ 0 & 0 & -\frac{4}{L} & \frac{16}{L^2} \end{bmatrix}$$

>>B5=[0;1;2*x;3*x^2]

$$B5 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 2x \\ 3x^2 \end{bmatrix}$$

>> C5=[0 1 2*x 3*x^2]

$$C5 = [0 \quad 1 \quad 2x \quad 3x^2]$$

>> D5=[1 0 -48/L^2 128/L^3;0 1 -8/L 16/L^2;0 0 48/L^2 -128/L^3;0 0 -4/L 16/L^2]'

$$D5 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\frac{48}{L^2} & -\frac{8}{L} & \frac{48}{L^2} & -\frac{4}{L} \\ \frac{128}{L^3} & \frac{16}{L^2} & -\frac{128}{L^3} & \frac{16}{L^2} \end{bmatrix}$$

>> nL=A5*B5*C5*D5

$$\mathrm{nL} = \begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} & k_{13} & k_{14} \\ k_{21} & k_{22} & k_{23} & k_{24} \\ k_{31} & k_{32} & k_{33} & k_{34} \\ k_{41} & k_{41} & k_{43} & k_{44} \end{bmatrix}$$

$$k_{11} = \frac{96x\left(\frac{96x}{L^2} - \frac{9384x^2}{L^3}\right)}{L^2} - \frac{384x^2\left(\frac{96x}{L^2} - \frac{384x^2}{L^3}\right)}{L^3}$$

$$k_{12} = \frac{384x^2}{L^3} - \frac{96x}{L^2} + \frac{16x\left(\frac{96x}{L^2} - \frac{384x^2}{L^3}\right)}{L} - \frac{48x^2\left(\frac{96x}{L^2} - \frac{384x^2}{L^3}\right)}{L^2}$$

$$k_{13} = \frac{384x^2\left(\frac{96x}{L^2} - \frac{384x^2}{L^3}\right)}{L^2} - \frac{96x\left(\frac{96x}{L^2} - \frac{384x^2}{L^3}\right)}{L^2}$$

$$k_{14} = \frac{8x\left(\frac{96x}{L^2} - \frac{384x^2}{L^3}\right)}{L} - \frac{48x^2\left(\frac{96x}{L^2} - \frac{384x^2}{L^3}\right)}{L^2}$$

$$k_{21} = \frac{384x^2\left(\frac{48x^2}{L^2} - \frac{16x}{L} + 1\right)}{L^3} - \frac{96x\left(\frac{48x^2}{L^2} - \frac{16x}{L} + 1\right)}{L^2}$$

$$k_{22} = \frac{48x^2}{L^2} - \frac{16x}{L} - \frac{16x\left(\frac{48x^2}{L^2} - \frac{16x}{L} + 1\right)}{L} + \frac{48x^2\left(\frac{48x^2}{L^2} - \frac{16x}{L} + 1\right)}{L^2} + 1$$

$$k_{23} = \frac{96x\left(\frac{48x^2}{L^2} - \frac{16x}{L} + 1\right)}{L^2} - \frac{384x^2\left(\frac{48x^2}{L^2} - \frac{16x}{L} + 1\right)}{L^3}$$

$$k_{24} = \frac{48x^2\left(\frac{48x^2}{L^2} - \frac{16x}{L} + 1\right)}{L^2} - \frac{8x\left(\frac{48x^2}{L^2} - \frac{16x}{L} + 1\right)}{L}$$

$$k_{31} = \frac{384x^2\left(\frac{96x}{L^2} - \frac{384x^2}{L^3}\right)}{L^3} - \frac{96x\left(\frac{96x}{L^2} - \frac{384x^2}{L^3}\right)}{L^2}$$

$$k_{32} = \frac{96x}{L^2} - \frac{384x^2}{L^3} - \frac{16x\left(\frac{96x}{L^2} - \frac{384x^2}{L^3}\right)}{L} + \frac{48x^2\left(\frac{96x}{L^2} - \frac{384x^2}{L^3}\right)}{L^2}$$

$$k_{33} = \frac{96x\left(\frac{96x}{L^2} - \frac{384x^2}{L^3}\right)}{L^2} - \frac{384x^2\left(\frac{96x}{L^2} - \frac{384x^2}{L^3}\right)}{L^3}$$

$$k_{34} = \frac{48x^2\left(\frac{96x}{L^2} - \frac{384x^2}{L^3}\right)}{L^2} - \frac{8x\left(\frac{96x}{L^2} - \frac{384x^2}{L^3}\right)}{L}$$

$$k_{41} = \frac{96x\left(\frac{8x}{L} - \frac{48x^2}{L^2}\right)}{L^2} - \frac{384x^2\left(\frac{8x}{L} - \frac{48x^2}{L^2}\right)}{L^3}$$

$$k_{42} = \frac{48x^2}{L^2} - \frac{8x}{L} + \frac{16x\left(\frac{8x}{L} - \frac{48x^2}{L^2}\right)}{L} - \frac{48x^2\left(\frac{8x}{L} - \frac{48x^2}{L^2}\right)}{L^2}$$

$$k_{43} = \frac{384x^2\left(\frac{8x}{L} - \frac{48x^2}{L^2}\right)}{L^3} - \frac{96x\left(\frac{8x}{L} - \frac{48x^2}{L^2}\right)}{L^2}$$

$$k_{44} = \frac{8x\left(\frac{8x}{L} - \frac{48x^2}{L^2}\right)}{L} - \frac{48x^2\left(\frac{8x}{L} - \frac{48x^2}{L^2}\right)}{L^2}$$

>> INT_nL=int(nL,0,L/4)

$$\text{INT_nL} = \int_0^{L/4} \begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} & k_{13} & k_{14} \\ k_{21} & k_{22} & k_{23} & k_{24} \\ k_{31} & k_{32} & k_{33} & k_{34} \\ k_{41} & k_{41} & k_{43} & k_{44} \end{bmatrix}$$

$$\text{INT_nL} = \begin{bmatrix} \frac{24}{5L} & \frac{1}{10} & -\frac{24}{5L} & \frac{1}{10} \\ \frac{1}{10} & \frac{L}{30} & -\frac{1}{10} & -\frac{L}{120} \\ -\frac{24}{5L} & -\frac{1}{10} & \frac{24}{5L} & -\frac{1}{10} \\ \frac{1}{10} & -\frac{L}{120} & -\frac{1}{10} & \frac{L}{30} \end{bmatrix}$$

KOD9 -GEOMETRİK YÜK MATRİSİNİN HESABI

ÇUBUK ELEMANI Ls=1 m. için

$$[n_e] = EI\int_0^1 \begin{bmatrix} 1 & 0 & -3 & 2 \\ 0 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 3 & -2 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 2x \\ 3x^2 \end{bmatrix} [0 \quad 1 \quad 2x \quad 3x^2] \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -3 & -2 & 3 & -1 \\ 2 & 1 & -2 & 1 \end{bmatrix}$$

```
clear, clc
syms L
syms x
```

```
>> A6=[1 0 0 0;0 1 0 0;-3 -2 3 -1;2 1 -2 1].'
```

$$A6 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -3 & 2 \\ 0 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 3 & -2 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

```
>>B6=[0;1;2*x;3*x^2]
```

$$B6 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 2x \\ 3x^2 \end{bmatrix}$$

```
>> C6=[0 1 2*x 3*x^2]
```

$$C6 = [0 \quad 1 \quad 2x \quad 3x^2]$$

```
>> D6=[1 0 0 0;0 1 0 0;-3 -2 3 -1;2 1 -2 1].'
```

$$D6 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -3 & -2 & 3 & -1 \\ 2 & 1 & -2 & 1 \end{bmatrix}$$

```
>> nL_2=A6*B6*C6*D6
```

$$\text{nL_2} = \begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} & k_{13} & k_{14} \\ k_{21} & k_{22} & k_{23} & k_{24} \\ k_{31} & k_{32} & k_{33} & k_{34} \\ k_{41} & k_{41} & k_{43} & k_{44} \end{bmatrix}$$

$k_{11} = 0$

$k_{12} = 6x^2 - 6x$

$k_{13} = 12x - 6x(-6x^2 + 6x) + 3x^2(-6x^2 + 6x) - 12x^2$

$k_{14} = 4x(-6x^2 + 6x) - 6x - 3x^2(-6x^2 + 6x) + 6x^2$

$k_{21} = 0$

$k_{22} = 3x^2 - 4x + 1$

$k_{23} = 8x + 6x(3x^2 - 4x + 1) - 3x^2(3x^2 - 4x + 1) - 6x^2 - 2$

$k_{24} = 3x^2(3x^2 - 4x + 1) - 4x(3x^2 - 4x + 1) - 4x + 3x^2 + 1$

$k_{31} = 0$

$k_{32} = -6x^2 + 6x$

$k_{33} = 6x(-6x^2 + 6x) - 12x - 3x^2(-6x^2 + 6x) + 12x^2$

$k_{34} = 6x - 4x(-6x^2 + 6x) + 3x^2(-6x^2 + 6x) - 6x^2$

$k_{41} = 0$

$k_{42} = 3x^2 - 2x$

$k_{43} = 4x - 6x(-3x^2 + 2x) + 3x^2(-3x^2 + 2x) - 6x^2$

$k_{44} = 4x(-3x^2 + 2x) - 2x - 3x^2(-3x^2 + 2x) + 3x^2$

>> INT_nL_2=int(nL_2,0,1)

$$\text{INT_nL_2} = \int_0^1 \begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} & k_{13} & k_{14} \\ k_{21} & k_{22} & k_{23} & k_{24} \\ k_{31} & k_{32} & k_{33} & k_{34} \\ k_{41} & k_{41} & k_{43} & k_{44} \end{bmatrix}$$

$$INT_nL_2 = \begin{bmatrix} 0 & -1 & -\frac{1}{10} & \frac{1}{10} \\ 0 & 0 & -\frac{3}{10} & \frac{2}{15} \\ 0 & 1 & \frac{1}{10} & -\frac{1}{10} \\ 0 & 0 & \frac{1}{5} & -\frac{1}{30} \end{bmatrix}$$