# Normal Kuvvet, Kesme ve Eğilme Momenti

Katı (rijit) bir cismin dengesi için aşağıdaki denklemlerin (şartların) gerçekleşmesi gerekir:

$$\sum \vec{F} = 0 \quad ; \quad \sum \vec{M} = 0$$

Kartezyen koordinat sisteminde bu denklemler:

$$\sum F_x = 0 \quad ; \quad \sum M_x = 0$$

$$\sum F_y = 0 \quad ; \quad \sum M_y = 0$$

$$\sum F_z = 0 \quad ; \quad \sum M_z = 0$$

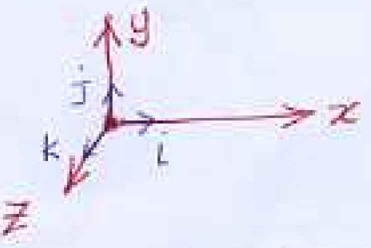
Düzlem halde

$$\sum F_x = 0$$

$$\sum F_y = 0$$

$$\sum M_z = 0$$

yeterlidir.

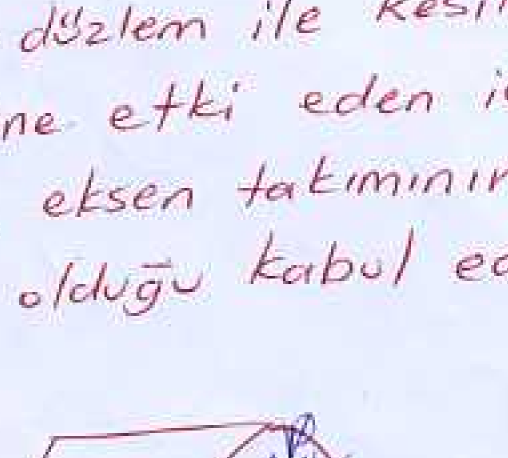



Kartezyen koordinat sistemine göre pozitif yön kabulü.

Orjin olarak herhangi bir nokta seçilebilir. Genellikle, kirişin sol ucuna ve kesit alan (ağırlık) merkezine yerleştirilir.

Bir düzlem ile kesildiği varsayılan çubuk kesitine etki eden iç kuvvetlerin pozitif yönü, eksen takımının pozitif yönüyle aynı olduğu kabul edilir.

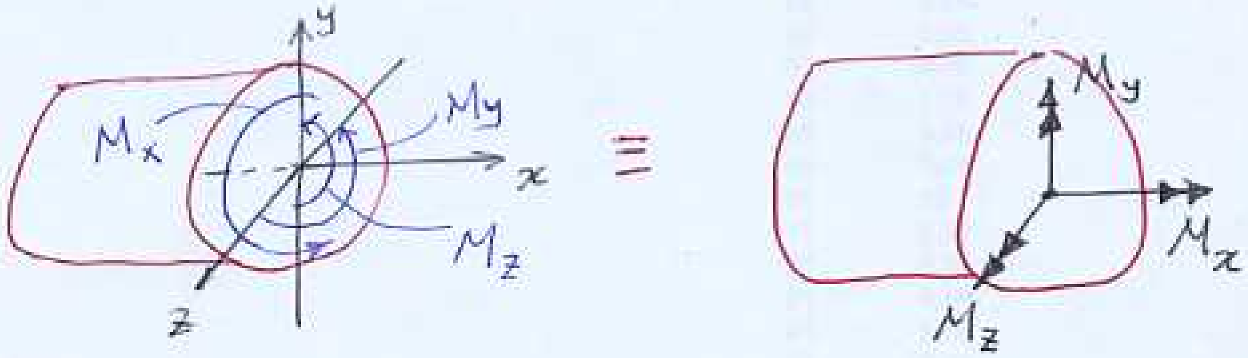
$$\vec{P} = P_x \vec{i} + P_y \vec{j} + P_z \vec{k}$$



Çubuğun geri kalan tarafındaki yüzeye etki eden (bu kısmı dengede tutacak olan) kuvvetler koordinat eksenlerinin pozitif yönüne ters yönde etki eder.

Moment ise benzer şekilde:

$$\vec{M} = M_x \vec{i} + M_y \vec{j} + M_z \vec{k}$$

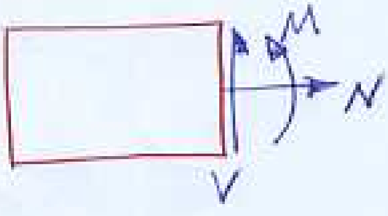



$M_x = T$ (Tork) Burulma momenti

$M_y = M_{yy}$ (Eğilme momenti)

$M_z = M_{zz}$ (Eğilme momenti)

Düzlem hal için:




Burada $M = M_z = M_{zz}$ (eğilme momenti)

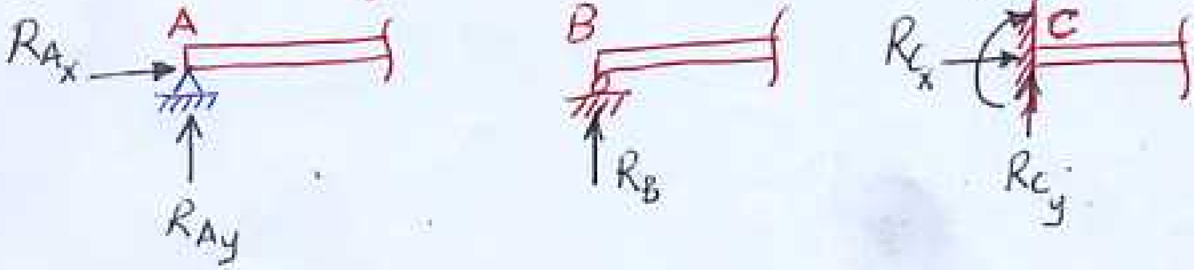
V (veya Q) kesme kuvveti

N (veya T) normal kuvvet

<u>Mesnetler</u>

Basit mesnetler

Ankastre mesnet

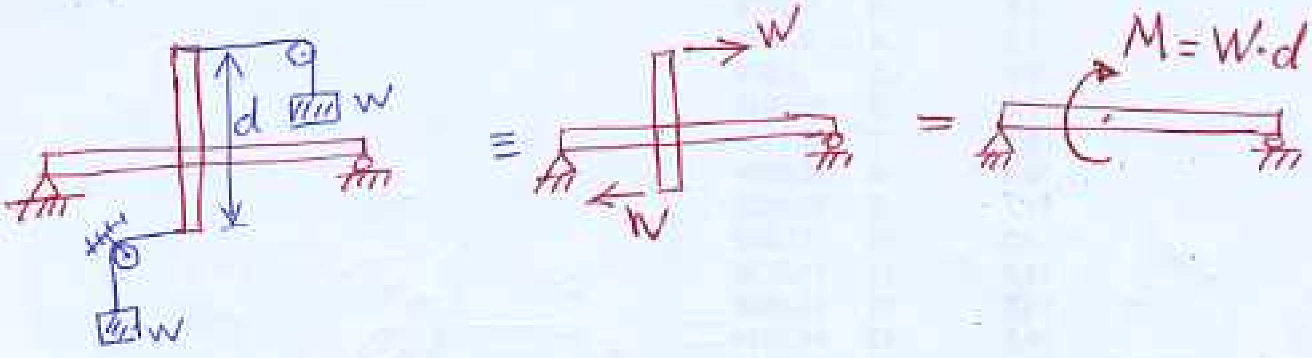


# Yükler

Tekil yük (konsantre)

Yayılı yük (düzgün veya değişken)

Tekil moment

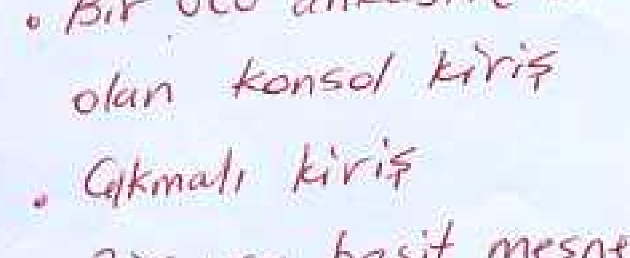


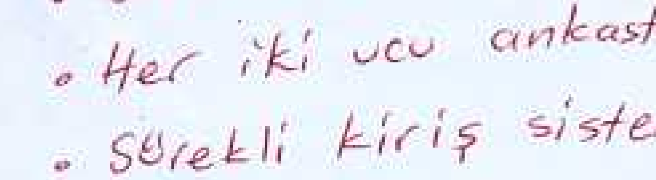

# Kirişler

- Basit mesnetli kiriş
- Bir ucu ankastre mesnetli diğer ucu boşta olan konsol kiriş
- Çıkmalı kiriş
- Bir ucu basit mesnetli diğer ucu ankastre mes.
- Her iki ucu ankastre mesnetli
- Sürekli kiriş sistemi

Mesnetlerde Reaksiyon Kuvvetlerinin Hesaplanması

Örnek 1




$\Sigma F_x = 0 \Rightarrow R_{Ax} = 0$

$+\uparrow \Sigma F_y = 0 \Rightarrow R_{Ay} + R_B - 50 - 80 = 0$

$R_{Ay} + R_B = 130 \quad \ldots [1]$

$+\circlearrowleft \Sigma M_A = 0 \Rightarrow 2500 + 50 \cdot 25 + 80 \cdot 37{,}5 - R_B \cdot 50 = 0 \quad \ldots [2]$

$R_B = 135\,[N]$

$R_{Ay} + R_B = 130$

$R_{Ay} + 135 = 130 \quad \Rightarrow R_{Ay} = -5\,[N]$

Yani $R_{Ay}$'nin yönü öngördüğümüzün tersidir.

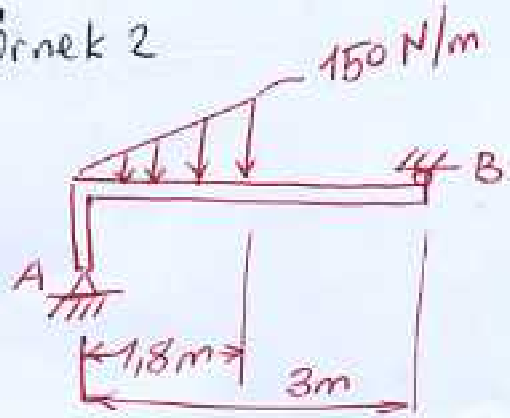
Kontrol için, mesela, B noktasına göre moment alıp, $\sum M_B \overset{?}{=} 0$ olup olmadığını kontrol edelim:

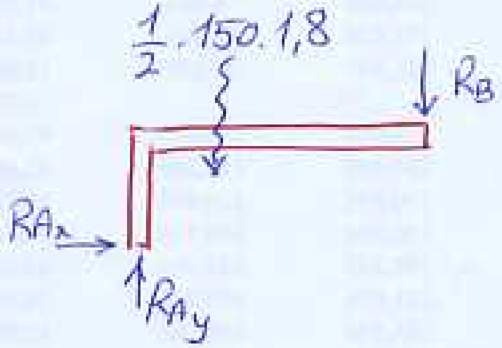
$$+\curvearrowleft \sum M_B \overset{?}{=} 0 \Rightarrow -5 \cdot 50 + 2500 - 50 \cdot 25 - 80 \cdot 12{,}5 \overset{?}{=} 0$$

$$-250 + 2500 - 1250 - 1000 \overset{?}{=} 0$$

$$0 = 0 \checkmark$$

Örnek 2




$\overset{+}{\rightarrow} \sum F_x = 0 \Rightarrow R_{Ax} = 0 \quad \dots [1]$

$+\uparrow \sum F_y = 0 \Rightarrow R_{Ay} - 135 - R_B = 0$

$\curvearrowleft + \sum M_A = 0 \Rightarrow 135 \cdot 1{,}2 + R_B \cdot 3 = 0$

$R_B = -54\,[N]$

$R_{Ay} - 135 - (-54) = 0$

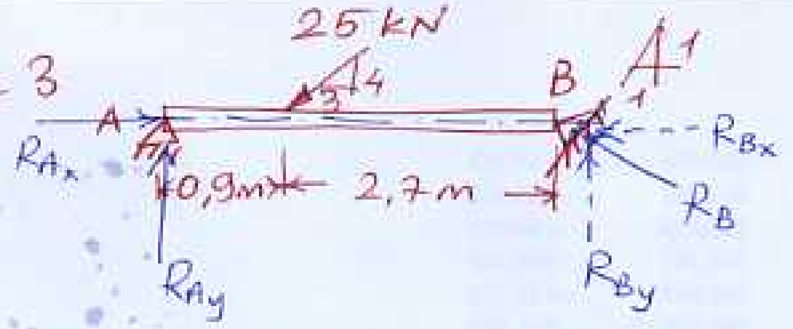
$R_{Ay} = 81\,[N]$

Kontrol için : $\curvearrowleft + \sum M_B \overset{?}{=} 0$

$81 \cdot 3 - 135\,(0{,}6 + 1{,}2) = 0$

$243 - 243 = 0 \checkmark$

örnek 3




$$R_{Bx} = R_{By} = \frac{\sqrt{2}}{2} R_B$$

$\xrightarrow{+} \Sigma F_x = 0 \Rightarrow R_{Ax} - R_{Bx} - 15 = 0 \quad \ldots [1]$

$+\uparrow \Sigma F_y = 0 \Rightarrow R_{Ay} - 20 + R_{By} = 0 \quad \ldots [2]$

$\circlearrowleft + \Sigma M_A = 0 \Rightarrow 20 \cdot 0,9 - R_{By} \cdot 3,6 = 0 \Rightarrow R_{By} = 5 [kN]$

[2] nolu denklemde yerine konursa:

$R_{Ay} - 20 + 5 = 0 \Rightarrow R_{Ay} = 15 [kN]$

$R_{By} = R_{Bx}$ olduğundan $R_{Bx} = 5 [kN]$

Bunu [1] nolu denklemde yerine koyarak:

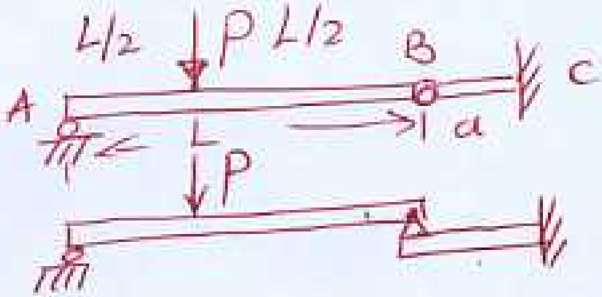
$R_{Ax} - 5 - 15 = 0 \Rightarrow R_{Ax} = 20 [kN]$

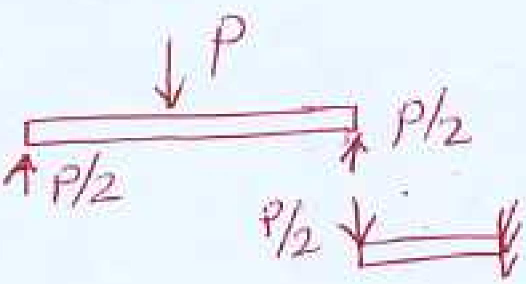
Kontrol için $\circlearrowleft + \Sigma M_B \overset{?}{=} 0$

$15 \cdot 3,6 - 20 \cdot 2,7 \overset{?}{=} 0 \Rightarrow 54,0 - 54,0 = 0$ ✓

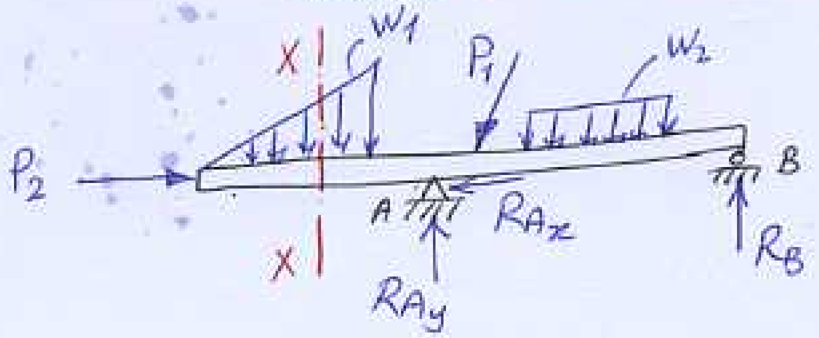
## MAFSALLI (Menteşeli) KİRİŞLER

Bir mafsal sadece yatay ve düşey kuvvetleri taşıyabilir. Mafsallı bileşim noktaları moment iletemezler. Bu tip kirişlerde mesnet tepkilerini bulmak üzere, kirişi parçalara ayırmanın en uygun olduğu yerler mafsallardır.



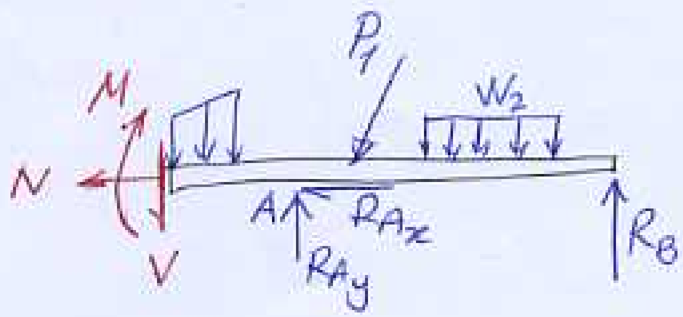



# NORMAL KUVVET, KESME KUVVETİ ve EĞİLME MOMENTİ DİYAGRAMLARI




Şekildeki gibi yükler etkisinde bir kiriş düşünelim. Mesnetlerdeki reaksiyon kuvvetlerinin de hesaplandığını kabul edelim.

Kiriş eksenine dik herhangi bir X-X kesitiyle bu kirişi ikiye ayırdığımızı düşünelim. Bu parçalardan her biri serbest bir cisim olarak düşünülebilir.


Her bir parçanın ayrı ayrı dengede bulunması gerekir.

$\sum F_y = 0$ denge şartını sağlayan düşey bir V (veya Q) iç kuvveti bulunması lazımdır.

Bu kuvvete (V) kesme veya kesme kuvveti denir.

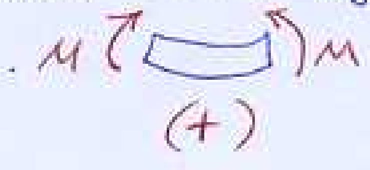
Benzer şekilde $\sum F_x = 0$ denge şartını sağlamak üzere kesit düzlemine dik doğrultuda bir normal kuvvet bulunması lazım gelebilir. Eğer bu yatay N (veya T) kuvveti kesit içerisine doğru yönelmişse basınç, kesitten dışarı doğru yönelmişse çekme diye adlandırılır.

Son olarak dengenin sağlanabilmesi için $\sum M_z = 0$ denkleminin de sağlanması gereklidir. Parçaya etki eden dış kuvvetlerin meydana getirdiği momenti dengeleyecek iç mukavemet momenti olmalıdır.

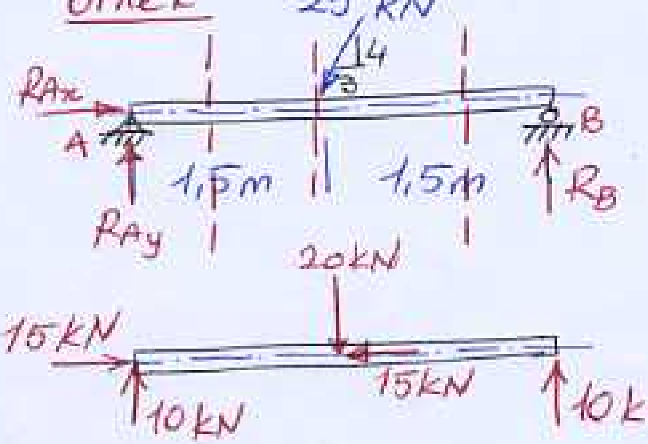
Bu tip momentler kiriş elemanını yükleme düzlemi içerisinde eğmeye çalışacaklarından bunlara eğilme momenti denir.

- Konveks (su taşıran) veya konkav (su taşıyan)


Eğilme momenti için işaret kabulü



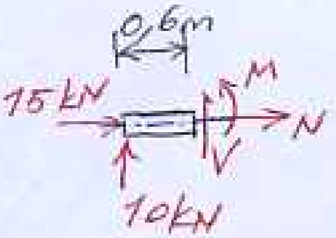

Örnek




Çeşitli mesafelerde kirişi kesip ayırdığımızı varsayarak kirişe etki eden iç kuvvetlerin (V, N ve M) dağılımını bulmak mümkündür.

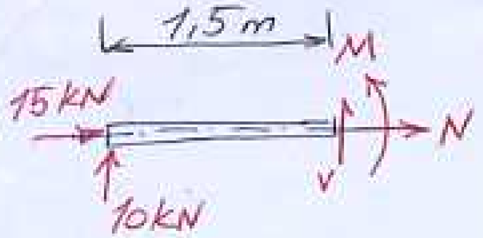
Kesit aldığımız her bir noktada denge şartlarını ($\Sigma F_x = 0$ ; $\Sigma F_y = 0$ ve $\Sigma M_z = 0$) uygulayarak bilinmeyen iç kuvvetleri (N, V ve M) bulabiliriz.

a)

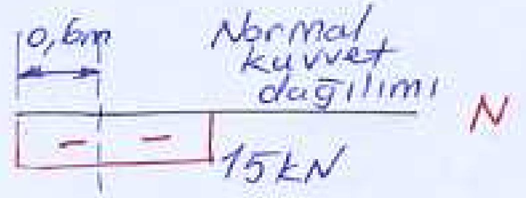


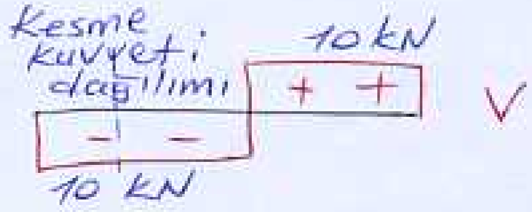

N = −15 kN
V = −10 kN
M = 6 kNm

b)

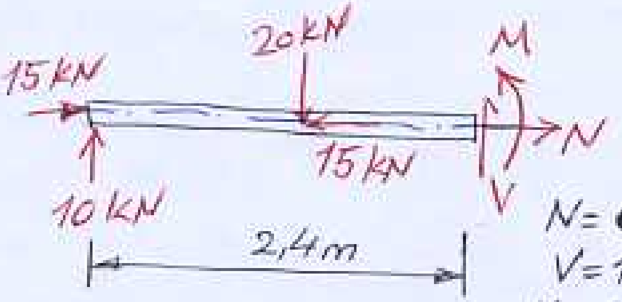



N = −15 kN
V = −10 kN
M = 15 kNm

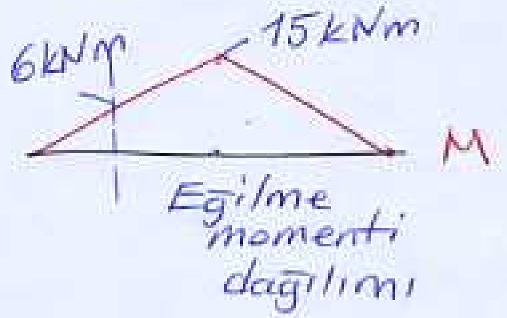



c)

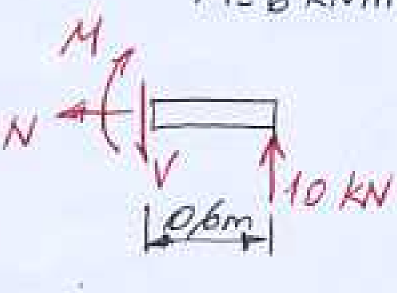



N = 0
V = 10 kN
M = 6 kNm

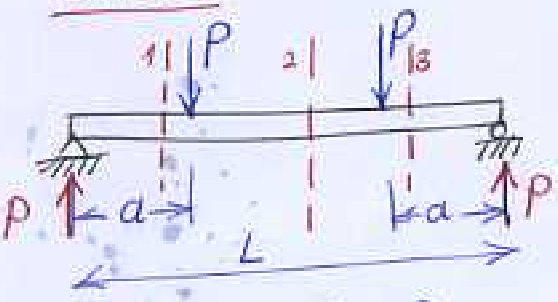



d)

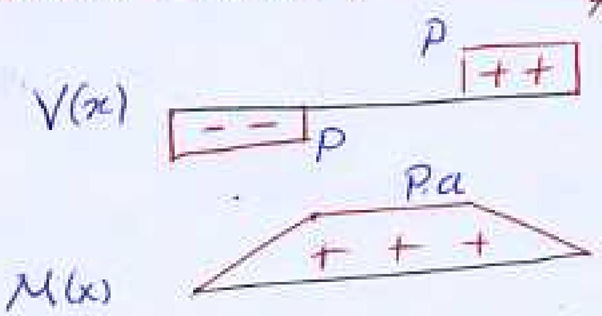
N = 0
V = 10 kN
M = 6 kNm

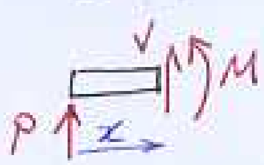


## örnek:



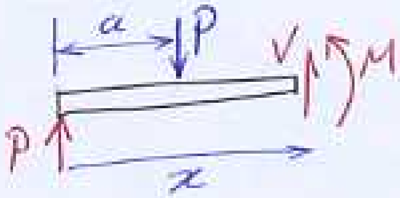

BASİT EĞİLME (Kesme kuvveti yok!)




1) 

$V = -P$

$M = Px$

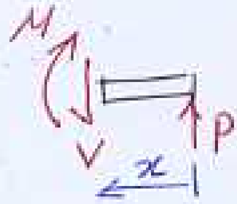
2) 

$V = 0$

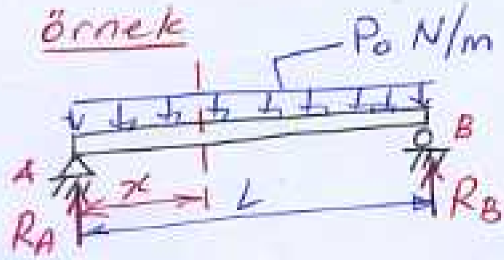
$M = Pa$

3) $V = P$

$M = P.x$



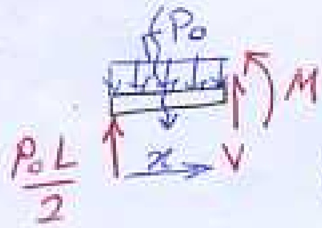
## örnek




$+\uparrow \sum F_y = 0 \Rightarrow R_A + R_B - P_0.L = 0$

$\circlearrowleft + \sum M_A = 0 \Rightarrow P_0.L.L/2 - R_B.L = 0$

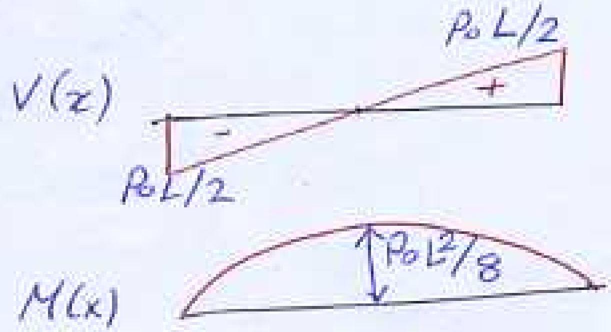
$R_B = P_0.L/2 \Rightarrow R_A = P_0.L/2$



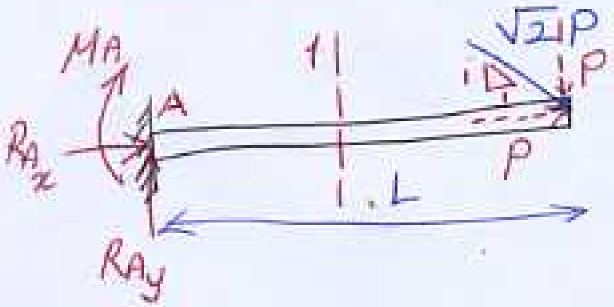

$\uparrow \sum F_y = 0 \Rightarrow \frac{P_0 L}{2} - P_0.x + V = 0 \Rightarrow V = P_0\left(x - \frac{L}{2}\right)$

$\circlearrowleft + \sum M = 0 \Rightarrow + \frac{P_0.L}{2}.x - P_0.x.\frac{x}{2} - M = 0$

$M = -\frac{P_0.x}{2}(x - L)$



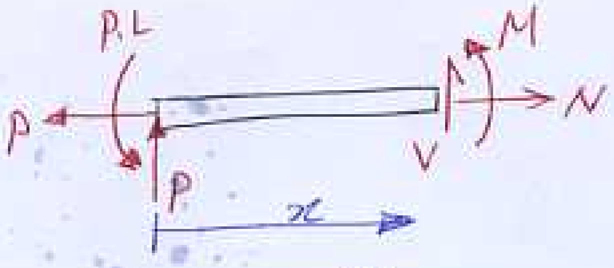

## örnek




$+\rightarrow \sum F_x = 0 \Rightarrow R_{Ax} + P = 0 \Rightarrow R_{Ax} = -P$

$+\uparrow \sum F_y = 0 \Rightarrow R_{A_y} - P = 0 \Rightarrow R_{Ay} = P$

$\circlearrowleft + \sum M_A = 0 \Rightarrow M_A + P.L = 0 \Rightarrow M_A = -P.L$

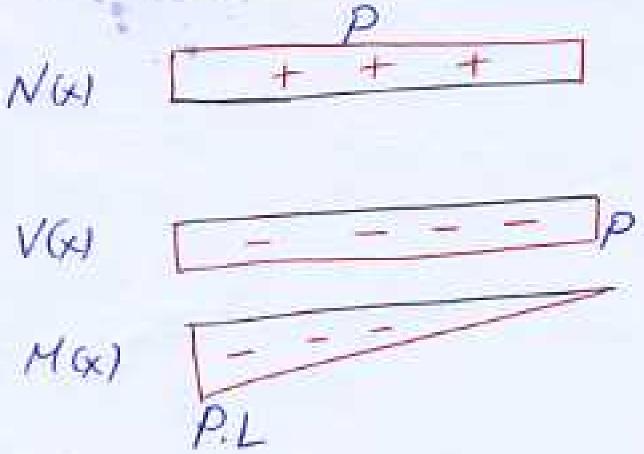



$\overset{+}{\rightarrow} \sum F_x = 0 \Rightarrow -P + N = 0 \Rightarrow N = P$

$+\uparrow \sum F_y = 0 \Rightarrow P + V = 0 \Rightarrow V = -P$

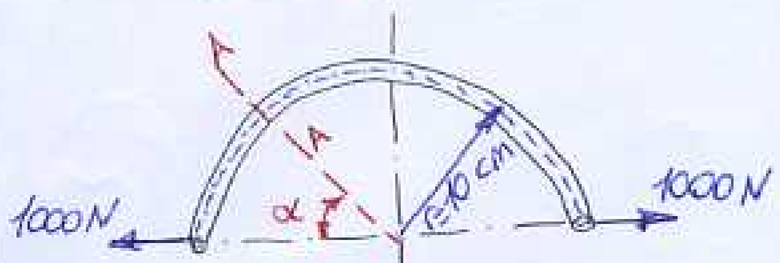
$\curvearrowleft \sum M = 0 \Rightarrow P.x - P.L - M = 0$

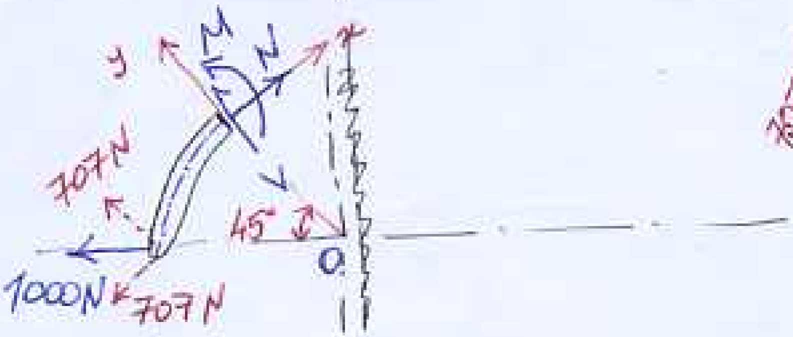
$M = P(x - L)$

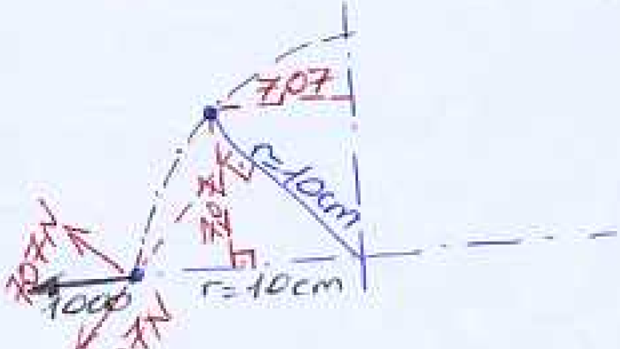



örnek

$\alpha = 45°$ olması halinde A-A kesitindeki iç kuvve leri hesaplayın!



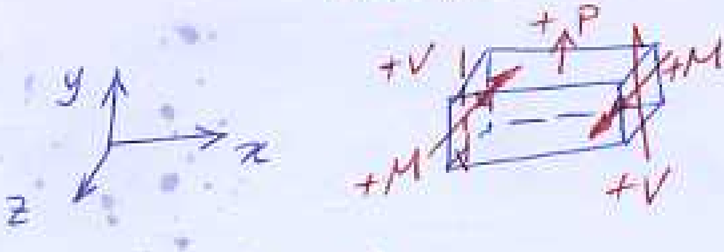

Maksimum eğilme momentini bulunuz!

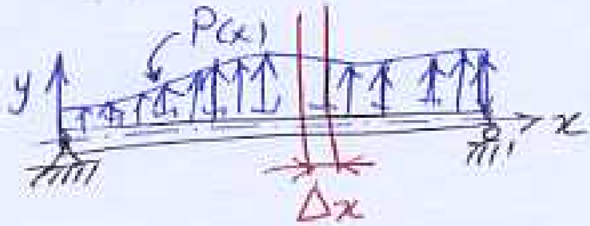
$\sum F_x = 0 \Rightarrow N = 707\ N$

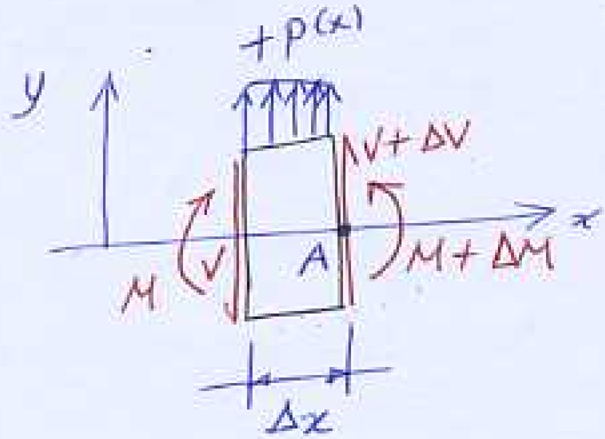
$\sum F_y = 0 \Rightarrow V = -707\ N$

$\sum M = 0 \Rightarrow M = 7070\ N.cm$

# KESME KUVVETİ ve EĞİLME MOMENTİNİ BULMAK ÜZERE TOPLAMA YÖNTEMİ




$$+\uparrow \sum F_y = 0 \Rightarrow -V + p.\Delta x + V + \Delta V = 0 \Rightarrow \frac{\Delta V}{\Delta x} = -p \quad \cdots [1]$$

$$\stackrel{\curvearrowleft}{+} \sum M_A = 0 \Rightarrow M - M - \Delta M - V.\Delta x + P.\Delta x.\frac{\Delta x}{2} = 0 \quad [2]$$

$$\frac{\Delta M}{\Delta x} = -V + p\,\frac{\Delta x}{2} \quad \cdots [2]$$

$\Delta x \to 0$ (sıfıra yaklaşırken)

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta V}{\Delta x} \equiv \frac{dV}{dx} = -P \quad \cdots [3]$$ (Türevin limit tanımı!)

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta M}{\Delta x} = \frac{dM}{dx} = -V \quad \cdots [4]$$

[4]'ü [3]'te kullanarak;

$$-p = \frac{dV}{dx} = \frac{d}{dx}(V) = \frac{d}{dx}\left(-\frac{dM}{dx}\right) = -\frac{d^2M}{dx^2} \Rightarrow \frac{d^2M}{dx^2} = p \quad \cdots [5]$$

— • —

yine [3]'ten $\quad \frac{dV}{dx} = -p$

$$dV = -p\,dx$$

$$V = -\int p\,dx + C_1$$

[4]'ten $\Rightarrow$ $\dfrac{dM}{dx} = -V$

$$dM = -V\,dx$$

$$M = -\int V\,dx + C_2$$

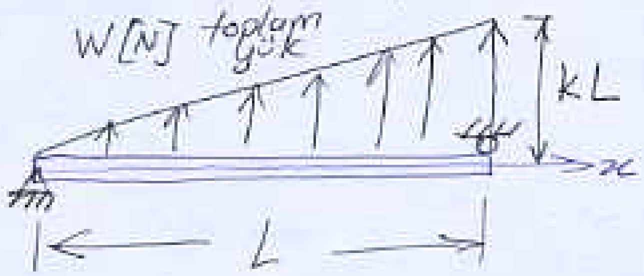
veya [5]'ten $\Rightarrow$ $\dfrac{d^2M}{dx^2} = p$

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{dM}{dx}\right) = p \Rightarrow d\left(\frac{dM}{dx}\right) = p\,dx$$

$$\frac{dM}{dx} = \int p\,dx + C_1$$

$$M = \iint p\,dx\,dx + C$$

örnek 2.11 (s.45)




$W = \frac{1}{2} \cdot L \cdot kL$

$p = kx$ ; $k = \dfrac{2W}{L^2}$

$p = \dfrac{2W}{L^2}x$

$$\frac{d^2M}{dx^2} = p = kx = \frac{2W}{L^2}x$$

Eşitliğin her iki tarafında integral alınırsa;

$$\frac{dM}{dx} = \frac{1}{2}kx^2 + C_1$$

Bir kez daha integral alınırsa

$$M = \frac{1}{6} k x^3 + C_1 x + C_2$$

Sınır şartları yardımıyla $(M(0) = M(L) = 0)$

$M(0) = 0 \Rightarrow C_2 = 0$

$M(L) = 0 \Rightarrow kL^3/6 + C_1 . L = 0 \Rightarrow C_1 = -kL^2/6$

$$M = \frac{1}{6} k x^3 - \frac{1}{6} k L^2 x = \underline{\underline{\frac{1}{6} k x (x^2 - L^2)}}$$

$\frac{dM}{dx} = -V$ idi. $\Rightarrow$ Moment ifadesinin türevini alırsak:

$$\frac{3}{6} k x^2 - \frac{1}{6} k L^2 = -V \Rightarrow \underline{\underline{V = \frac{1}{6} k (L^2 - 3x^2)}}$$

Maksimum moment $\frac{dM}{dx} = 0$ sağlayan noktada oluşacaktır:

$k x^2/2 - kL^2/6 = 0$

$\frac{k}{6}(3x^2 - L^2) = 0$

$(\sqrt{3} x - L)(\sqrt{3} x + L) = 0$

$\underline{x_1 = L/\sqrt{3}}$ ve $x_2 = -L/\sqrt{3}$

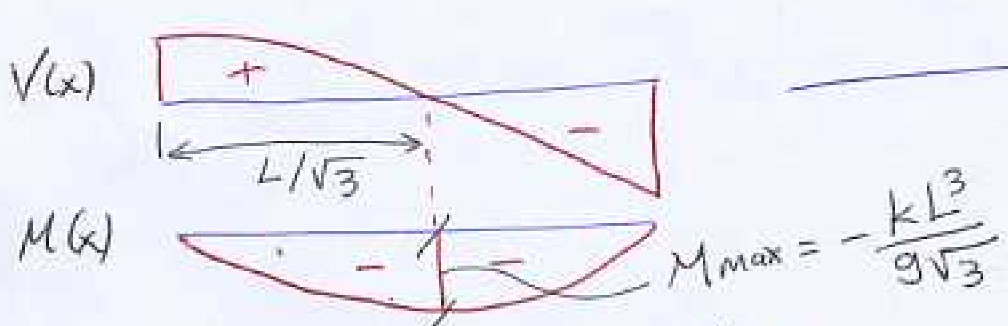
$x_1 = L/\sqrt{3}$ değerini moment ifadesinde yerine koyarak

$M_{max} = -kL^3/(9\sqrt{3})$

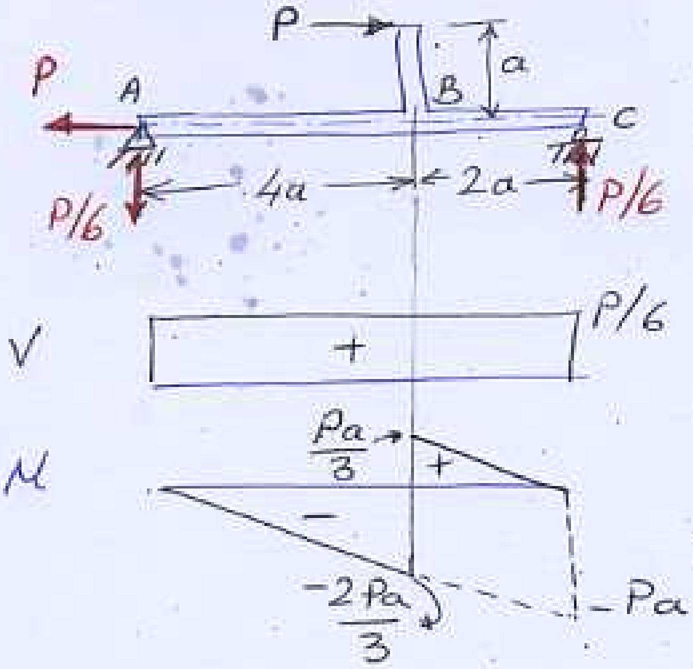
bulunur.

Dikkat edilirse mesnet reaksiyonlarını bulmaya gerek kalmadan sonuca ulaşılabildi.

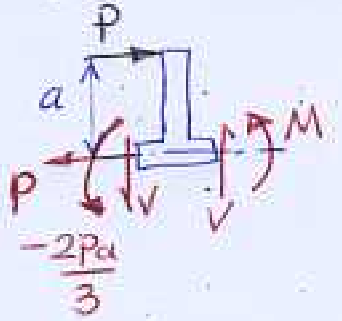
$V(0) = kL^2/6$ ; $V(L) = -kL^2/3$



Tekil moment olması durumunda dikkat!




B noktasında



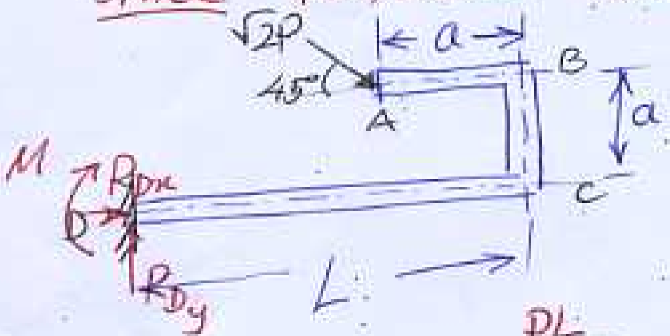

$M = -\frac{Pa}{3}$

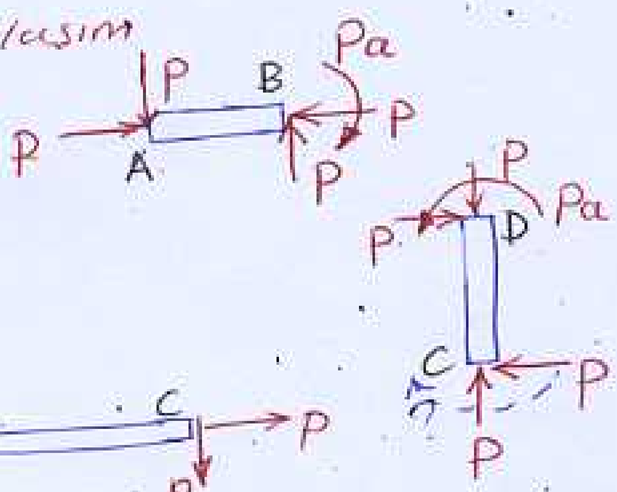
ters işaretlisi

$M = \frac{Pa}{3}$

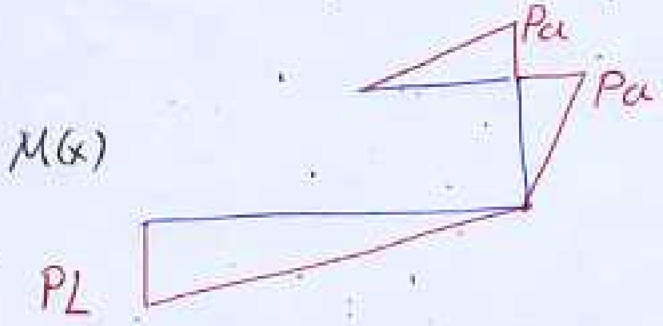
V'yi Toplamaya devam ederek ve sınır şartlarına uyarak moment diyagramı tamamlanır.

Örnek çerçeveler için yaklaşım








ödev N(x), V(x) ?

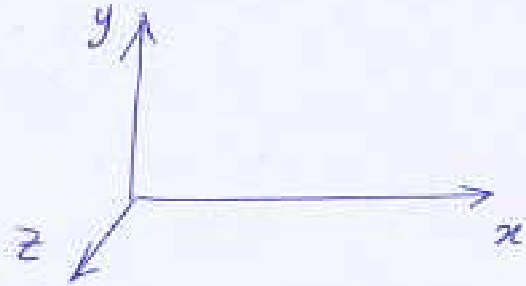
Konuyla ilgili çeşitli problemler ödev olarak bırakılacak!

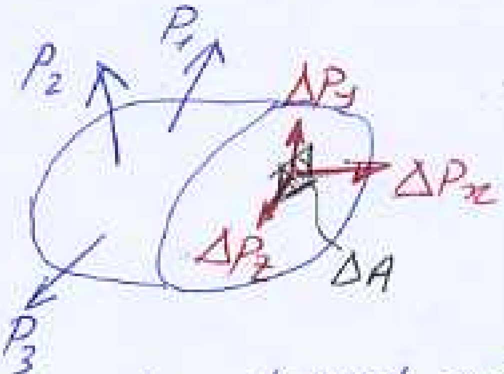
# GERİLME (Eksenel yükler altında)

Gerilmenin matematiksel tanımı:

$$\tau_{xx} = \lim_{\Delta A \to 0} \frac{\Delta P_x}{\Delta A} \; ; \; \tau_{xy} = \lim_{\Delta A \to 0} \frac{\Delta P_y}{\Delta A} \; ; \; \tau_{xz} = \lim_{\Delta A \to 0} \frac{\Delta P_z}{\Delta A}$$

İlk indis x eksenine dik olan düzlemi, ikinci indis ise gerilme bileşeninin yönünü gösterir.

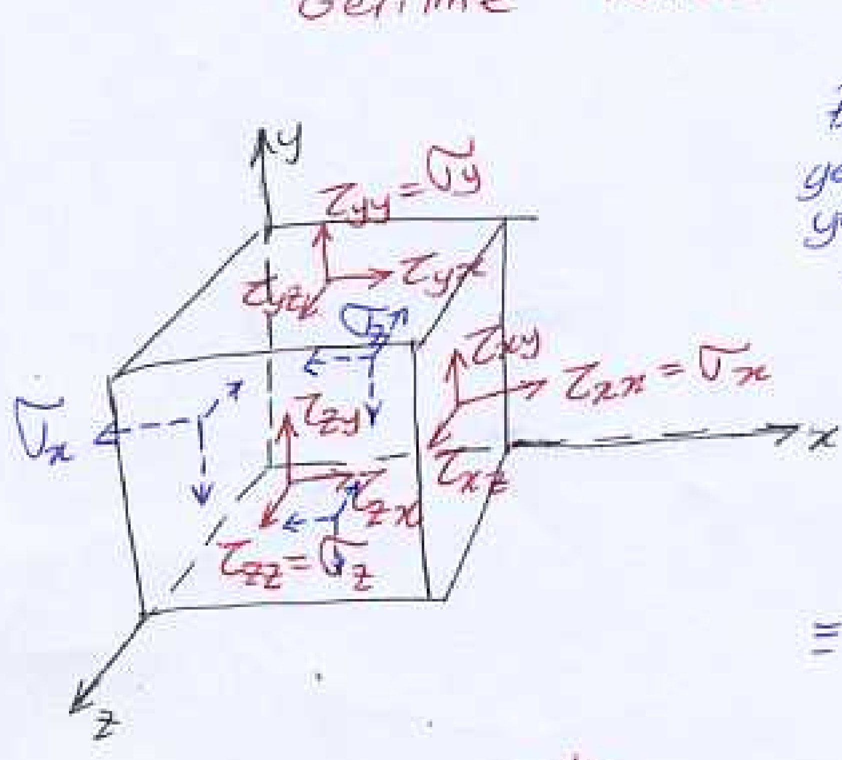



Kesit düzlemine dik olan kuvvet yoğunluğu, o noktadaki normal gerilme olarak anılır ve $\sigma$ (sigma) indisiyle gösterilir. Elemanter alana paralel düzlemde etkiyen gerilmeler kayma gerilmesi olarak adlandırılır ve $\tau$ indisiyle gösterilir.

Gerilmeler birim alana gelen kuvvet yoğunluğu şeklinde tanımlanınca, boyutu (birimi) da $[N/m^2]$ kuvvet/alan şeklinde olacaktır.

## Gerilme Tansörü

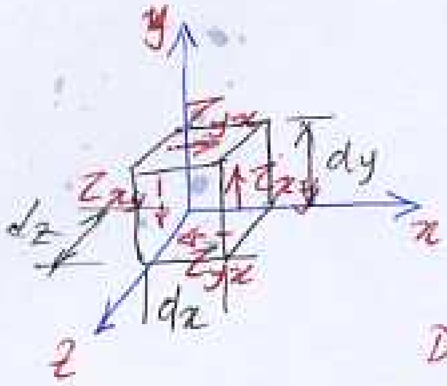



Bir elemana etkiyen gerilmeler (pozitif yönleriyle) gösterilmiştir.

matris gösterim

$$\begin{pmatrix} \tau_{xx} & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \tau_{yy} & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \tau_{zz} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \sigma_y & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_z \end{pmatrix}$$

Gerilme tansörü simetriktir. Yani $\sigma_{ij}=\sigma_{ji}$




z ekseni etrafında moment dengesine bakalım:

$$\tau_{yx}(dx\,dz)dy - \tau_{xy}(dy\,dz)dx = 0$$

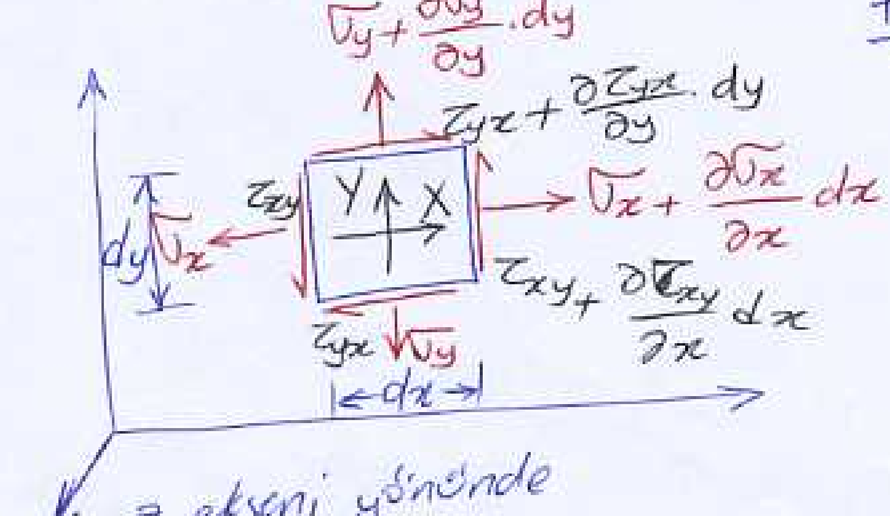
$$\tau_{xy}=\tau_{yx}$$

Düzlem halde:


Gerilmelerin her zaman dik düzlemlerde değil, eğik düzlemlerde de aranması gerekir. Bu işleme eksen takımı dönüşümü ile yapılabilir. Bu sayede gerilme tansörünün aşağıda belirtilen hallerine ulaşılabilir:

$$\begin{pmatrix} \sigma_1 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_2 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_3 \end{pmatrix} \text{ veya düzlem halde } \begin{pmatrix} \sigma_1 & 0 \\ 0 & \sigma_2 \end{pmatrix}$$

Dengenin diferansiyel denklemi




z ekseni yönünde 1 birim uzunlukta olduğu kabul edilerek:

$$\overset{+}{\rightarrow} \sum F_x = 0$$

$$\left(\sigma_x+\frac{\partial\sigma_x}{\partial x}.dx\right)(dy\times 1)$$
$$-\sigma_x(dy\times 1)$$
$$+\left(\tau_{yx}+\frac{\partial\tau_{yx}}{\partial x}dx\right)(dx\times 1)$$
$$-\tau_{yx}(dx\times 1)+X=0$$

$\tau_{xy}=\tau_{yx}$ idi!

sadeleştirmelerden sonra

$$\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + X = 0$$ elde edilir.

$$\frac{\partial \tau_{yx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + Y = 0$$ benzer şekilde bulunur.

3 boyutlu genel hal için de :

$$\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} + X = 0$$

$$\frac{\partial \tau_{yx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial z} + Y = 0$$

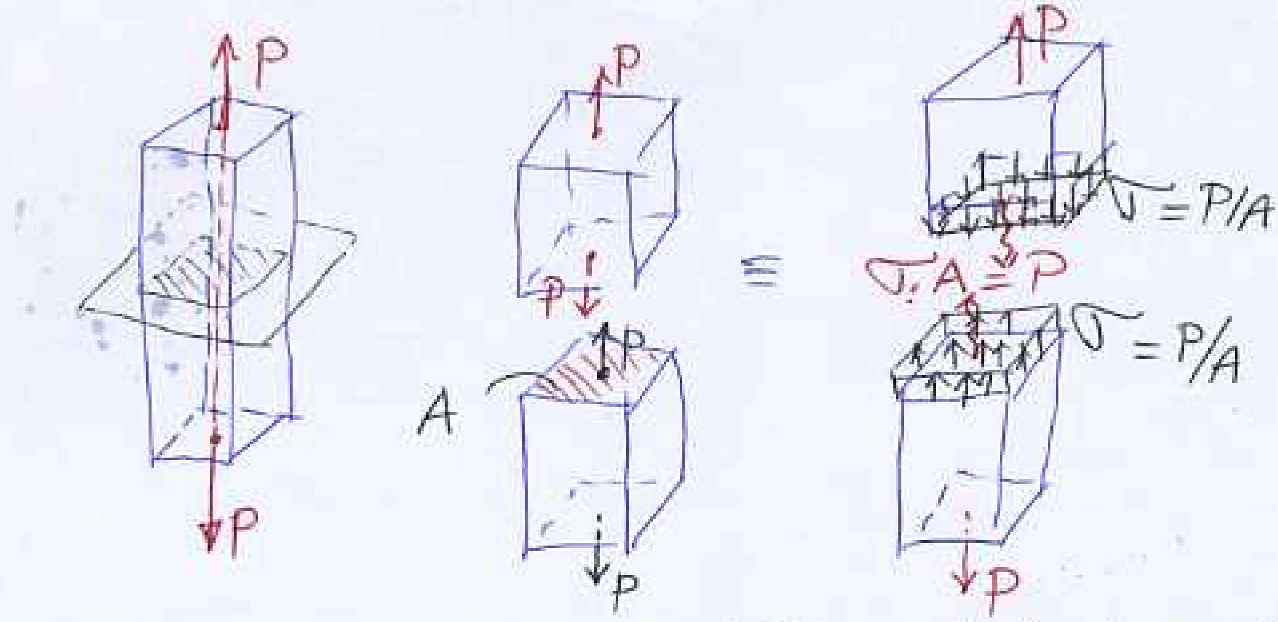
$$\frac{\partial \tau_{zx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{zy}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} + Z = 0$$

Bu denklemlerde malzeme mekanik özellikleri bulunmadığından, elastik, plastik ve visko elastik tüm malzemeler için geçerli olduğu görülmelidir. Ayrıca bilinmeyenlerin bulunabilmesi için yeterli sayıda denklem de yoktur. Misal, iki boyutlu düzlemsel halde ($\sigma_x$, $\sigma_y$, $\tau_{xy}$) gibi 3 bilinmeyen olduğu halde denge denklemi sayısı 2'dir. Üç boyutlu halde ($\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z, \tau_{xy}, \tau_{xz}, \tau_{yz}$) bilinmeyen sayısı 6 olduğu halde, denklem sayısı 3'tür. Yani bu tip bütün problemler statikçe belirsizdir.

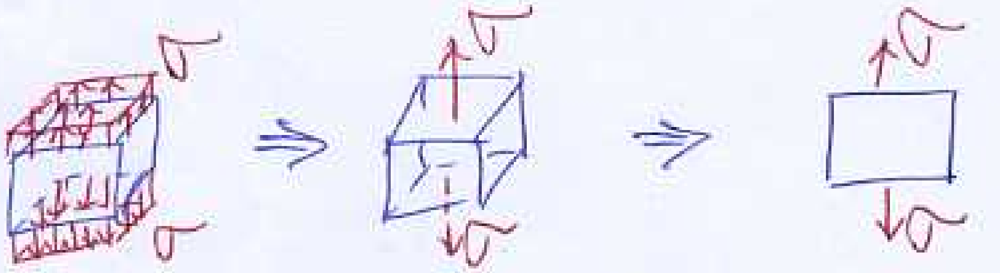
## Eksenel Yüklü Elemanlarda Gerilme

Gerilmenin tanımı gereği, çubuğun ağırlığı ihmal edilmek kaydıyla, iki ucundan P kuvvetine maruz bir çubuğa etki eden normal gerilme :

$$\sigma = \frac{P}{A}$$

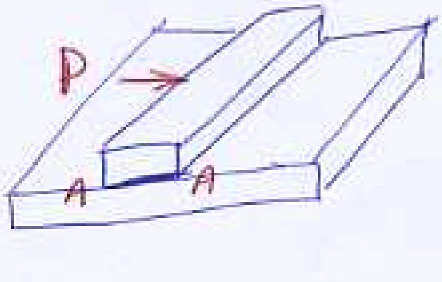


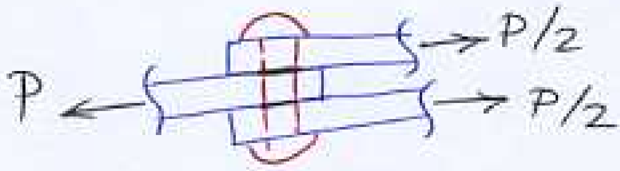

Problemin 3 boyutlu olduğunu hatırdan çıkarmadan kolaylık açısından gerilmeyi tek bir noktadan etki ediyormuş gibi göstermek iki boyutlu düzlemsel hal problemlerinde alışıldık bir durumdur.

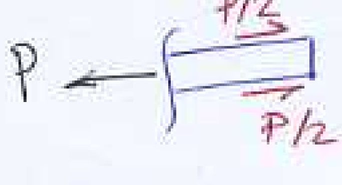



## ortalama kayma gerilmesi

veya perçinli bağlantı

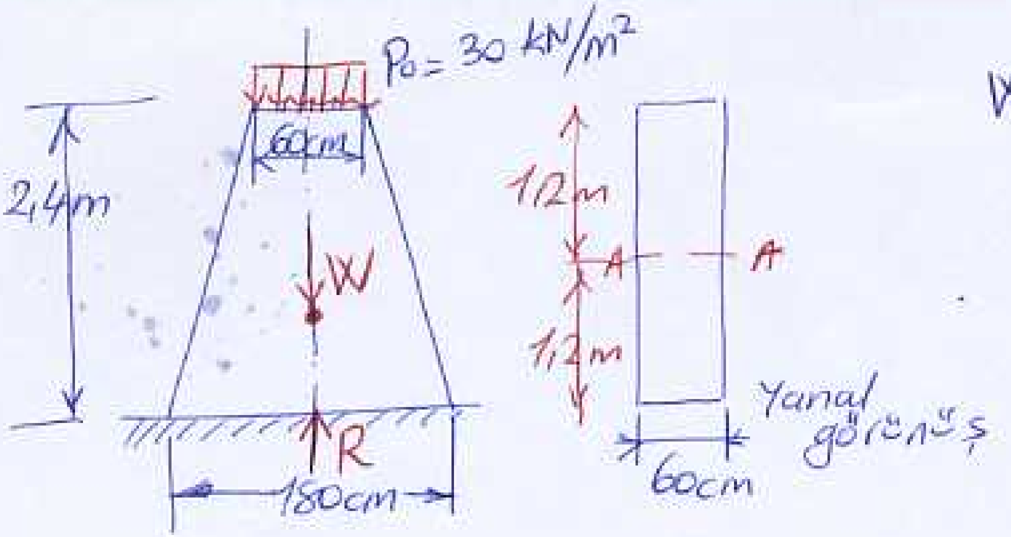




üstten görünüş




$W = (0{,}6+1{,}8)\,2{,}4 \times 0{,}6 \times \frac{24}{2}$

$W = 41{,}472\ [kN]$ Beton duvarına ağırlığı

Beton blok için ortalama yoğunluk $24\ [kN/m^3]$

Yayılı yükün bileşkesi $\Rightarrow P_0 . A = 30 \times (0{,}6 \times 0{,}6) = 10{,}8\ [kN]$

$+\uparrow \sum F_y = 0 \Rightarrow R - W - P_0 . A = 0 \quad \Rightarrow R = 52{,}272\ (kN)$

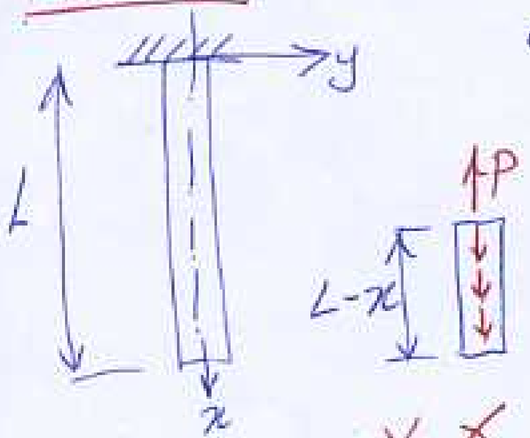
Tabandaki (yatay) normal gerilme: (Basınç)

$\sigma = R/A \quad \Rightarrow \quad \sigma = 52{,}272 / (1{,}8 \times 0{,}6) = 48{,}4 \left[\frac{kN}{m^2}\right]$

**Ödev** A-A kesitinde etki eden normal gerilmeyi bulun! (Cevap: $36{,}6\ kN/m^2$ ??)

**Problem**

Kesit alanı (1 cm²) ve uzunluğu L m olan çubuğun birim ağırlığı $\gamma$'dır. $\sigma_x = ?$




$\sigma_x = \frac{P}{A}$

$X = \gamma$ ve $\tau_{xy} = 0$

$\frac{d\sigma_x}{dx} + \gamma = 0$ idi.

$\sigma_x = -\gamma x + C$

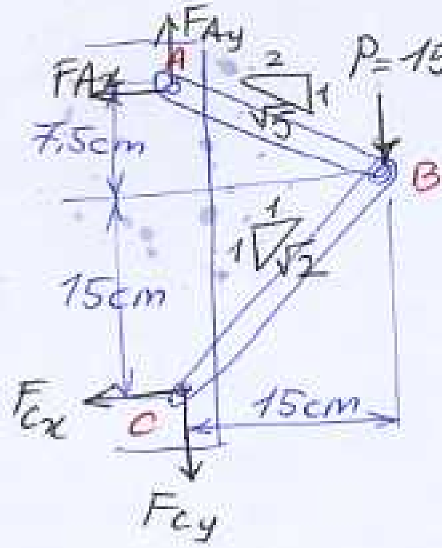
$\sigma_x(L) = 0 = -\gamma . L + C$

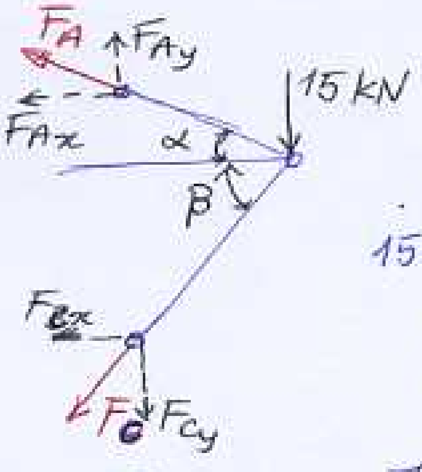
$C = \gamma . L$

$\sigma_x = -\gamma x + \gamma L$

$\sigma_x = \gamma (L - x)$

## örnek 3-3 (s.87)




$F_C = \sqrt{2}\, F_{Cx}$

$F_A = (\sqrt{5}/2)\, F_{Ax}$

$F_{Ay} = F_{Ax}/2$

$\circlearrowleft + \sum M_C = 0$

$15 \cdot 15 - F_{Ax}(15+7,5) = 0$

$F_{Ax} = 10$ kN

$F_{Ay} = 5$ kN

$\circlearrowleft + \sum M_A = 0$

$15 \cdot 15 + F_{Cx} \cdot 22,5 = 0$

$F_{Cx} = -10$ kN (basınç)

$F_{Cy} = F_{Cx} = -10$ kN

Kontrol:

$\xrightarrow{+} \sum F_x \overset{?}{=} 0 \Rightarrow F_{Ax} + F_{Cx} = 10 - 10 = 0$ ✓

$+\uparrow \sum F_y \overset{?}{=} 0 \Rightarrow F_{Ay} + F_{Cy} - 15 = 5 + 10 - 15 = 0$ ✓

AB çubuğundaki gerilme : $\sigma_{AB} = \dfrac{F_A}{A_{AB}}$

BC " " : $\sigma_{BC} = \dfrac{F_C}{A_{BC}}$

Pimlerdeki yatak gerilmeleri hesabında da pim boyut ve geometrisi dikkate alınır.

Civatalı bağlantılarda dişler nedeniyle civatanın diş köklerindeki kesit alanı dikkate alınır!

# Emniyet Gerilmesi - Emniyet Faktörü

Dairesel kesitli numune çubuklar çekmeye maruz bırakılır. Çubuk kopuncaya kadar çekme işlemi (kuvveti artırarak) devam eder. Kopmaya sebep olan yüke (kuvvete) "nihai yük" denir. Bu nihai yükü orijinal çubuk kesit alanına bölerek malzemenin "nihai mukavemet gerilmesi" veya "kopma gerilmesi" bulunur. En çok kullanılan yöntem "çekme deneyi" olsa da; basınç, eğilme, burulma ve kayma deneyleri de yapılabilir.

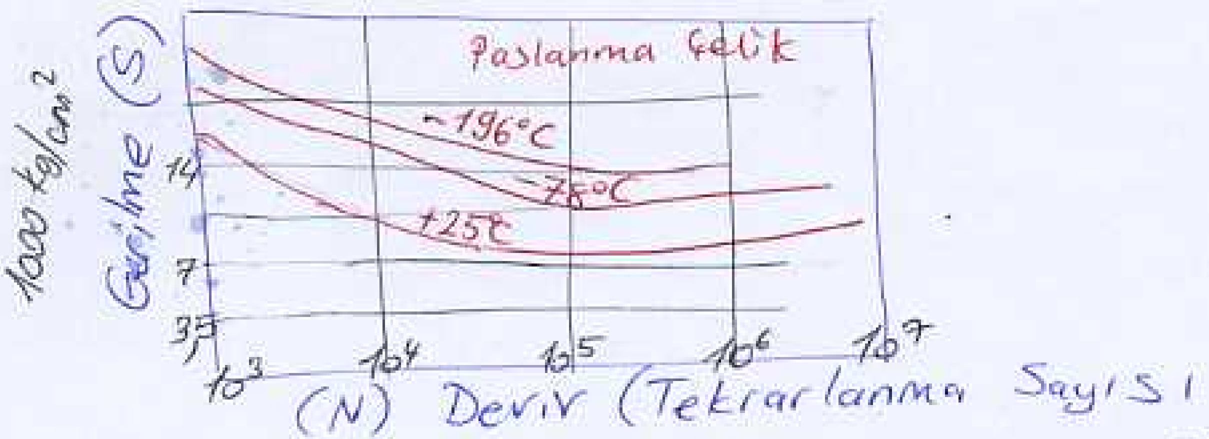
Yapıya etki edecek olan yüklerin (dış) gerçek büyüklüklerini bilmek (tam olarak) nadiren mümkündür. Malzeme her noktasında aynı özellikleri göstermez. Bazı malzemeler kopmadan (kırılmadan) önce çok fazla uzayabilir (izin verilenden çok daha fazla). Bazı malzemeler çalışma ömrü boyunca korozyona maruz kalabilir. Diğer bazı malzemeler sabit bir yük altında plastik bir akmaya (kalıcı şekil değiştirmeye) maruz kalırlar ki, buna (creep) kreep olayı denir. Zamanla büyük deformasyonlara (kalıcı şekil değiştirme) yol açar. Tüm bu sebeplerden ötürü, malzemeye etki edecek gerilmenin düşük bir seviyede tutulması istenir (emniyetli gerilme değeri).

Yapıya tekrar eden kuvvetlerin etki etmesi durumunda malzeme statik kopma gerilmesine kadar dayanamaz. Böyle hallerde, cisim belli bir gerilme seviyesinde çalışırken, nihai mukavemet, uygulanan kuvvetin tekrarlanma sayısına bağlıdır.

Kırılmaya sebep olacak tekrarlanma sayısını bulabilmek için yorulma deneyleri yapılır. Bu deneye karşılık gelen eğriler elde edilir. S-N (stress-number) (gerilme - sayısı) eğrisi (diyagramı) olarak adlandırılır.

Sonsuz defa tekrarlansa dahi malzemenin kırılmasına sebep olmayan gerilmeye cismin "dayanıklılık limiti" denir. Yatay bir seyir izler.

Esas yorulma deneyi eğilmeye zorlanan bir numune üzerinde yapılır.




Malzeme imal edilirken haddeden geçirilebilir, dövülebilir. Dökümde ise malzeme düzgün olmayan bir şekilde soğumaya bırakılır. Bu ısıl işlemler sırasında "artık gerilme" adı verilen bir kısım iç gerilmeler oluşur. Bu çeşit malzemeler "ön gerilmeli" olarak nitelenir.

Yukarıda bahsedilmeye çalışılan nedenlere ek olarak, hesaplama sırasında yapılan kabullerden ve teoriden kaynaklanan belirsizlikleri de dikkate alırsak, bir "emniyet faktörü" kullanmak gerekir.

Örneğin, statik bir çekme deneyinde normal mukavemetli bir çelik numune 420 MPa veya daha da fazla bir gerilmeye dayanabilir. Halbuki aynı numune 280 MPa civarında ani ve büyük bir şekil değişimine maruz kaldığından çeliğin emniyet gerilmesi 175 MPa (ABD'de) olarak seçilir. Tekrarlayan yükler etkisinde çalışacaksa bu limit daha da düşürülür. Yorulma etkisi nedeniyle emniyetli gerilme değeri 70 MPa civarında alınır.

Çeşitli malzemeler için emniyet gerilmesi değerleri yetkili kurumlar tarafından belirlenebilir.

Gerilme ile alan çarpımı kuvveti vereceğinden, kopma ve emniyet gerilmeleri, kopma ve emniyet kuvvetlerine (veya yüklerine) çevrilebilir. Ayrıca buradan çok önemli bir oran da çıkarılabilir:

$$\frac{\text{Eleman için kopma yükü}}{\text{Eleman için emniyet yükü}} > 1,0$$

Bu orana "emniyet faktörü" denir ve daima "1" den büyük bir sayıdır. Pek kullanılmasa da bu oran için "bilgisizlik faktörü" de denilebilir.

Uçak teknolojisinde emniyet faktörü yerine "emniyet sınırı" olarak tabir edilen aşağıdaki

$$\frac{\text{Nihai Gerilme}}{\text{inşaat yükünden doğan maksimum gerilme}} - 1$$

faktör kullanılır.

## Eksenel Yüklü Elemanların Boyutlandırılması

$$A = P/\sigma_{em}$$

Örnek 3-5 (s.96) AB çubuğunun ağırlığını azaltmak için nihai mukavemeti ~~8500 kg/cm²~~ 85 kN/cm² olan krom-vanadyum çeliği kullanılacak ve emniyet faktörü 2,5 alınacaktır.

$$\sigma_{em} = \sigma_{nihai}/2,5 = 85/2,5 = 34\ kN/cm^2$$

$$A = 11,18\ kN / 34\ kN/cm^2 = 0,33\ cm^2$$

0,5 cm × 0,7 cm'lik bir kesit 0,35 cm²'lik kesit alanına sahip olduğundan yeterlidir. Seçilen bu kesite etki eden gerçek çalışma gerilmesi :

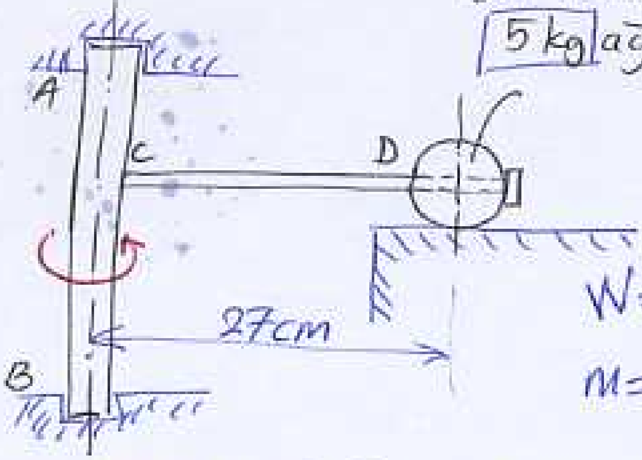
$$\sigma_{gerçek} = F_{AB}/A = 11,18/0,35 = 31,9\ kN/cm^2$$

Esas emniyet faktörü $85/31,9 = 2,66$

ve gerçek emniyet sınırı ise 1,66 olarak bulunur.

örnek 3-7

Sürtünmesiz düzlemde $\boxed{5\,kg}$ ağırlık (50N)




$$W = m.g$$

$$m = \frac{W}{g}$$

AB şaftı dakikada 600 devirlik bir açısal hızla dönmektedir. DC çubuğunun boyutlarını bünyesindeki gerilme $7\ kN/cm^2$'yi geçmeyecek şekilde belirleyiniz.

$g = 9{,}807\ m/sn^2$ ; Açısal hız: $\omega = 2\pi n/60 = 20\pi\ rad/s$

cisim $R\omega^2$'lik bir ivmeyle merkeze yönelecektir. D'Alembert ilkesi gereği bu cisme zıt yönde $mR\omega^2$'lik bir kuvvet etki edecektir.

$$F = m\,a = \frac{W}{g} \cdot R\omega^2 = \frac{50N}{9{,}807\frac{m}{s^2}} \cdot (20\pi)^2 \cdot (27\,cm)$$

$$F = 5434\,[N]$$

$$A_{\substack{net \\ gerekli}} = \frac{F}{\sigma_{em}} = \frac{5434N}{7000\,N/cm^2} = 0{,}776\,[cm^2]$$

Çapı 1 cm olan dairesel çubuk istenen amaç için yeterlidir. $(\pi d^2/4) = \pi \cdot 1cm^2/4 = 0{,}785\ [cm^2]$

# Şekil Değiştirme, Bünye Kanunları, Eksenel Deformasyon

Şekil değiştirme, deformasyonun şiddeti olarak tanımlanabilir. Gerilmelerin bulunmasıyla aynı öneme sahip bir konudur. Gerilme ile şekil değiştirme arasındaki lineer (doğrusal) bağlantı, Genelleştirilmiş Hooke Kanunu olarak bilinir.

Test numune çubuğunun belli iki noktası arasındaki mesafe başlangıçta $l_0$, deformasyondan sonraki uzunluğu $l$ ile gösterilirse; eksenel uzama farkı:

$$\Delta l = l - l_0 \quad \text{olarak verilir.}$$

Birim uzunluğun uzama miktarını bulmak için

$$\varepsilon = \int_{l_0}^{l} \frac{dl}{l_0} = \frac{l}{l_0}\Big|_{l_0}^{l} = \frac{\Delta l}{l_0} \Rightarrow \frac{l-l_0}{l_0} = \frac{l}{l_0} - 1$$

Buna "lineer birim şekil değiştirme" denir. Bir çok problem için bu büyüklük (boyutsuz) % 0,1 mertebesindedir.

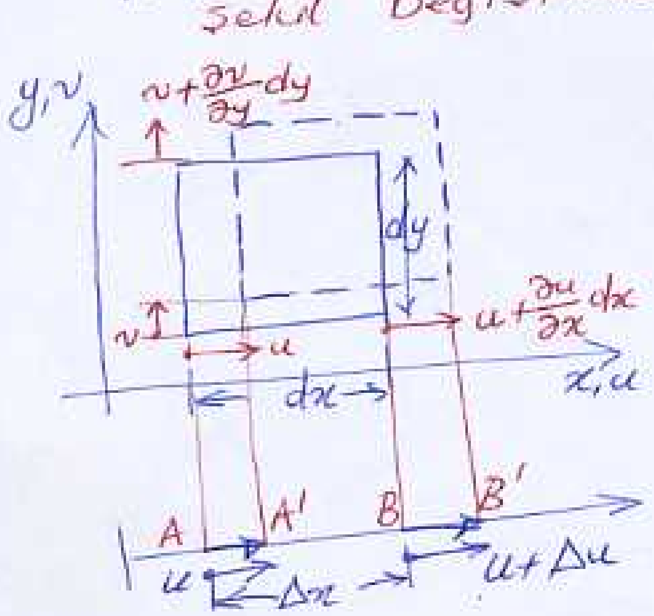
Şekil değiştirmenin büyük olduğu durumlarda, "doğal birim şekil değiştirme" bulunmalıdır. Bunun için:

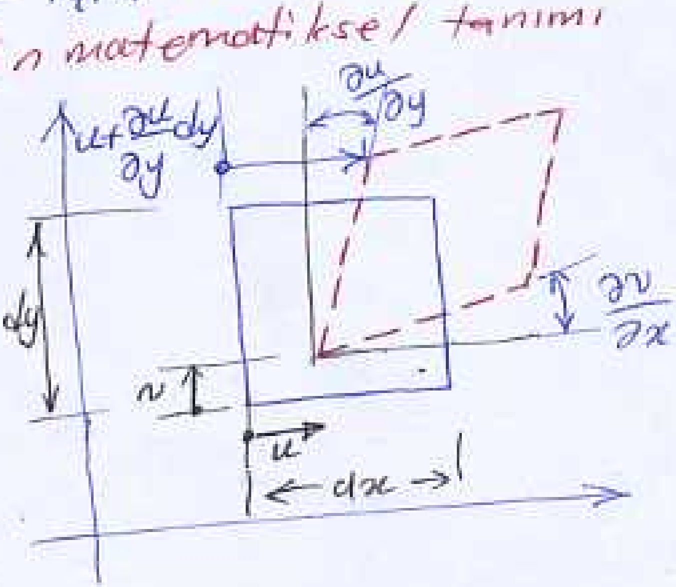
$$\varepsilon = \int_{l_0}^{l} \frac{dl}{l} = \ln l \Big|_{l_0}^{l} = \ln l - \ln l_0 = \ln\left(l/l_0\right)$$

$$\frac{\Delta L}{l_0} = \ln(1+\varepsilon)$$

Küçük deformasyonlar için bu iki tanım aynıdır.

Şekil Değiştirmenin matematiksel tanımı



Buna göre lineer şekil değiştirme:

$$\varepsilon = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta u}{\Delta x} = \frac{du}{dx} \Rightarrow \begin{matrix}\text{sabit}\\ \text{kesit}\\ \text{alan}\\ \text{homojen malzeme}\end{matrix} \Rightarrow \varepsilon = \frac{\delta}{L}$$

Farklı doğrultularda şekil değiştirmeler ise (x, y, z doğrultusunda deplasman, yer değiştirme, bileşenleri u, v, w ise bu doğrultulardaki şekil değiştirmeler:)

$$\varepsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x} \; ; \; \varepsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y} \; ; \; \varepsilon_z = \frac{\partial w}{\partial z}$$

Gerilmeye benzer tarzda: $\varepsilon_x = \varepsilon_{xx}$ ; $\varepsilon_y = \varepsilon_{yy}$ ; $\varepsilon_z = \varepsilon_{zz}$

Düzlemsel halde (x-y düzlemi) cisim kayma şekil değiştirmesine de maruz kalır.

Birim kayma şekil değiştirmesi:

$$\gamma_{xy} = \gamma_{yx} = \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y}$$

Küçük açıların tanjantları (sinüsleri) açının radyan cinsinden kendisine eşittir (kabulü yapılmıştır.)

$$\gamma_{xz} = \gamma_{zx} = \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z}$$

$$\gamma_{yz} = \gamma_{zy} = \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y}$$

Bu altı adet birim şekil değiştirme bileşeni yalnız u, v ve w deplasmanına bağlıdır. O halde bu denklemler birbirinden bağımsız değildir. $\varepsilon_{xx}$, $\varepsilon_{yy}$, $\varepsilon_{zz}$, $\gamma_{xy}$, $\gamma_{xz}$ ve $\gamma_{yz}$ arasındaki iç bağıntıyı kurarak üç tane bağımsız denklem elde edilebilir. İki boyutlu halde (düzlem hal) bağımsız denklem sayısı bire indirgenir. Bunlar elastisite teorisinde uygunluk denklemleri olarak anılır.

Kayma şekil değiştirmesini belirli bir dönüşüm kuralına uyan bir tansör şeklinde gösterebilmek için

$$\varepsilon_{xy} = \varepsilon_{yx} = \frac{\gamma_{xy}}{2} = \frac{\gamma_{yx}}{2} \; ; \; \varepsilon_{xz} = \varepsilon_{zx} = \frac{\gamma_{xz}}{2} = \frac{\gamma_{zx}}{2}$$

$$\varepsilon_{yz} = \varepsilon_{zy} = \frac{\gamma_{yz}}{2} = \frac{\gamma_{zy}}{2}$$

Matris gösterimi:

$$\begin{pmatrix} \varepsilon_{xx} & \varepsilon_{xy} & \varepsilon_{xz} \\ \varepsilon_{yx} & \varepsilon_{yy} & \varepsilon_{yz} \\ \varepsilon_{zx} & \varepsilon_{zy} & \varepsilon_{zz} \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} \varepsilon_{xx} & \gamma_{xy}/2 & \gamma_{xz}/2 \\ \gamma_{yx}/2 & \varepsilon_{yy} & \gamma_{yz}/2 \\ \gamma_{zx}/2 & \gamma_{zy}/2 & \varepsilon_{zz} \end{pmatrix}$$

şekil değiştirme tansörü simetriktir: $\varepsilon_{ij} = \varepsilon_{ji}$

Gerilme tansöründe olduğu gibi, koordinat eksen takımı öyle seçilebilir ki, tansör diyagonel formu alır:

$$\begin{pmatrix} \varepsilon_{xx} & \varepsilon_{xy} & 0 \\ \varepsilon_{yx} & \varepsilon_{yy} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \text{veya} \begin{pmatrix} \varepsilon_1 & 0 & 0 \\ 0 & \varepsilon_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \text{veya} \begin{pmatrix} \varepsilon_1 & 0 \\ 0 & \varepsilon_2 \end{pmatrix}$$

Düzlemsel

Lineer Gerilme- Şekil Değiştirme Kanunları

Gerilme ve şekil değiştirme 6 bileşenlidir. ikisi arasındaki en basit bağıntı lineer bağıntıdır.

$\tau = C\varepsilon$ veya $\varepsilon = A \cdot \tau$ şeklindedir.

C ve A birbirinin tersi olan elastik sabitlerdir. Kuvvet ile deformasyon, ya da gerilme ile şekil değiştirme arasındaki lineer bağıntı Hooke kanunu olarak bilinir. Hooke kanunu süperpozisyon prensibi yardımıyla ifade edilir:

$$\varepsilon_{xx} = \varepsilon_x = A_{11}\tau_{xx} + A_{12}\tau_{yy} + A_{13}\tau_{zz} + A_{14}\tau_{xy} + A_{15}\tau_{yz} + A_{16}\tau_{zx}$$

$$\varepsilon_{yy} = \varepsilon_y = A_{21}\tau_{xx} + A_{22}\tau_{yy} + A_{23}\tau_{zz} + A_{24}\tau_{xy} + A_{25}\tau_{yz} + A_{26}\tau_{zx}$$

$$\varepsilon_{zz} = \varepsilon_z = A_{31}\tau_{xx} + A_{32}\tau_{yy} + A_{33}\tau_{zz} + A_{34}\tau_{xy} + A_{35}\tau_{yz} + A_{36}\tau_{zx}$$

$$\varepsilon_{xy} = \frac{\gamma_{xy}}{2} = A_{41}\tau_{xx} + A_{42}\tau_{yy} + A_{43}\tau_{zz} + A_{44}\tau_{xy} + A_{45}\tau_{yz} + A_{46}\tau_{zx}$$

$$\varepsilon_{yz} = \frac{\gamma_{yz}}{2} = A_{51}\tau_{xx} + A_{52}\tau_{yy} + A_{53}\tau_{zz} + A_{54}\tau_{xy} + A_{55}\tau_{yz} + A_{56}\tau_{zx}$$

$$\varepsilon_{zx} = \frac{\gamma_{zx}}{2} = A_{61}\tau_{xx} + A_{62}\tau_{yy} + A_{63}\tau_{zz} + A_{64}\tau_{xy} + A_{65}\tau_{yz} + A_{66}\tau_{zx}$$

36 tane belirlenmesi gereken sabit vardır!

Bunlar diyagonele göre simetriktir $A_{ij} = A_{ji}$

## İZOTROP malzemeler için

Her doğrultudaki ve her noktadaki özelliği aynı olan izotrop ve homojen malzemeler için bu 36 sabitten bir çoğu sıfır olur, bir kısmı da birbirine eşittir.

$A_{11} = 1/E$ ; $A_{12} = -\nu/E$ ve. $A_{44} = 1/(2G)$

tanımları yapılırsa:

$$\varepsilon_x = \frac{\sigma_x}{E} - \frac{\nu}{E}(\sigma_y + \sigma_z)$$

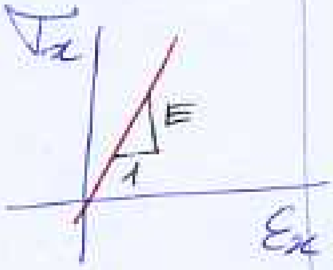
$$\varepsilon_y = \frac{\sigma_y}{E} - \frac{\nu}{E}(\sigma_x + \sigma_z)$$

$$\varepsilon_z = \frac{\sigma_z}{E} - \frac{\nu}{E}(\sigma_x + \sigma_y)$$

$$\gamma_{xy} = \tau_{xy}/G$$

$$\gamma_{xz} = \tau_{xz}/G$$

$$\gamma_{yz} = \tau_{yz}/G$$




$A_{11} = A_{22} = A_{33}$

$A_{12} = A_{13} = A_{23}$

$A_{44} = A_{55} = A_{66}$

ve simetriden

$A_{12} = A_{21}$

$A_{13} = A_{31}$

$A_{23} = A_{32}$

Diğer bütün sabitler ise sıfırdır.

Bu denklemlerdeki E sabitine elastisite veya Young Modülü (Thomas Young, 1807, England) Orantılılık sabiti G ise "elastik kayma modülü veya rijitlik modülü adını alır. Boyutu E ile aynıdır. $\nu$ (nü) ise Poisson oranı olarak bilinir. (S.D. Poisson, France)

İzotrop cisimler için $G = \dfrac{E}{2(1+\nu)}$

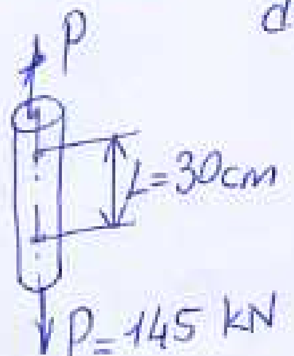
Yanal şekil değiştirmenin mutlak değerinin, eksenel şekil değiştirmeye oranına Poisson oranı denir. (Tek eksenli gerilmelerin sebep olduğu şekil değiştirmeler için geçerlidir bu tanım!)

$$\nu = \frac{|\varepsilon_y|}{\varepsilon_x} = \frac{|\varepsilon_z|}{\varepsilon_x}$$

Çok eksenli gerilme halinde süperpozisyon ilkesi uygulanabilir.

$0,25 \leq \nu \leq 0,35$ Bir çok malzeme için (deneysel) Betonda 0,1'e kadar düşerken, lastik için en fazla değere ulaşır (0,5). Normalde bu değere plastik akma sınırında ulaşılır ve cisim hiç bir hacim değişikliğine uğramaz.

Örnek 4.8




d=5,6cm Alüminyum çubuk

0,02346 cm uzama

çapta ise 0,001456 cm kısalma olmuş!

$\nu$ ve $E$ sabitlerini bulun!

ve $G$

$$\varepsilon_t = \frac{\Delta t}{D} = \frac{-0,001456}{5,6} = -0,000260$$ (Çubuğun çapındaki toplam değişim)

Eksenel şekil değiştirme ise $\varepsilon_e = \frac{\Delta}{L} = \frac{0,02346}{30} = 0,000782$

Poisson oranı: $\nu = \frac{|\varepsilon_t|}{\varepsilon_e} = \frac{|-0,000260|}{0,000782} = 0,333$

Çubuğun kesit alanı: $A = \pi D^2/4 = 24,64\ cm^2$

$$\sigma = \frac{P}{A} = \frac{145\ kN}{24,64\ cm^2} = 5,88\ kN/cm^2$$

$$E = \frac{\sigma}{\varepsilon} = \frac{5,88}{0,000782} = 7519\ kN/cm^2 = 75190000\ kN/m^2$$

$$= 75,2\ GPa$$

$$G = \frac{E}{2(1+\nu)} = 28,2\ GPa$$

## Termal şekil değiştirme

Gerilmelerden başka sıcaklık değişimleri de deformasyonlara sebep olurlar. Homojen ve izotrop malzemeler için $\Delta T$ miktarındaki sıcaklık değişimi her doğrultuda lineer şekil değiştirmelere sebep olur.

$$\varepsilon_x = \varepsilon_y = \varepsilon_z = \alpha \Delta T \text{ veya } \Rightarrow \alpha \delta T$$

$\alpha$ : malzemenin termal genleşme katsayısıdır.

Birimi $1/°C$ cinsinden verilir.

Aluminum $24 \times 10^{-6} (1/°C)$ ; steel $13 \times 10^{-6} (1/°C)$

İzotrop malzemelerde kayma şekil değiştirmesine sebep olmaz: $\gamma_{xy} = \gamma_{yz} = \gamma_{zx} = 0$

Gerilmeden kaynaklı şekil değiştirmeye eklenir:

$$\varepsilon_x = \frac{\sigma_x}{E} - \frac{\nu}{E}(\sigma_y + \sigma_z) \mp \alpha \delta T$$

+ : sıcaklık artımı

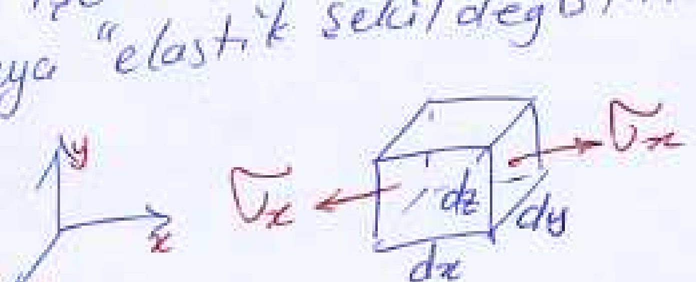
− : sıcaklık azalımı

## Tek eksenli Gerilme Halinde Elastik Şekil Değiştirme Enerjisi

Mekanikte enerji, iş yapma kapasitesi olarak tanımlanır. Kat edilen kuvvetin hareket doğrultusundaki bileşeni ile kat edilen yolun çarpımı şeklinde bulunur. Şekil değiştiren cisimlerde kuvvet, gerilmenin kendisine karşı gelen alan ile çarpımı olarak verildiği halde, kat edilen yol deformasyona eşittir. Bu iki büyüklüğün çarpımı, uygulanan iç işi verir. Bu dış kuvvetler nedeniyle meydana gelen iç işi elastik iç enerjisi. İç işe cisim içindeki "deformasyonun enerjisi" denir. veya "elastik şekil değiştirme enerjisi"

Kuvvet $= \sigma_x (dy\,dz)$

Bu kuvvet etkisi altında eleman $\varepsilon_x dx$ kadar uzar.



Deformasyon oluşurken etki eden ortalama kuvvet : $\sigma_x (dydz)/2$ şiddetindedir.

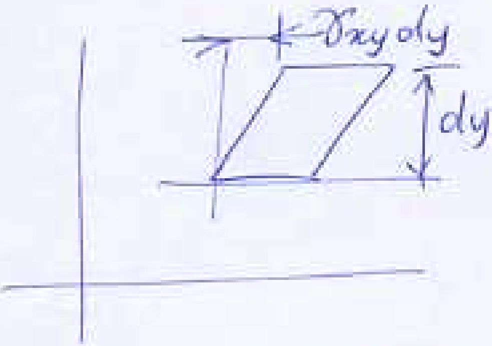
Eksenel gerilme halinde yapılan iş :

$$dU = \underbrace{\frac{1}{2}\sigma_x \, dydz}_{\text{ortalama kuvvet}} \times \underbrace{\varepsilon_x \, dx}_{\text{uzama (yol)}} = \frac{1}{2}\sigma_x \varepsilon_x \, dxdydz = \frac{1}{2}\sigma_x \varepsilon_x \, dV$$

Elastik enerji yoğunluğu: $\dfrac{dU}{dV} = \dfrac{1}{2}\sigma_x \varepsilon_x$ şeklinde ifade edilir.

## Kayma Gerilmeleri Halinde Elastik Enerji

Benzer şekilde:




$$dU_k = \frac{1}{2}\tau_{xy} \, dxdz \times \gamma_{xy} \, dy$$

$$= \frac{1}{2}\tau_{xy}\gamma_{xy} \, dxdydz$$

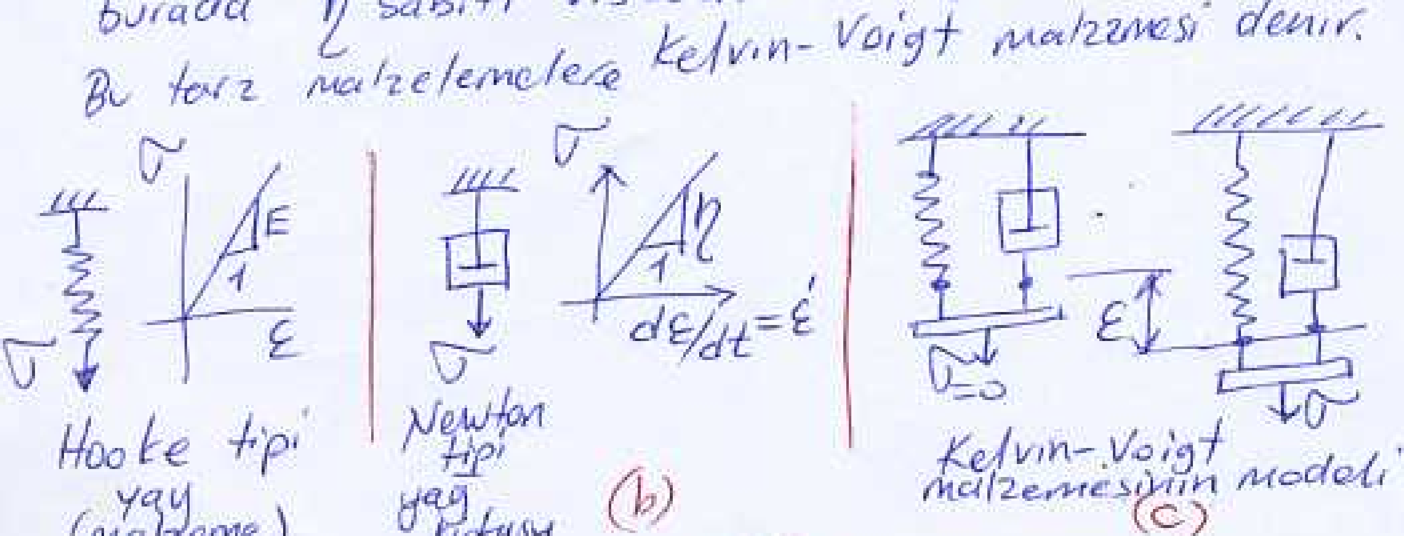
$$dU_k = \frac{1}{2}\tau_{xy}\gamma_{xy} \, dV \Rightarrow \frac{dU_k}{dV} = \frac{\tau_{xy}\gamma_{xy}}{2}$$

## Lineer Visko-Elastik cisimler

Visko-Elastik cisimlerde gerilme hem şekil değiştirmeye, hem de şekil değiştirme hızına bağlıdır:

$$\sigma = E \cdot \varepsilon + \eta \cdot \dot{\varepsilon}$$

burada $\eta$ sabiti viskozite katsayısı olarak bilinir. Bu tarz malzemelere Kelvin-Voigt malzemesi denir.




Hooke tipi yay (malzeme) (a) | Newton tipi yağ kutusu (b) | Kelvin-Voigt malzemesinin modeli (c)

# BURULMA

Burulmaya maruz kalan yapının ağırlığı ihmal edilmekte ve eğilme etkisini ihmal edebilmek için de yeter sayıda mesnetle desteklendiği kabul edilmektedir.

Elemanın ekseni $x$ doğrultusunda olmak kaydıyla;

$\Sigma M_x = 0$ denge denklemini kullanmak yeterlidir.

Güç ileten döner tipte şaftlar burulmaya maruz elemanlara örnektir. En büyük gerilmenin, en büyük burulma momentinin (Tork'un) olduğu kesitte gerçekleşeceği açıktır. Şaft kesiti değişiyorsa bu durum değişebilir, dikkatlice incelenmelidir.

Tork ile güç arasındaki ilişki şu şekilde ifade edilebilir:

Dinamik'ten

$$\underbrace{P}_{\text{Watt}} = \overset{\text{moment}}{\underbrace{T}_{N.m}} \cdot \overset{\text{açısal hız}}{\underbrace{\omega}_{1/s}} \quad \text{güç}$$

$\omega = 2\pi f$ ( $f$ dönme frekansı, saniyedeki devir sayısı)

$$\underbrace{T}_{N.m} = \frac{P \sim [\text{Watt}] = \frac{\text{Joule}}{\text{sn}}}{2\pi f \sim [\text{Hz}]\ (\text{Hertz})}$$

**Örnek** 7,5 kW'lık bir motor 3600 devir/dakika çalışmaktadır. Kayma gerilmesi 60MPa aşmayacak şekilde mil çapını bulunuz. Mil çapı en az ne kadar olmalıdır?

Önce motorun saniyedeki devir sayısını (Hertz) bulalım:

$$f = \left(3600 \frac{\text{devir}}{\text{dakika}}\right) = 60\ \text{Hz} = 60\ s^{-1}$$

İletilen tork:

$$T = \frac{P}{2\pi f} = \frac{7{,}5\ kW}{2\pi\, 60 s^{-1}} = 19{,}9 [N.m]$$

Tork ile kayma gerilmesi arasındaki bağıntıdan:

$$\frac{J}{c} = \frac{T}{\tau_{max}}$$

J: Polar atalet momenti

c: Dairesel kesitin yarıçapı

içi dolu dairesel şaft için:

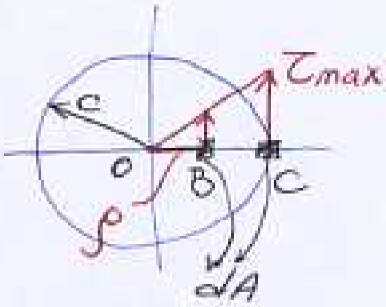
$$J = I_x + I_y = \frac{\pi d^4}{64} + \frac{\pi d^4}{64} = \frac{\pi d^4}{32} \Rightarrow \frac{J}{c} = \frac{J}{r} = \frac{1}{2}\pi r^3$$

$$J = \frac{\pi r^4}{4} + \frac{\pi r^4}{4} = \frac{\pi r^4}{2}$$

$$\frac{1}{2}\pi r^3 = \frac{19{,}9\,[N.m]}{60[MPa]} = \frac{19{,}9\,[N.m]}{60.10^6.\left[\frac{N}{m^2}\right]} = 3{,}3157 \times 10^{-7}\,[m^3]$$

$$r = 0{,}0059\,[m] \Rightarrow d = 11{,}9\,[mm] \Rightarrow \underline{d = 12\,[mm]}$$

Burulma momenti - Kayma Gerilmesi arasındaki bağıntı




Elastik bölgede, dairesel bir şaftın (milin) içindeki gerilme dağılımı

$$\int_A \underbrace{\underbrace{\frac{\rho}{c}\tau_{max}}_{\text{gerilme}}\ \underbrace{dA}_{\text{alan}}}_{\text{kuvvet}}\ \underbrace{\rho}_{\substack{\text{moment kolu}\\ \text{kuvvet kolu}}} = \underbrace{T}_{\substack{\text{moment}\\ \text{(Tork)}}}$$

incelenen her hangi bir kesitte $\rho$ ve $\tau_{max}$ bilinen sabit değerlerdir. Böylece

$$T = \frac{\tau_{max}}{c}\int_A \rho^2 dA \quad \text{olur.} \Rightarrow T = \frac{J}{c}\tau_{max}$$

$\int \rho^2 dA$ aslında bir kesitin polar atalet momenti olarak bilinir. Örneğin dairesel bir kesit için

$$J = \int \rho^2 dA = \int_0^c 2\pi\rho^3 d\rho = 2\pi\frac{\rho^4}{4}\Big|_0^c = \frac{\pi c^4}{32} = \frac{\pi d^4}{64}$$

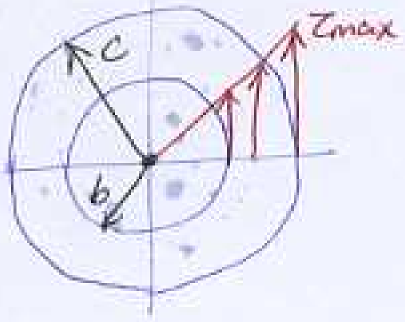
Burada c (yarıçap)

merkezden $\rho$ mesafedeki bir noktada gerilme

$$\tau = \frac{\rho}{c}\tau_{max} = \frac{T\rho}{J}$$

maksimum gerilme $\rho = c$ olduğunda: $\tau_{max} = \frac{T.c}{J}$

Formül dairesel borular (tüpler) için de genişletilebilir



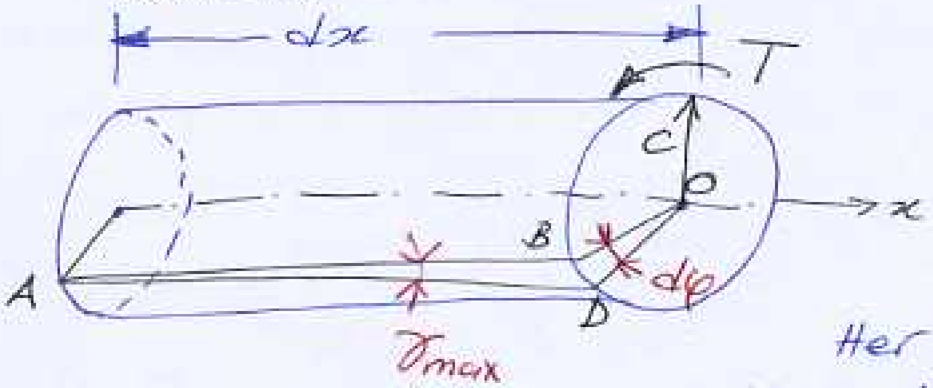

$$J=\int_A \rho^2 dA = \int_b^c 2\pi\rho^3 d\rho = \frac{\pi c^4}{2}-\frac{\pi b^4}{2}$$

İnce tüpler için $b \cong c$ olacağından veya $c-b=t$

$$J \cong 2\pi c^3 t$$

yeterli derecede doğruluk sağlar.

Dairesel Elemanlarda Burulma Açısı




$\widehat{BD} = \gamma_{max}\, dx$

aynı zamanda

$\widehat{BD} = c\, d\varphi$

Her iki açı da küçük olduğundan eşitlik doğrudur.

Hooke Kanunu da geçerlidir. $\gamma_{max}$ açısı $\tau_{max}$ gerilmesiyle orantılıdır: $\tau_{max} = G.\gamma_{max}$

Ayrıca; $\tau_{max} = T.c/J$ elde edilmişti.

$$\gamma_{max}\, dx = c\, d\varphi \Rightarrow \frac{d\varphi}{dx} = \frac{\gamma_{max}}{c}$$ yazabiliriz.

Buradan $\dfrac{d\varphi}{dx} = \dfrac{T}{J.G}$ veya $d\varphi = \dfrac{T}{J.G}\, dx$

Bu bize $dx$ uzaklığında iki paralel kesitin birbirine göre rölatif dönme açısıdır. Belli iki nokta arasında $(0, L)$

$$\varphi = \int_0^L \frac{T}{J.G}\, dx + C_1$$

Hem dolu, hem de içi boş dairesel miller için geçerlidir bu formül!

Eksenel yüklü çubukların deformasyonu ile benzerlik!

$$u = \frac{P}{AE}\int_0^x dx + C_1$$

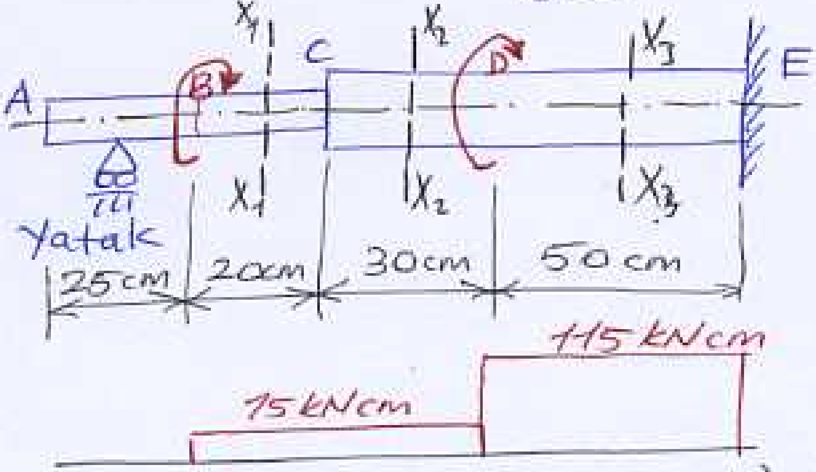
## örnek

$T_B = 15$ kNcm $\qquad T_D = 100$ kN.cm $\qquad G_{çelik} = 84$ GPa

$X_1 - X_1$ kesiti: $\varnothing$ 2,5 cm

$X_2 - X_2$ kesiti
$X_3 - X_3$ "

5 cm, 2,5 cm




Şaftın A ucundaki dönmeyi (açısal) bulun!

$$\varphi = \int_E^A \frac{T(x)}{J(x)\,G}dx = \int_E^D \frac{T_{DE}}{J_{DE}G}dx + \int_D^C \frac{T_{CD}}{J_{CD}G}dx + \int_C^B \frac{T_{BC}}{J_{BC}G}dx + \int_B^A \frac{T_{AB}}{J_{AB}G}dx$$

$$\varphi = \frac{T_{DE}L_{DE}}{J_{DE}\cdot G} + \frac{T_{CD}L_{CD}}{J_{CD}G} + \frac{T_{BC}L_{BC}}{J_{BC}G} + \frac{T_{AB}L_{AB}}{J_{AB}G}$$

$$J_{CD} = J_{DE} = \frac{\pi}{32}(d_d^4 - d_i^4) = \frac{\pi}{32}(5^4 - 2{,}5^4) = 57{,}52\,[cm^4]$$

$$J_{AB} = J_{BC} = \frac{\pi d^4}{32} = 3{,}835\,[cm^4]$$

$$\varphi = \frac{1}{84\,GPa}\left[\frac{115\,kNcm \cdot 50cm}{57{,}52\,cm^4} + \frac{15\cdot 30}{57{,}52} + \frac{15\cdot 20}{3{,}835} + 0\right]$$

$$\varphi = \frac{1}{8{,}4\,10^9\,\frac{N}{m^2}}\left[99{,}965 + 7{,}823 + 78{,}227\right]\frac{kN}{cm^2}$$

$$\varphi = 0{,}022 \text{ radyan} \Rightarrow *\left(\frac{360^\circ}{2\pi \text{ radyan}}\right) \Rightarrow 1{,}269^\circ$$

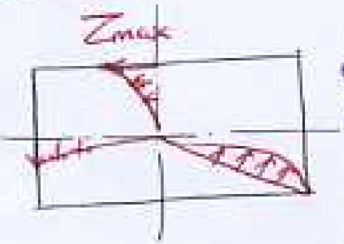
## Gerilme Yığılmaları


$$\tau_{max} = K\left(\frac{T.c}{J}\right)$$

Küçük şaft için hesaplanan kayma gerilmesi. Şaftlardaki yağ delikleri ve kama yataklarında da gerilme yığılması oluşur!

## Dairesel olmayan içi dolu elemanların burulması

Dairesel kesitli elemanlar için yapılan kabuller artık geçerli olmadığından, problem oldukça karmaşıktır. Eksene dik kesitler burulmadan sonra düzlem kalmayıp "çarpılırlar"! Bunu görebilmek için dikdörtgenler prizması şeklindeki bir silgiyi paralel çizgilerle (ve dik çizgilerle) bölün ve uçlarından burulmaya zorlayın!

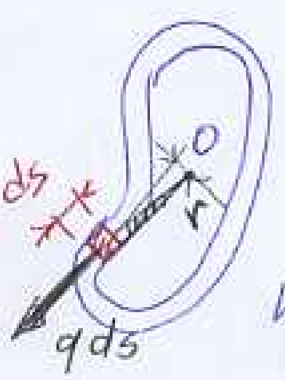



Dikdörtgen bir kesitte köşelerde çarpılma olmaz. Kayma gerilmeleri de köşelerde sıfırdır. Uzun kenarların ortasında ise en büyük değerdedir.

$$\tau_{max} = \frac{T}{\alpha b c^2} \quad \text{ve} \quad \varphi = \frac{T.L}{\beta b c^3 G}$$

| b/c | 1,0 | 1,5 | 2,0 | 3,0 | 6,0 | 10 | ∞ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $\alpha$ | 0,208 | 0,231 | 0,246 | 0,267 | 0,299 | 0,312 | [illegible] |
| $\beta$ | 0,141 | 0,196 | 0,229 | 0,263 | 0,299 | 0,312 | [illegible] |

## İnce Cidarlı İçi Boş Elemanların Burulması




q: kayma akması olarak tanımlanmıştır.

$$T = \oint r q\, ds$$

İntegrasyon işlemi tüp çevresi orta hattı boyunca yapılır.

rds taralı alanın iki katına eşittir!

q da sabit olduğundan:

$$T = 2Aq \quad \text{veya} \quad q = \frac{T}{2A}$$

Cidar kalınlığı t olan tüpün o noktasındaki gerilme de:

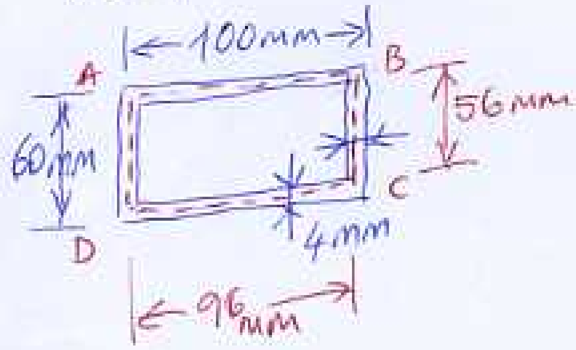
$$\tau = \frac{q}{t}$$ ile bulunur.

Bu formüller sadece ince cidarlı tüpler için (elastik bölgede çalışan) geçerlidir. Her türlü şekle sahip tüplere uygulanabilir.

Açısal dönme de:

$$\phi = \frac{TL}{4A^2G} \oint \frac{ds}{t}$$ 'den hesaplanabilir.

Example 3.10




$$A = 96\,mm \times 56\,mm = 5{,}376 \times 10^{-3}\,[m^2]$$

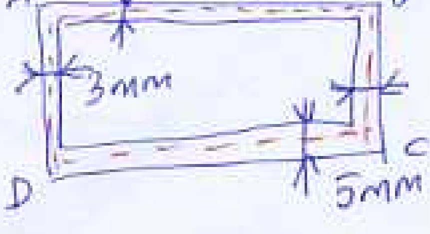
$$\tau = \frac{T}{2tA} = \frac{3 \times 10^3\,N.M}{2 \cdot (4 \times 10^{-3}\,m)(5{,}376 \cdot 10^{-3}\,m^2)}$$

$$\tau = 69{,}8\,[MPa]$$

T = 3kN-m

Üretim hatasıyla aynı boru aşağıdaki gibi olsaydı!

A yine aynı olacaktı. Fakat




$$\tau_{AB} = \tau_{AD} = \frac{3 \times 10^3}{2 \times (0{,}003)\,0{,}005376} = 93\,MPa$$

$$\tau_{BC} = \tau_{CD} = \frac{3 \times 10^3}{2 \times (0{,}005)\,0{,}005376} = 55{,}8\,MPa$$

olacaktı.

* Gerilme kalınlığa bağlıdır!