Ağırlıklı Artıklar Yöntemleri
(Weighted Residual Methods)

Yönetici denklem diferensiyel denklem formunda verilmiş ise ve problemin sınır koşulları da tanımlanmış ise, yaklaşık çözümü aramak için başvurulan yöntemlerdir.

Kesin çözümünü bildiğimiz bir problem üzerinde bu yöntemleri açıklamaya çalışalım:

$$\frac{d^2u}{dx^2} + u + x = 0 \quad \left(\text{veya } \ddot{u} + u + x = 0\right)$$

Sınır koşulları da $u(0) = u(1) = 0$ şeklinde verilmiş olsun.

Kesin çözüm $u = A\sin x + B\cos x - x$ şeklinde olacaktır. Bilinmeyen A ve B sabitleri sınır koşulları yardımıyla bulunabilir:

$u(0) = 0$ dan $B = 0$ olmalıdır.
$u(1) = 0$ dan $A = 1/\sin 1$ bulunur.

Böylece kesin çözüm: $\boxed{u_e = \dfrac{\sin x}{\sin 1} - x}$ elde edilir.

Not: Burda açı radyan cinsindendir! (e: exact)

Galerkin Yöntemi

En güçlü Ağırlıklı Artıklar yöntemi olarak bilinir.

Problemin yaklaşık çözümünün

$$u = \alpha_1 \phi_1 + \alpha_2 \phi_2 + \alpha_3 \phi_3 + \cdots + \alpha_n \phi_n$$

Burada α_i $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \ldots)$ bilinmeyen ve aranan sabitlerdir.

ϕ_i $(\phi_1, \phi_2, \phi_3, \ldots)$ ise koordinat ya da yaklaşım fonksiyonu olarak anılır.

Bu durumda $\left| u - \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \phi_i \right| < \varepsilon$ olacaktır.

Yani problemin kesin sonucu ile yaklaşık sonucu arasında ε kadar bir fark (artık) olacaktır.

Terim sayısı artarsa bu "artık" değerin azalması beklenir.

Galerkin Yöntemi, bu artık değer (ε) ile koordinat fonksiyonlarının (ϕ_i) çarpımlarının, problemin tanım bölgesindeki integralinin sıfır olmasını gerektirir.

$$\int_\Omega \varepsilon \phi_1 \, d\Omega = 0 \; ; \; \int_\Omega \varepsilon \phi_2 \, d\Omega = 0 \; ; \; \int_\Omega \varepsilon \phi_3 \, d\Omega = 0 \; ; \ldots$$

Bilinmeyen sabit sayısı kadar denklem oluşturulur ve bilinmeyen sabitler bulunurak yaklaşık çözüm elde edilmiş olur.

Kesin çözümünü bildiğimiz problem üzerinde Galerkin Yöntemini uygulayacak olursak:

Koordinat (yaklaşım) fonksiyonunu problemin sınır koşullarını sağlayacak şekilde seçmek bir avantajdır:

$\phi_i = x^i (1-x)$ şeklinde seçecek olursak ve çözümü 3 terimli arayacak olursak:

$$u = \alpha_1 x(1-x) + \alpha_2 x^2(1-x) + \alpha_3 x^3(1-x)$$

Bu yaklaşık çözüm ifadesini problemin yönetici diferansiyel denkleminde yerine koyarız.

$$\ddot{u} + u + x = 0$$

Çözüm yaklaşık olduğu için artık denklem sıfıra eşit olmaz!

Bir "kalan ≡ artık" değer (ε_R) vardır.

Daha kolay gösterebilmek için yaklaşık çözümü tek terimli arayalım:

$$u = \alpha_1 (1-x)x$$
$$\dot{u} = du/dx = \alpha_1 (1-2x)$$
$$\ddot{u} = d^2u/dx^2 = -2\alpha_1$$

$$\ddot{u} + u + x = 0$$
$$-2\alpha_1 + \alpha_1(1-x)x + x \neq 0$$

veya diğer bir deyişle

$$\varepsilon_R = -2\alpha_1 + \alpha_1(1-x)x + x$$

Tek bir bilinmeyen sabitimiz var: α_1

Bunu bulabilmek için Galerkin Yöntemine göre

$$\int_\Omega \varepsilon_R \cdot \phi_1 \, d\Omega = 0$$ olmalıydı.

Problemimizin sınır koşullarına göre yazarsak:

$$\int_0^1 \varepsilon_R \cdot \underbrace{x(1-x)}_{\phi_1} dx = 0$$

$$\int_0^1 \left[-2\alpha_1 + \alpha_1(1-x)x + x\right](x-x^2)\,dx = 0$$

$$\int_0^1 \left[-2x\alpha_1 + \alpha_1(x^2-x^3) + x^2 + 2x^2\alpha_1 - \alpha_1(x^3-x^4) - x^3\right]dx = 0$$

$$\alpha_1\left[-2\frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + 2\frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \frac{x^5}{5}\right]\Bigg|_0^1 + \left(\frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4}\right)\Bigg|_0^1 = 0$$

Belirli integrali alırsak:

$$-\frac{3}{10}\alpha_1 + \frac{1}{12} = 0 \Rightarrow \alpha_1 = 5/18 \text{ bulunur.}$$

Tek terimli yaklaşık çözüm de

$\boxed{u = \frac{5}{18} x (1-x)}$ şeklinde elde edilmiş olur!

– Moment Yöntemi –

Kalan (artık) değerin (ε_R) momentinin çözüm bölgesinde sıfır yapılmaya çalışılmasını esas alır. Yani,

$$\int_0^1 \varepsilon_R \cdot x^0 dx = 0 \; ; \; \int_0^1 \varepsilon_R x^1 dx = 0 \; ; \; \int_0^1 \varepsilon_R \cdot x^2 dx = 0$$

bilinmeyen sayısının gerektirdiği kadar denklem elde edilmelidir. Örnek problemimiz için:

$$\int_0^1 \varepsilon_R x^0 dx = 0 \Rightarrow \int_0^1 \varepsilon_R dx = 0 \Rightarrow \int_0^1 \left(-2\alpha_1 + \alpha_1(x - x^2) + x\right) dx = 0$$

$$\left[\left(-2x + \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3}\right)\alpha_1 + \frac{x^2}{2}\right]\Big|_0^1 = 0$$

$$-11/6 \; \alpha_1 + \frac{1}{2} = 0 \quad \Rightarrow \quad \alpha_1 = 3/11$$

Böylece tek terimli yaklaşık çözüm:

$$\boxed{u = \frac{3}{11} x (1 - x)}$$

– En Küçük Kareler Yöntemi –

(Kalan, Artık veya Hata) fonksiyonunun (ε_R) karesinin integralinin (toplamının) çözüm bölgesinde ~~mi~~ minimize edilmesi (en aza indirgenmesi) esasına dayanır.

$$F = \int \varepsilon_R^2 dx = F(\alpha_i)$$

Bilinmeyen sabitler cinsinden bir F fonksiyonu elde etmiş oluruz. Bu fonksiyonun bilinmeyen sabitlere göre minimize edilmesi gerekir. Yani:

$\frac{\partial F}{\partial \alpha_i} = 0$ olmalıdır.

$$\frac{\partial F}{\partial \alpha_i} = \frac{\partial}{\partial \alpha_i} \int_0^1 \varepsilon_R^2 \, dx = 0 \quad \text{veya}$$

$$2 \int_0^1 \varepsilon_R \cdot \frac{\partial \varepsilon_R}{\partial \alpha_i} \, dx = 0 \quad \text{olmalıdır.}$$

Örnek problemimize uygulayalım:

$$\frac{\partial \varepsilon_R}{\partial \alpha_1} = -2 + x(1-x)$$

$$2\int_0^1 \left(-2\alpha_1 + \alpha_1(1-x)x + x\right)\left(-2 + x(1-x)\right) dx = 0$$

$$2\int_0^1 \left[4\alpha_1 - 2\alpha_1(x - x^2) - 2x - 2x\alpha_1 + \alpha_1(x^2 - x^3) + x^2 + 2x^2\alpha_1 - \alpha_1(x^3 - x^4) - x^3\right] dx = 0$$

$$\alpha_1\left[4x - 2\left(\frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3}\right) - 2\frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + 2\frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \frac{x^5}{5}\right]\Bigg|_0^1$$

$$+ \left(-2\frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4}\right)\Bigg|_0^1 = 0$$

$$\frac{101}{30}\alpha_1 - \frac{11}{12} = 0 \quad \Rightarrow \alpha_1 = 55/202$$

Böylece tek terimle yaklaşık çözüm:

$$\boxed{u = \frac{55}{202} x(1-x)}$$ olur.

– Alt Bölge Yöntemi –

(Kalan, Artık, Hata) fonksiyonunun (integralinin) çözüm bölgesinin tamamında değil de, belli bir kısmında sıfır yapılması esasına dayanır.

Tek terimli deneme fonksiyonu için çözüm bölgesinin tamamı kullanılabilir. Fakat iki terimli çözüm için: $\int_0^{1/2} \varepsilon_R \, dx = 0$ şartı aranabilir!

Tek terimli örneğimize devam edecek olursak:

$$\int_0^1 \varepsilon_R \, dx = 0 \Rightarrow \int_0^1 [-2\alpha_1 + \alpha_1(1-x)x + x] \, dx = 0$$

Bu Moment Yöntemi uygulamasında çözülmüştü.

$\alpha_1 = 3/11$ ve $\boxed{u = 3/11 \, (x - x^2)}$ bulunur.

Terim sayısı artacak olsa; örneğin

$$\int_0^{1/2} \varepsilon_R \, dx = 0 \; ; \quad \int_0^{1/3} \varepsilon_R \, dx = 0 \; ; \quad \int_0^{2/3} \varepsilon_R \, dx = 0$$

şeklinde yeni denklemler elde edilebilir.

Sadece uygulama amacıyla tek terim için $0 \le x \le 1/2$ alt bölgesini kullanalım!

$\int_0^{1/2} \varepsilon_R \, dx = 0$ olmalıdır.

$$\left[\left(-2x+\frac{x^2}{2}-\frac{x^3}{3}\right)\alpha_1+\frac{x^2}{2}\right]\Big|_0^{1/2}=0$$

$$\left(-2\cdot\frac{1}{2}+\frac{1}{8}-\frac{1}{24}\right)\alpha_1+\frac{1}{8}=0$$

$$\alpha_1=3/22 \Rightarrow \boxed{u=(3/22)x(1-x)}$$

Sonucu elde ediliyor, fakat zayıf bir çözüm!

- Kollokasyon Yöntemi -

Hatayı çözüm bölgesinin belli noktalarında sıfır yapmaya çalışan bir yöntemdir. Yaklaşık çözümün bilinmeyen sayısı kadar farklı noktada doğal hata fonksiyonunun (ε_R) sıfırlanması gerekir. Hatayı sıfır yapacağımız noktaların seçimi olarak, çözümün hassasiyetini etkiler.

Örnek problemimiz için örneğin hatayı $x=1/2$ noktasında sıfır yapalım:

$$\varepsilon_R(1/2)=0 \Rightarrow \varepsilon_R=x+(-2+x-x^2)\alpha_1$$

$$\varepsilon_R(1/2)=\frac{1}{2}+\left(-2+\frac{1}{2}-\frac{1}{4}\right)\alpha_1=0$$

$$\frac{1}{2}-\frac{7}{4}\alpha_1=0$$

$$\alpha_1=\frac{2}{7} \qquad \boxed{u=\frac{2}{7}x(1-x)}$$

ÖDEV: 1) İKİ TERİM İÇİN
2) ÜÇ TERİM İÇİN

TÜM YÖNTEMLER İLE YAKLAŞIK ÇÖZÜM BULUP KARŞILAŞTIRIN!