

rilme hali dokuz koordinatlı bir büyüklük oluyor demektir. Vektörden karakter itibarıyla farklı olan bu yeni büyüklük *gerilme tansörü* adını alır. Yine denge denklemleri yardımı ile *dokuz koordinattan* yalnızca altı tanesinin bağımsız olduğu gösterilebilir. Bu özellik, tansör hesabında kullanılan terimlere göre, gerilme tansörünün *simetrik* olduğunu söylemekle eşdeğerdir. Genel halde, altı skalerle belirtilen bir gerilme hali, özel durumlarda, daha az sayı ile belirlenebilir. Buna göre gerilme hallerini üç sınıfa ayırmak kabildir.

Bir noktadan geçen bütün yüzey elemanlarındaki gerilme vektörlerinin şiddetleri farklı olduğu halde doğrultuları sabit kalırsa bu özel hale, *bir eksenli gerilme hali* denir. Burada gerilmesiz birçok yüzey elemanı vardır. Sıfır gerilmeli olan bu kesitler hep sabit eksenden geçerler.

Yüzey elemanlarındaki gerilme vektörlerinin doğrultuları hep aynı bir düzlem içinde kalırsa bu özel hale de *iki eksenli gerilme hali* denir. Burada gerilmesiz biricik kesit bu iki eksenin belirttiği düzlemdir.

Eğer bir noktadan geçen bütün yüzey elemanlarındaki gerilmelerin doğrultularında hiçbir özellik yoksa, bu hale *üç eksenli gerilme* denir ve burada gerilmesiz hiçbir kesit yoktur.

Aşağıdaki maddelerde gerilme halleri ayrı ayrı ele alınacaktır. İncelemede esas amaç, verilen kesitteki gerilmelerden *istenilen* kesitteki değerlere geçmektir. Bu iş yapılırken daima cisim parçasının –dört yüzlü prizma gibi– dengesi düşünülecektir. Yalnız gerilme hali bir noktadan geçen bütün yüzey elemanlarındaki gerilmeler olarak tanımlandığı için, göz önüne alınan cisim parçasının lineer boyutlarının da sonsuz küçük olması gerekecektir.

Bir cisim içerisinde gerilme hali bir noktadan diğerine değişmezse ona *homogen gerilme hali* denir. Ele alınan cisimler bu şekilde zorlanmış ise, çeşitli kesitlerdeki gerilmelerin incelenmesinde, dengesi hesaplanacak cisim parçasının artık boyutlarının sonsuz küçük olmasına gerek kalmaz.

3.4. Bir Eksenli Gerilme Hali

Genel gerilme problemleri hakkında bir fikir verebilmek için, önce çok basit olan *bir eksenli gerilme halinden* incelemeye başlayalım. Bu amaçla şekil 3.5 de görülen kalınlığı (d) olan ince bir levha ele alalım ve levhanın düşey doğrultuda şiddeti σ_1 olan çekme gerilmesi etkisi altında olduğunu düşünelim. Bu durumda yatay olan AB kesitine göre φ açısı yapan eğimli bir AC düzlem üzerindeki gerilmeleri arayalım. AB ve AC kesitleri arasındaki açı φ ile veril-

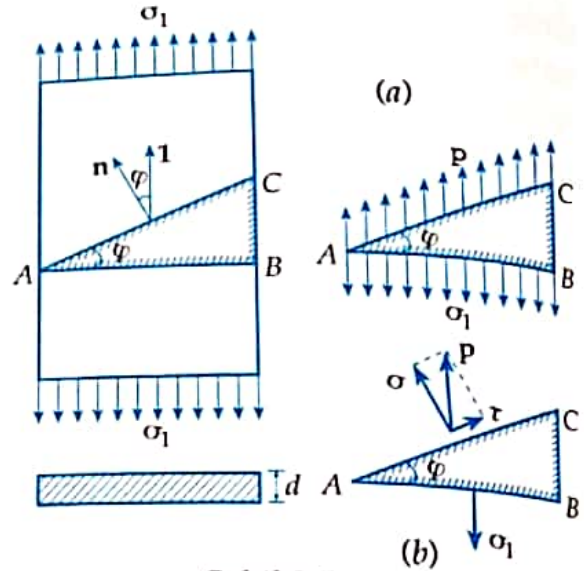
diğine göre, ABC prizmasının dengesinden

$$p \cdot AC \cdot d = \sigma_1 \cdot AB \cdot d$$

yazılabilir. Buradan

$$p = \sigma_1 \cdot \cos \varphi \quad (3.3)$$

bulunur. Şimdi p gerilmesini, biri etkidiği kesite dik ve diğerini de kesitin teğeti doğrultusunda iki bileşene ayıralım. Sırasıyla σ ve τ ile gösterilen bu bileşenler için şekil 3.5b ve (3.3) den

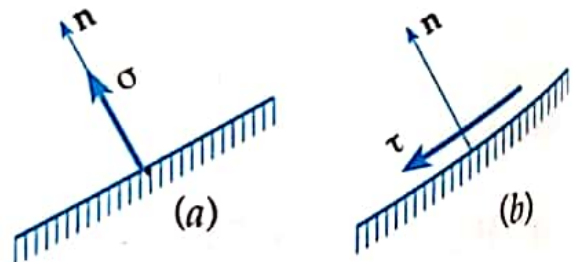


Şekil 3.5

$$\sigma = p \cdot \cos \varphi = \sigma_1 \cdot \cos^2 \varphi; \quad \tau = p \cdot \sin \varphi = \sigma_1 \cdot \sin \varphi \cdot \cos \varphi \quad (3.4)$$

yazılabilir. Denge ilkesine dayanılarak bulunan (3.4) denklemleri şekil 3.5 ile verilen σ_1 gerilmesi etkisindeki tek doğrultuda yüklenmiş cisim için genel gerilme denklemlerini oluşturur. Yani bu denklemler herhangi bir φ doğrultusundaki kesitteki gerilme değerlerinin bulunmasında kullanılabileceği için *bir eksenli gerilme halinin genel denklemleri* adını alabilir. σ_1 değeri bu gerilme halinin belirlenmesi için gereken tek değerdir. Bu özel gerilme haline *bir eksenli gerilme hali* adı verilir. Bu gerilme probleminin grafik gösterilimine geçmeden önce *normal gerilme* σ ile *kayma gerilmesi* τ için bir *işaret uyuşması* gerekir.

Eğer normal gerilmenin yönü kesitin dış normali ile çakışırsa bu gerilme *artı* sayılacak, zıt yönler *eksi* olarak kabul edilecektir, şekil 3.6a. Kayma gerilmesine gelince dış normal, matematikte pozitif sayılan yönde 90° döndükten sonra τ ile aynı yönde ise böyle kayma gerilmesi *artı* işaretli sayılacaktır; örneğin şekil 3.6b'deki kayma gerilmesi, bu ilkeye göre *artı* sayıldığı halde şekil 3.5b'deki τ gerilmesinin *eksi* işaretli olması gerekir. O halde (3.4) denkleminin ikincisinde



Şekil 3.6

$$\sigma = \sigma_1 \cdot \cos^2 \varphi$$

$$\tau = -\sigma_1 \cdot \sin \varphi \cdot \cos \varphi$$

(3.5)

gibi bir işaret değişikliği uygun olacaktır.

Kesit değıştikçe gerilmelerin değışimini grafik olarak göstermek için çeşitli yollar vardır. Bu arada en basit gösterim türü **Mohr** tarafından verilendir. Bu grafik Mohr sisteminin esası, bir kesitteki normal ve kayma gerilmelerini gösterilim noktasının (tasvir noktasının) absis ve ordinatı olarak kabul etmek ve kesit değışildikçe gösterilim (tasvir) noktasının geometrik yerini aramaktır. Analitik olarak bu işlemi gösterebilmek için önce (3.5) denklemlerini 2φ açısını kullanarak aşığıdaki gibi yazalım.

$$\left. \begin{aligned} \sigma &= \frac{\sigma_1}{2}(1 + \cos 2\varphi) \\ \tau &= -\frac{\sigma_1}{2}\sin 2\varphi \end{aligned} \right\} \quad (3.6)$$

bunlar arasında φ açısı yok edilirse

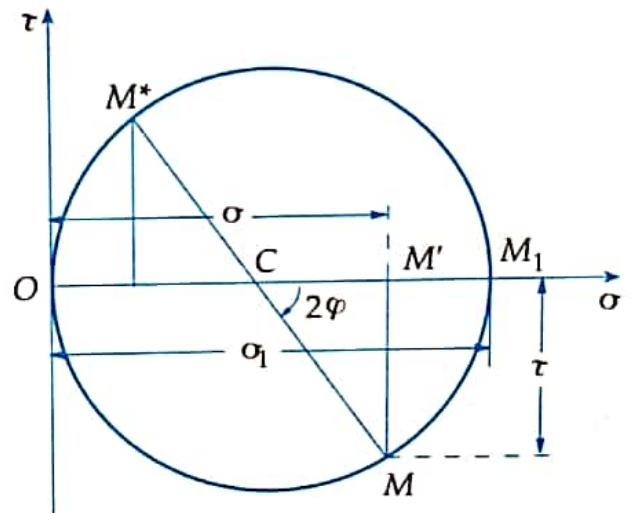
$$\left(\sigma - \frac{\sigma_1}{2}\right)^2 + \tau^2 = \left(\frac{\sigma_1}{2}\right)^2 \quad (3.7)$$

denklemini bulunur. (3.7) e göre koordinatları (σ, τ) olan gösterilim noktalarının geometrik bir dairedir. Şekil 3.7 *Mohr dairesi* adı verilen bu geometrik yeri göstermektedir. Dairenin merkezi absis eksenini üzerindedir.

Çapı σ_1 gerilmesine eşit olan gerilme dairesinde M gösterilim noktası C merkezine birleştirilecek olursa, bulunan $\angle M_1CM$ açısı kesiti tanımlayan φ açısının iki katı olur, çünkü şekil 3.7 den

$$\tan \widehat{M_1CM} = \frac{MM'}{CM'} = \frac{-\tau}{\sigma - \frac{\sigma_1}{2}} = \frac{\frac{\sigma_1}{2} \sin 2\varphi}{\frac{\sigma_1}{2} \cos 2\varphi} = \tan 2\varphi \quad (3.8)$$

yazılabilir. Bu özelliğe göre gösterilim noktası, daire üzerinde tam bir devir yaparsa, buna karşı gelen kesitler de 180 derece dönerek yine ilk durumlarına gelmiş olurlar. Yalnız açı bakımından bu karşılaşmada dikkat edilecek nokta, şekil 3.5 de, kesitler pozitif yönde φ açısı kadar dönerken, M gösterilim noktasının ters yönde 2φ kadar dönmesidir.



Şekil 3.7

Bütün kesitlerdeki gerilmeleri toplu bir halde veren gerilme dairesinden şu özellikler kolaylıkla görülebilir. Normal gerilmelerin ekstremum değerleri

$$\sigma_{enb} = \sigma_1 \quad \text{ve} \quad \sigma_{enk} = 0$$

dir. *Asal normal gerilme* adını alan bu gerilmelerin kesitleri sırasıyla $\varphi = 0$ ve $\varphi = 90^\circ$ olduğundan birbirlerine diktir. Kayma gerilmesinin ekstremum değerleri ise

$$\tau_{enb} = +\frac{\sigma_1}{2} \quad \text{ve} \quad \tau_{enk} = -\frac{\sigma_1}{2} \quad (3.10)$$

dir. Geometrik anlamları yarıçaptan başka bir şey olmayan bu değerleri (3.9) ile

$$\tau_{enb} = \pm \left(\frac{\sigma_{enb} - \sigma_{enk}}{2} \right) \quad (3.11)$$

şeklinde de ifade edebiliriz. En büyük ve en küçük kayma gerilmelerinin $\varphi = 45^\circ$ ve $\varphi = 135^\circ$ ile tanımlanan ve birbirlerine dik olan kesitlerde bulunacağı açıktır. *Kayma asal kesitleri* adını alan bu kesitlerle, normal asal kesitler arasında 45 derecelik bir fark vardır.

Şimdi de birbirlerine *dik* herhangi iki kesitteki gerilme durumunu inceleyelim. Mohr gösterelim sisteminde bu kesitlerdeki durum, bir çapın iki ucundaki noktalara karşı gelir, şekil 3.7 de M ve M^* gibi. Böyle noktalarda

$$\tau(\varphi) = -\tau\left(\varphi + \frac{\pi}{2}\right) \quad (3.12)$$

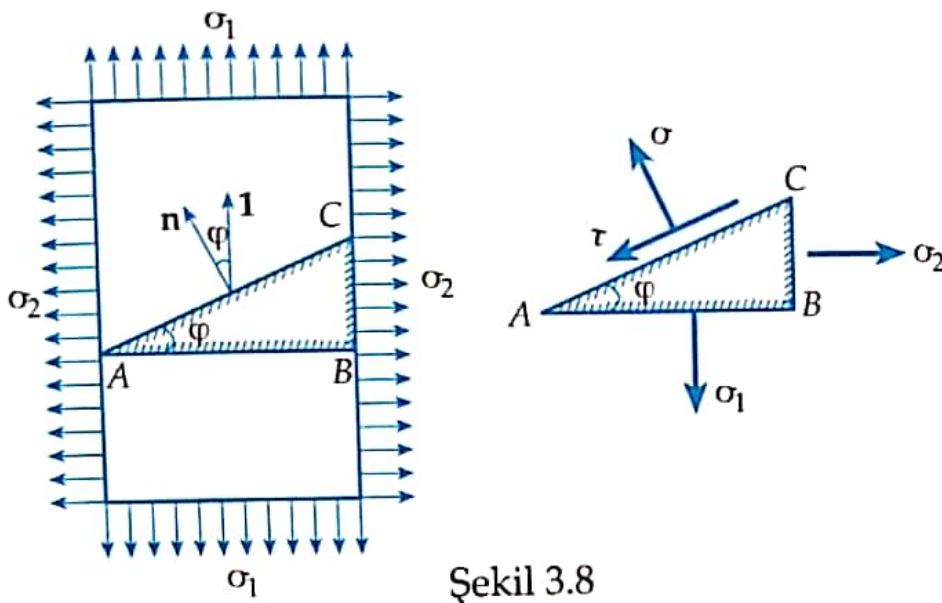
ve

$$\sigma(\varphi) + \sigma\left(\varphi + \frac{\pi}{2}\right) = \sigma_1 = \text{sabit} \quad (3.13)$$

olduğu kolayca görülür.

3.5. İki Eksenli Gerilme Hali

Bir önceki problemde olduğu gibi yine burada da d kalınlıklı ince bir levha düşünelim ve levhanın şekil 3.8 de görüldüğü gibi birbirine dik iki doğrultuda σ_1 ve σ_2 gerilmeleri ile yüklendiğini varsayalım. Bu yükleme altında herhangi bir AC doğrultusundaki gerilmeleri, σ_1 , σ_2 ve kesiti tanımlayan φ



Şekil 3.8

açısı cinsinden bulmaya çalışalım. Bu amaçla ABC prizmasının yüzlerine etkiyen kuvvetlerle dengesi düşünülecek olursa, σ doğrultusunda yazılacak bir izdüşüm denklemi

$$\sigma d \overline{AC} - \sigma_1 d \overline{AB} \cos \varphi - \sigma_2 d \overline{BC} \sin \varphi = 0$$

olur. Buradan

$$\sigma = \sigma_1 \cos^2 \varphi + \sigma_2 \sin^2 \varphi \quad (3.14)$$

elde edilir. AC doğrultusunda yazılacak diğer izdüşüm denklemi ise

$$\tau \overline{AC} d + \sigma_1 \overline{AB} d \sin \varphi - \sigma_2 \overline{BC} d \cos \varphi = 0$$

verir ve buradan

$$\tau = -(\sigma_1 - \sigma_2) \sin \varphi \cos \varphi \quad (3.15)$$

bağıntısı elde edilir. (3.14) ve (3.15) denklemleri, bir eksenli halde bulunan (3.5) denklemlerinin genelleştirilmiş halinden başka bir şey değildir. $\sigma_2 = 0$ alınmakla bunlardan (3.5) hemen bulunur. Aynı şekilde, σ_1 ve σ_2 gerilmeleri verilmek koşulu ile (3.14) ve (3.15) sonuçları, iki eksenli gerilme halini belirten ifadelerdir, çünkü bunlar yardımıyla bütün kesitlerdeki gerilme durumu bulunabilir.

Çeşitli kesitlerdeki gerilmeleri grafik olarak tasvir etmek için (σ, τ) Mohr düzlemi düşünülebilir. Yine burada da bir kesitteki normal ve kayma gerilmelerini tasvir noktasının koordinatları olarak gösterelim. Kesit değişikçe tasvir noktalarının geometrik yerini bulmak için, (3.14) ve (3.15) arasında φ açısını yok edelim. Bu amaçla önce σ ve τ yu 2φ açısı cinsinden yazarsak

$$\left. \begin{aligned} \sigma &= \left(\frac{\sigma_1 + \sigma_2}{2} \right) + \left(\frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2} \right) \cos 2\varphi \\ \tau &= - \left(\frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2} \right) \sin 2\varphi \end{aligned} \right\} \quad (3.16)$$

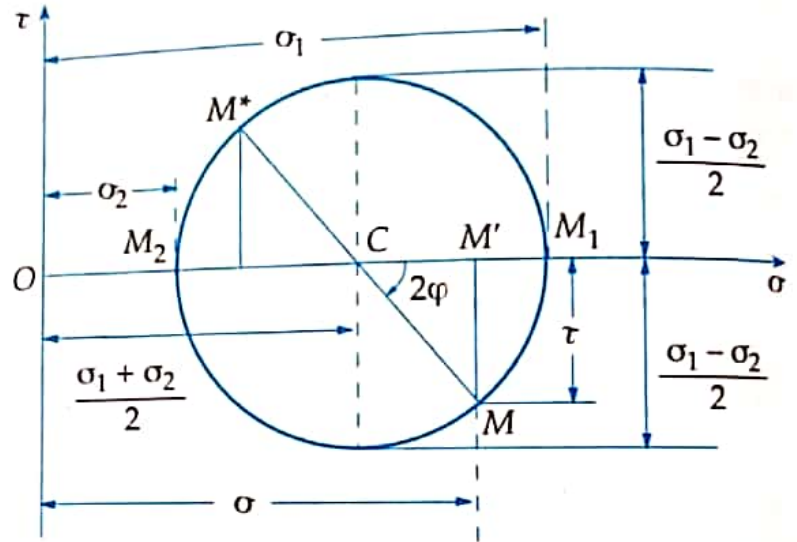
veya buradan 2φ yok edilirse

$$\left[\sigma - \left(\frac{\sigma_1 + \sigma_2}{2} \right) \right]^2 + \tau^2 = \left(\frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2} \right)^2 \quad (3.17)$$

denklemini bulunur ki bu da iki eksenli Mohr dairesinin denklemdir. Merkezinin absisi $\frac{\sigma_1 + \sigma_2}{2}$ ve yarıçapı

$\frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2}$ olan bu daire, şekil

3.9 da gösterilmiştir. M tasvir noktası C merkezi ile birleştirilecek olursa bulunacak $\widehat{M_1CM}$ açısı, kesiti tanımlayan φ açısının yine iki katıdır. Çünkü şekil 3.9 ve (3.16) denklemlerinden



Şekil 3.9

$$\tan \widehat{M_1CM} = \frac{MM'}{CM'} = \frac{-\tau}{\sigma - \left(\frac{\sigma_1 + \sigma_2}{2} \right)} = \frac{\frac{1}{2}(\sigma_1 - \sigma_2) \sin 2\varphi}{\frac{1}{2}(\sigma_1 - \sigma_2) \cos 2\varphi} = \tan 2\varphi$$

olduğu görülür. Mohr dairesinden normal gerilmelerin en büyük ve en küçük değerlerinin

$$\sigma_{enb} = \sigma_1 \quad \text{ve} \quad \sigma_{enk} = \sigma_2 \quad (3.18)$$

olduğu hemen görülür. Bunlara asal normal gerilme denir. Kayma gerilmelerinin en büyük ve en küçük değerlerinin de aynı şekilden

$$\tau_{enb} = \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2} = -\tau_{enk} \quad (3.19)$$

edeceği anlaşılmış olur. İki asal kesit takımının birbirlerine göre 45 derece dönük oldukları yine şekil 3.9 dan kolaylıkla görülebilir.

Birbirlerine dik, herhangi iki kesitteki gerilme durumu Mohr tasvir sisteminde, çap karşısı M ve M^* gibi iki nokta ile gösterileceğinden

$$\tau(\varphi) = -\tau\left(\varphi + \frac{\pi}{2}\right) \quad (3.20)$$

ve

$$\sigma(\varphi) + \sigma\left(\varphi + \frac{\pi}{2}\right) = \sigma_1 + \sigma_2 = \text{sabit} \quad (3.21)$$

olacağını şekilden görebiliriz.

Yukarıda iki eksenli gerilme hali, *asal normal gerilme* ve onun kesitleri ile verilmiştir. İki eksenli gerilme problemi daha genel olarak ele alınabilir. Bunun için asal kesitler yerine herhangi iki dik doğrultudaki kesitlere etkiyen gerilmeler düşünülebilir. Örneğin şekil 3.10 da normallerinin doğrultuları x ve y olan iki kesiti ele alalım. Normali x olan kesitteki gerilmeler σ_x ve τ_{xy} ve normali y olan kesitteki değerler de σ_y ve τ_{yx} olarak verilmiş olsun. –Kayma gerilmelerindeki iki indisten birincisi kesitin normalini, diğeri gerilmenin doğrultusunu gösterir. –Şimdi normali n olan herhangi ED kesitin-
deki σ ve τ gerilmelerini bulmak isteyelim. Her şeyden önce (3.20) denkleminde göre birbirlerine dik kesitlerdeki kayma gerilmelerinin değerlerinin eşit olması gerekeceğinden

$$|\tau_{xy}| = |\tau_{yx}| \quad (3.22)$$

yazabiliriz. Bu durumda gerilme halini belirtmek için σ_x , σ_y ve τ_{xy} verilmesi yetecektir. Şekil 3.10 daki prizmanın dengesinin σ ve τ gerilmeleri için

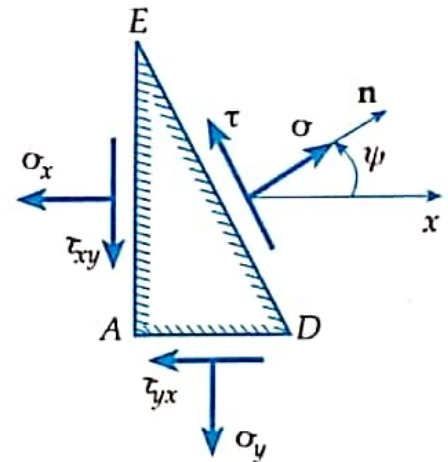
$$\sigma = \sigma_x \cos^2 \psi + \sigma_y \sin^2 \psi + 2\tau_{xy} \sin \psi \cos \psi \quad (3.23)$$

ve

$$\tau = -(\sigma_x - \sigma_y) \sin \psi \cos \psi + \tau_{xy} (\cos^2 \psi - \sin^2 \psi) \quad (3.24)$$

yazılabilir. Mohr dairesinin denklemini elde etmek için formülleri 2ψ açısı ile yazarsak

$$\sigma = \left(\frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} \right) + \left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \right) \cos 2\psi + \tau_{xy} \sin 2\psi \quad (3.25)$$



Şekil 3.10

ve

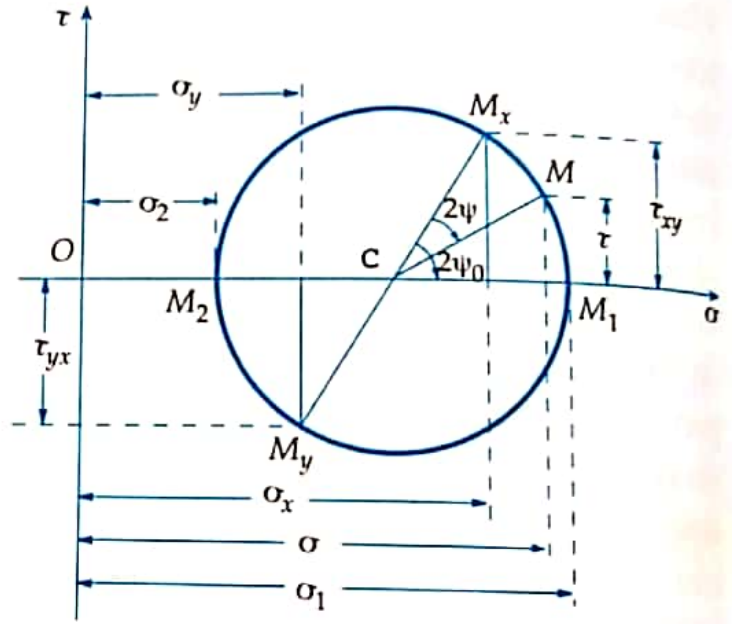
$$\tau = -\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right) \sin 2\psi + \tau_{xy} \cos 2\psi \quad (3.26)$$

bulunur. Burada ψ açısı yok edilirse

$$\left[\sigma - \left(\frac{\sigma_x + \sigma_y}{2}\right)\right]^2 + \tau^2 = \left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2 \quad (3.27)$$

sonucu elde edilir.

Şekil 3.11 de gösterilen daire, çap karşısı M_x ve M_y gösterilim noktaları yardımıyla hemen çizilebilir. Kesiti tanımlayan açılar x doğrultusundan itibaren ölçüldükleri için, Mohr dairesi üzerinde 2ψ açılarının M_x noktasından itibaren ters yönde alınması gerekir. Şekilde M gösterilim noktasının σ absisi ilgili kesitteki normal gerilmeyi, τ ordinatı ise aynı kesitin kayma gerilmesini gösterir. Daire yardımıyla gerilme haline ait çeşitli sorulara kolaylıkla yanıt verilebilir.



Şekil 3.11

Önce $\tau = 0$ olan asal kesitleri arayalım, bunlar M_1 ve M_2 tasvir noktalarına karşı gelirler. Asal kesitleri tanımlayan ψ_0 açısı Şekil 3.11 den

$$\tan 2\psi_0 = \frac{2\tau_{xy}}{\sigma_x - \sigma_y} \quad (3.28)$$

olarak elde edilir. (3.28) denklemi ψ_0 ve $\psi_0 + \frac{\pi}{2}$ gibi birbirlerine dik olan iki doğrultu verir. Asal normal gerilmeler ise

$$\left. \begin{aligned} \sigma_1 &= \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} + \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2} \\ \sigma_2 &= \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} - \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2} \end{aligned} \right\} \quad (3.29)$$

olup şekilde görüldüğü gibi bu gerilmeler M_1 ve M_2 noktaları ile belirlenir. (3.28) denklemi $\tau = 0$ koşulundan elde edildiği gibi $\partial\sigma/\partial\psi = 0$ yazılarak da bulunabilir. Buna göre asal kesitleri, τ gerilmesi sıfır olan kesitler olarak tanımladığımız gibi, σ gerilmesi *en büyük ve en küçük* olan kesitler olarak da düşünebiliriz.

Kayma gerilmelerinin en büyük ve en küçük değerlerine gelince, Mohr dairelerinin yarıçapından

$$\tau_{enb} = \pm \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2} = \pm \left(\frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2}\right) \quad (3.30)$$

edeceğini kolayca görülebilir.

Özet olarak iki eksenli gerilme problemi ile ilgili bütün büyüklüklerin σ_x , σ_y ve τ_{xy} gibi üç değere bağlı olarak bulunabileceği söylenebilir. Yani genel olarak iki eksenli gerilme problemi *simetrik* olan

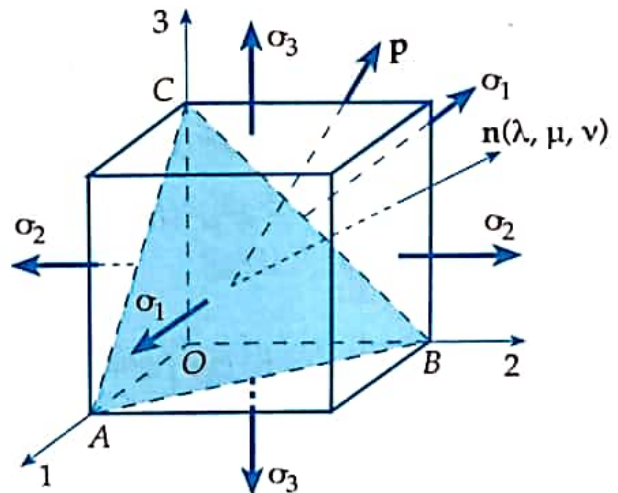
$$\begin{pmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} \\ \tau_{yx} & \sigma_y \end{pmatrix} \quad (3.31)$$

matrisi ile belirlenebiliyor denebilir.*

3.6. Üç Eksenli Gerilme Problemi

Şekil 3.12 de görülen cisim birbirlerine dik üç doğrultuda çekmeye maruzdur. Gerilmeler sırasıyla σ_1 , σ_2 ve σ_3 olarak verilmiş olsun. Şimdi bu doğrultulara göre eğik bulunan herhangi bir ABC kesitindeki $\mathbf{p}$ gerilme vektörünün hesabı istensin. Kesitin *birim normal vektörü* $\mathbf{n}$ ve bunun 1, 2, 3 takımındaki koordinatları λ , μ , ν olarak verilmiş olsun. Bu durumda

$$\lambda^2 + \mu^2 + \nu^2 = 1 \quad (3.32)$$



Şekil 3.12

* Mohr tasvir sisteminde kayma gerilmeleri için kabul edilen işaret ilkesi aynı kayma gerilmeleri bir tensörün koordinatları olarak ele alınırsa tanımlanacak işaret ilkesinden farklıdır. İkinci halde işaretleme dik kesitlerdeki kayma gerilmelerinin işaretlerinin de birbirine eşit olacağı esasına dayanır.