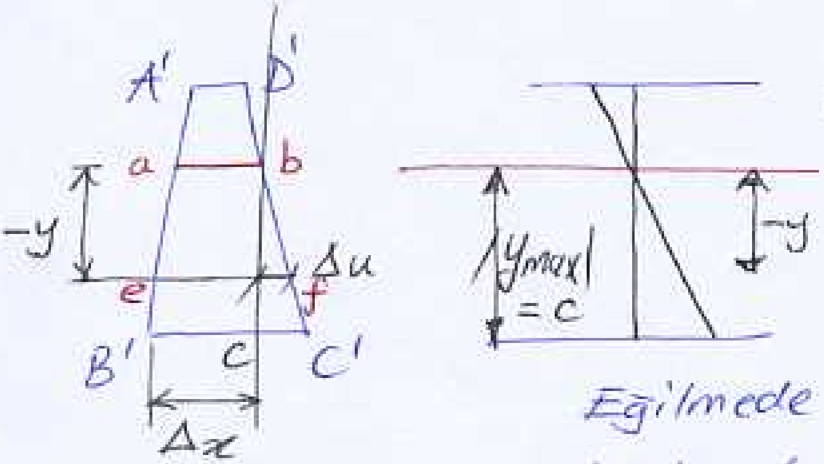
Basit Eğilme (Bükülme)

Bernoulli (Jacop) ve Navier Hipotezine göre kiriş eksenine dik olarak alınan düzlemler (kesitler) deformasyondan sonra da düzlem olarak kalırlar.

Nötr (tarafsız) yüzey; (veya nötr eksen) eğilmeye maruz kirişin gerilme ve şekil değiştirmenin sıfır olduğu yerlerdir.



ab lifi ne uzuyor, ne kısalıyor!

Eğilmede deformasyon kabulü

Bir ef lifini dikkate alacak olursak; bu lifte meydana gelen uzamayı Δu ile gösterelim.

$$\varepsilon_x = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta u}{\Delta x} = \frac{du}{dx}$$ olacaktır.

Eğilmeye maruz bir kiristeki bir lifin şekil değiştirmesi, bu lifin nötr yüzeyden uzaklığı ile doğru orantılıdır diye biliriz!

$$\varepsilon_x = b \cdot y$$ şeklinde ifade edebiliriz.

Bu durum daha önce burulma probleminde de benzer biçimdeydi. (Dairesel şaftta kayma şekil değiştirmesi merkezden olan uzaklıkla orantılıydı) Bu ifadeler düşey eksene göre simetrik olan kesitler için geçerlidir!

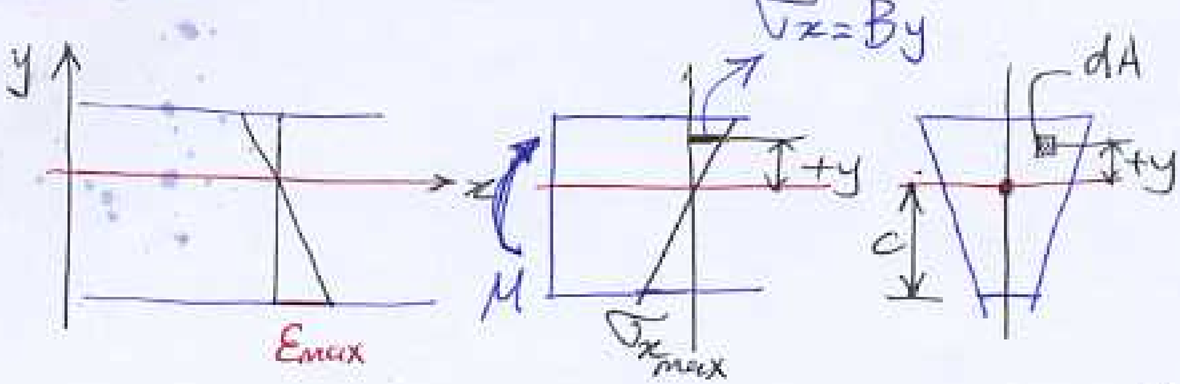
Elastik Eğilme Formülü

Hooke bağıntısına göre

$$\sigma_x = E\,\varepsilon_x$$ şeklinde veriliyordu.

Yani $$\sigma_x = B \cdot y$$ şeklinde de ifade edilebilir!

Yani $B = bE$ eşitliğini sağlayan keyfi bir sabittir.



Yazılacak olan iki denge denklemiyle:

$\Sigma F_x = 0 \qquad \int_A \sigma_x \, dA = 0 \Rightarrow \int By\,dA = 0$

$B \neq 0$ olacağından ; $\int_A y\,dA = 0$ olabilir ancak

Bu da tanım gereği $\int_A y\,dA = \bar{y}A$ (alan merkezi = centroid) olduğundan ;

$\bar{y}A = 0$ olması gerektiğini gösterir.

A sıfırdan farklı (alan) olduğundan; $\bar{y} = 0$ olmalıldır. Yani nötr eksen, kesitin alan (ağırlık) merkezinden geçmelidir.

2. şart (z ekseni) etrafındaki momentlerin toplamı sıfır olmalıdır.

$\Sigma M_x = 0 \quad ; \quad M + \int_A (\sigma_x dA)\,y = 0$

$M = -B\int_A y^2 dA$

Tanım gereği $\int_A y^2 dA$ terimi alanın ikinci momentini (atalet momentini) gösterir.

$M = -B \cdot I \Rightarrow B = -\frac{M}{I} \Rightarrow \sigma_x = -\frac{M}{I}y$ olur!

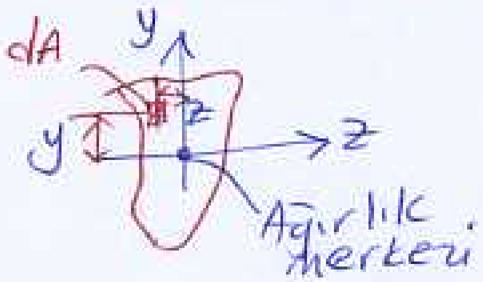
σ_{max} $y = y_{max} = c$ olduğunda görülür.

$$\sigma_{max} = \frac{M \cdot c}{I}$$

Basit eğilme halinde gerilme tansörü matris formu

$$\begin{pmatrix} \sigma_x & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$ halini alır!

Y eksenine göre simetrik olmayan kiriş kesiti için

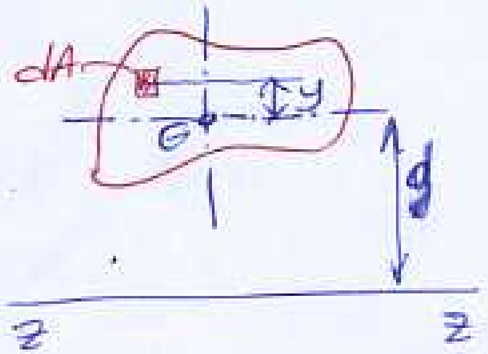


$$M_y = \int (B y\, dA)_z = B \int y z\, dA$$

Bu tanım gereği çarpım atalet momenti olarak bilinir.

Paralel eksen teoremi

Eğer bir kesitin kendi alan merkezinden geçen eksenlere göre atalet momenti biliniyorsa; bu asal eksenlere paralel diğer eksenlere göre atalet momenti şu şekilde bulunabilir.

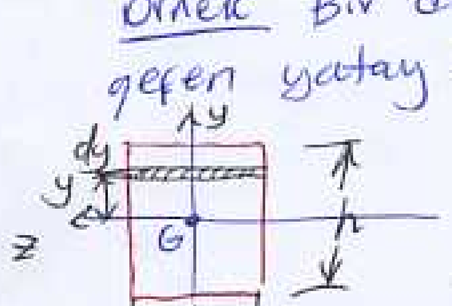


$$I_{zz} = \int_A (d+y)^2 dA$$

$$I_{zz} = d^2 \int_A dA + \underbrace{2d \int_A y\, dA}_{=0} + \int_A y^2 dA$$

$$I_{zz} = A d^2 + I_G$$ olacaktır.

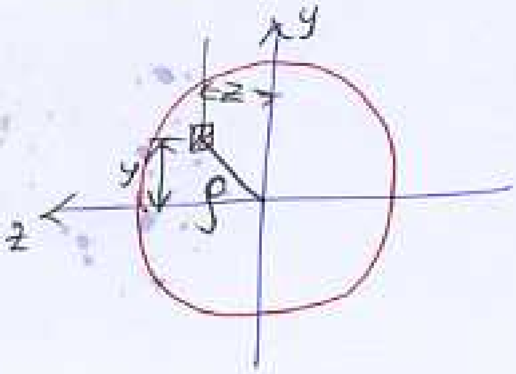
Örnek Bir dikdörtgenin ağırlık merkezinden geçen yatay eksene göre atalet momenti?



$$I_{zz} = I_G = \int_A y^2 dA = \int_{-h/2}^{+h/2} y^2 \cdot b\, dy = b \frac{y^3}{3} \Big|_{-h/2}^{+h/2}$$

$$I_{zz} = bh^3/12$$

Dairesel bir kesitte Polar atalet momenti?



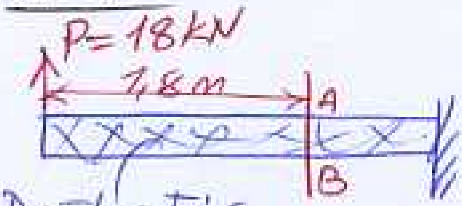
$\rho^2 = y^2 + z^2$ olduğu görülecektir.

$$J = \int_A \rho^2 dA = \int_A (y^2 + z^2)\, dA$$

$$J = I_{yy} + I_{zz} = 2 I_{zz}$$

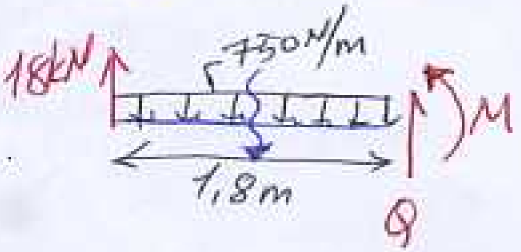
$$I_{yy} = I_{zz} = J/2 = \pi c^4/4 = \frac{\pi r^4}{4} = \frac{\pi D^4}{64}$$

Örnek



Douglas Fir ahşabı 750N/m

AB kesitinde eğilmeden ötürü maksimum gerilm



$+\uparrow \Sigma F_z = 0 \Rightarrow 18000N - 1{,}8 \cdot 750 + Q = 0$

$Q = -16650\ N$

$\circlearrowleft + \Sigma M = 0 \Rightarrow 18000 \cdot 1{,}8 - (750 \cdot 1{,}8) \cdot 0{,}9 - M =$

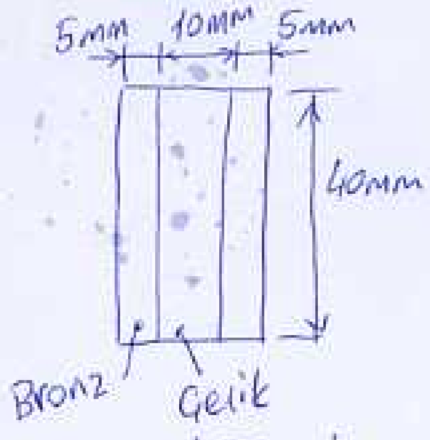
$M = 31185\ Nm$

$$I_{zz} = \frac{bh^3}{12} = \frac{0{,}3 \times 0{,}4^3}{12} = 0{,}0016\ m^4$$

$$\sigma_{max} = \frac{M \cdot c}{I} = \frac{31185(Nm) \cdot 0{,}2m}{0{,}0016\ m^4} \Rightarrow$$

$\sigma_{max} = 3898125\ N/m^2 \cong 3{,}9\ MPa$

Kompozit kirişler için hesap

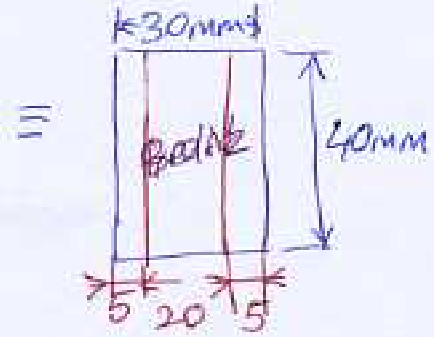


$E_b = 100\,GPa \qquad M = 2\,kN.m$

$E_ç = 200\,GPa$

Kesitin bronz eşdeğerini bulmak için:

$n = E_ç / E_b = 200\,GPa / 100\,GPa = 2$



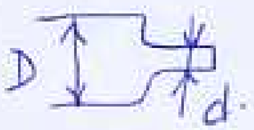
$I = \frac{1}{12} b h = 160 \times 10^{-9}\, m^4$

$\sigma_{m\,bronz} = \frac{M.c}{I} = \frac{2 \times 10^{3}\, Nm.\,(20 \times 10^{-3} m)}{160 \times 10^{-9}\, m^4}$

$\sigma_{m\,bronz} = 250\,MPa$ (Bronz eşdeğer kesit için)

Çelik eşdeğerinde $\sigma_{M\,çelik} = n . \sigma_{m\,bronz} = 500\,MPa$

Çentik Etkisi için

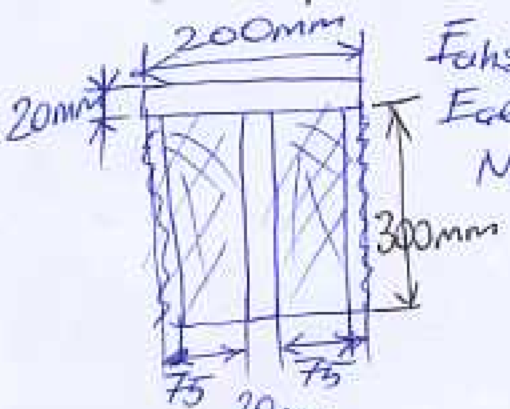


veya

$\sigma_m = K . \frac{M}{I} c$ (K: Gerilme yığılması faktörü)

Tablo veya grafiklerden bulunur.

Örnek problem 4.3

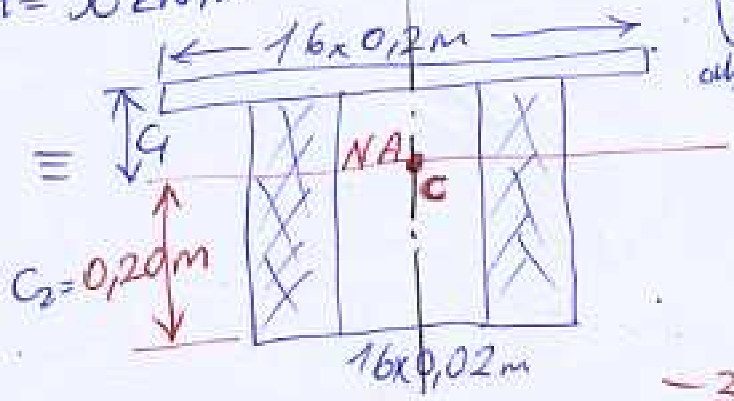


$E_{ahşap} = 12{,}5\,GPa$

$E_{çelik} = 200\,GPa$

$M = 50\,kNm$

$n = E_ç / E_a = 16$



$I = 2{,}19 \times 10^{-3}\, m^4$

$\sigma_{m\,ahşap} = \frac{M.c_2}{I}$

$= 4{,}57\,MPa$

$c = y_{max} = 60/2 = 30\,mm = 0{,}03\,m$

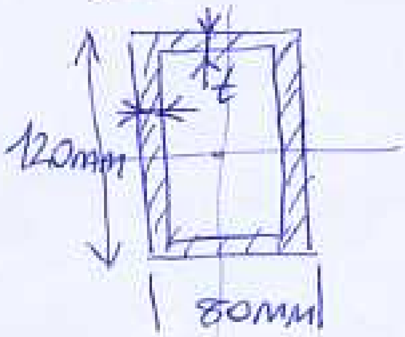
$I = bh^3/12 = 1/12\,(0{,}02\,m)(0{,}06\,m)^3 = 360 \times 10^{-9}\,m^4$

$M = \frac{I}{c}\sigma_m = \frac{360 \times 10^{-9}\,m^4}{30 \times 10^{-3}\,m}\left(250 \times 10^6 \frac{N}{m^2}\right) = 3\,kN\text{-}m$

$M = P.L \Rightarrow P = M/L = 3\,kNm / 1\,m = 3\,kN$

— o —

örnek Problem 4.1



Aluminyum alasımı (Neglecting the effect of fillets)

$\sigma_y = 150\,MPa$

$\sigma_u = 300\,MPa$

$E = 70\,GPa$

$t = 8\,mm$

Safety factor : 3

a) en büyük moment?

b) eğrilik yarıçapı?

a) Allowable stress : $\sigma_{all} = \sigma_u / F.S. = 100\,MPa \leq \sigma_y$

demek ki elastik bölgedeyiz.

$I = \frac{1}{12}(0{,}08)(0{,}12)^3 - \frac{1}{12}(0{,}064)(0{,}104)^3 = 5{,}52 \times 10^{-6}\,m^4$

$c = y_{max} = 120/2 = 60\,mm = 0{,}06\,m$

$M = \frac{I}{c} \cdot \sigma_{all} = 9{,}2\,kN\text{-}m$

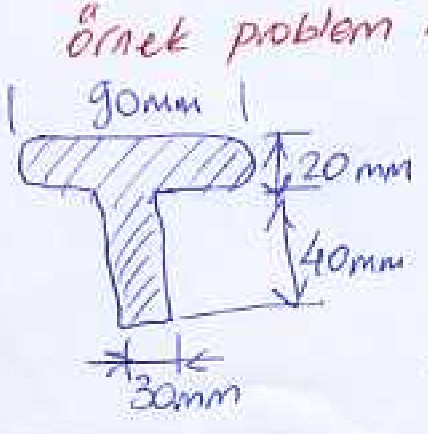
mili $= 10^{-3}$

mikro $= 10^{-6}$

b) $\varepsilon_m = \frac{\sigma_{all}}{E} = \frac{100\,MPa}{70\,GPa} = 1429\,\mu$

$\varepsilon_m = \frac{c}{\rho} \Rightarrow \rho = c/\varepsilon_m = \frac{0{,}06\,m}{1429\,\mu} \Rightarrow \rho = 42\,m$

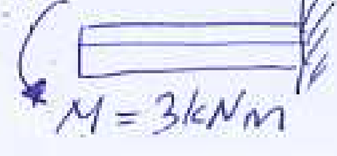
örnek problem 4.2



Döküm demir kiriş $3\,kN.m$'lik moment etkisinde eğilmeye zorlanıyor. $E = 175\,GPa$ olarak biliniyor

a) maksimum çekme ve basınç gerilmesi

b) eğrilik yarıçapı?



Eğilmeden ötürü oluşan normal gerilme:

$\sigma_x = \frac{M}{I} y$; En büyük normal gerilme ise:

$$\sigma_m = \frac{M}{I} y_{max}$$

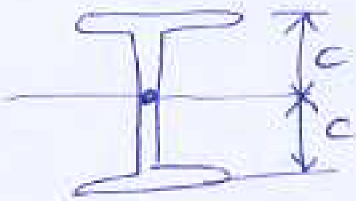
Elastik kesit modülü (section modulus) $(SM) = I / y_{max}$ şeklinde tanımlanırsa:

$$\sigma_m = \frac{M}{(SM)} \text{ olur.}$$

Bu formülden anlaşılacağı gibi kirişlerin kesitleri (SM) değeri olabildiğince büyük şekilde tasarlanmalıdır ki, oluşacak gerilmeler makul seviyelerde kalsın. Ya da aynı malzemeyle daha fazla yük taşınabilsin!

Eğilme momenti nedeniyle şekil değiştiren bir kirişin eğriliği (curvature):

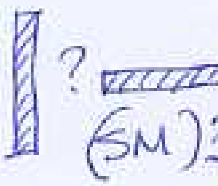
$$\frac{1}{\rho} = \frac{\varepsilon_m}{c}$$



ε_m: Maksimum uzama değeridir.

Elastik bölgede geçerli olmak üzere

$\varepsilon_m = \sigma_m / E$ olduğunu biliyoruz.

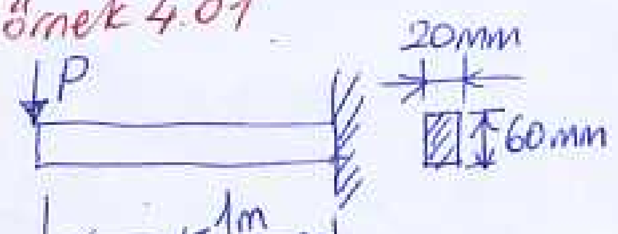


$$\frac{1}{\rho} = \frac{\sigma_m}{Ec} = \frac{1}{Ec}\frac{Mc}{I} \Rightarrow \frac{1}{\rho} = \frac{M}{EI}$$

$$\left(\varepsilon_x = -\frac{y}{c}\varepsilon_m \right)$$

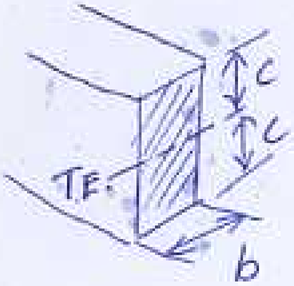
ρ: Eğrilik yarıçapı

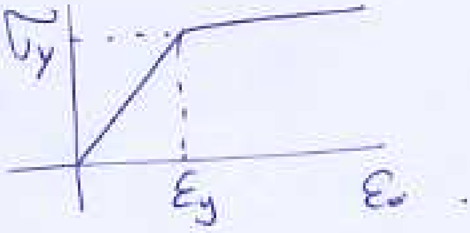
örnek 4.01



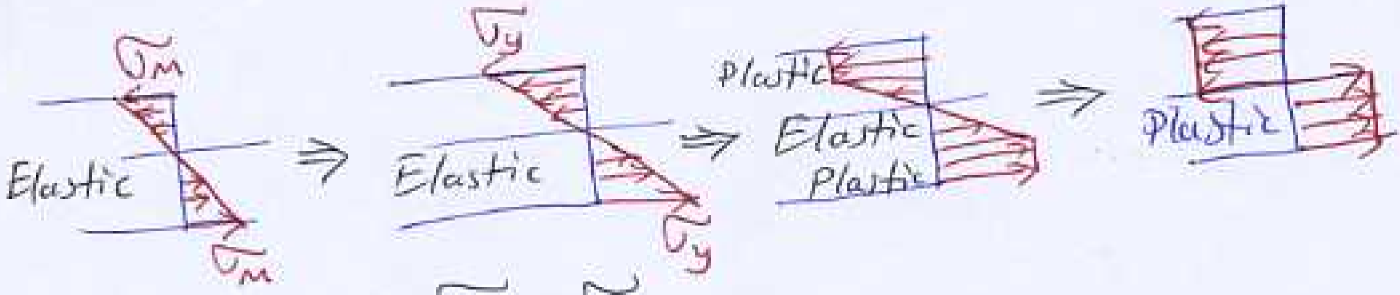
Çelik kirişin malzeme akma sınırı 250 MPa olduğuna göre uygulanabilecek en büyük P yükünü bulunuz!

Elasto-Plastik Malzemelerin Eğilmesi

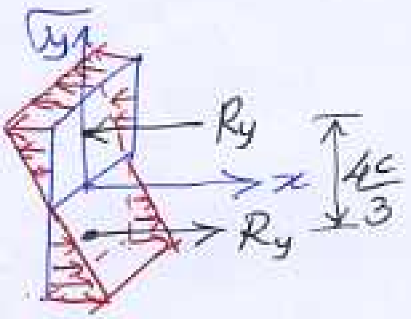


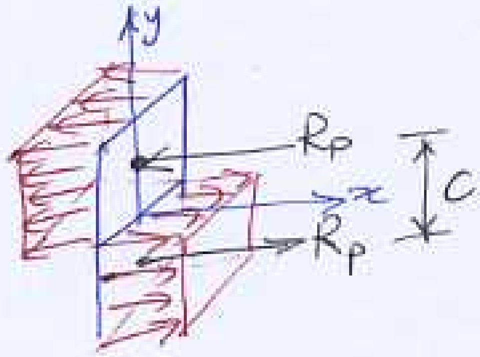


$$\sigma_m = \frac{Mc}{I}$$



$\sigma_{max} < \sigma_y$ $\qquad$ $\sigma_{max} = \sigma_y$





$$R_y = \frac{1}{2} bc\sigma_y$$

$$M_y = \left(\frac{4}{3}c\right)R_y = \frac{2}{3} bc^2\sigma_y$$

$$R_p = b.c.\sigma_y$$

$$M_p = cR_p = bc^2\sigma_y$$

$$\Rightarrow \boxed{M_p = \frac{3}{2} M_y}$$

En genel halde (diğer kesit şekline sahip kirişler)

$$M_p = k.M_y \Rightarrow k = M_p / M_y$$

Plastik kesit modülü Z ile tanımlanırsa: ve Elastik kesit modülü :(SM)

$$M_p = Z\sigma_y$$

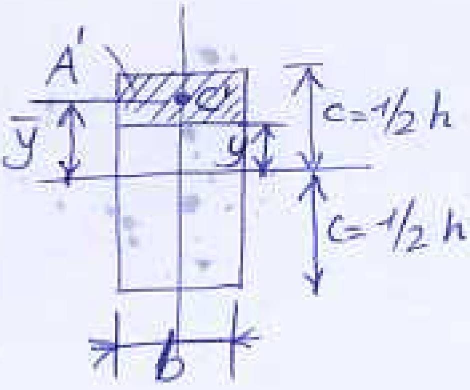
$$\boxed{k = \frac{Z}{SM}}$$

$$Z = \frac{M_p}{\sigma_y} = \frac{bc^2\sigma_y}{\sigma_y} = bc^2$$

$$\boxed{Z = bh^2/4}$$

$\boxed{SM = bh^2/6}$ idi $\Rightarrow$ Dikdörtgen için $k = \frac{3}{2}$ olur!

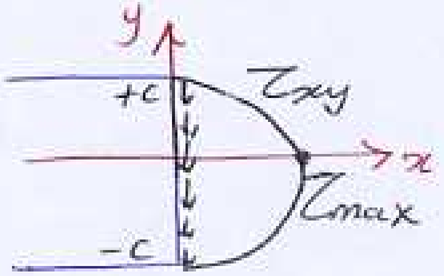
Kirişlerde Kayma Gerilmesinin Bulunması



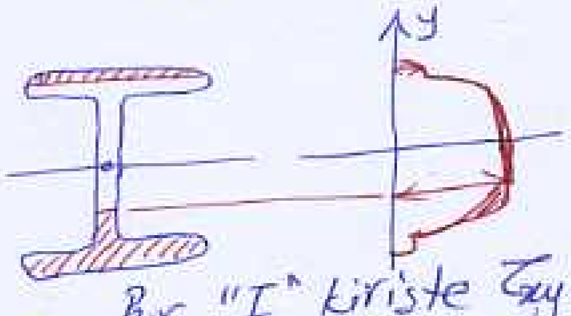
$b \leqslant 1/4\,h$ ise kayma gerilmesinin (τ_{xy}) değişimi ortalama kayma gerilmesi dağılımının %0,8 inden daha az olmaktadır.

Bu tip kirişler için

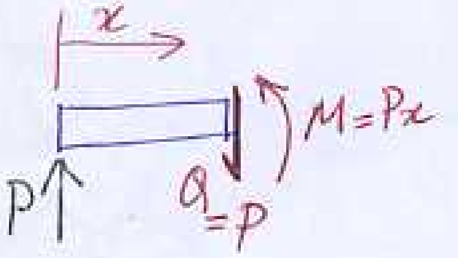
$$\tau_{xy} = \frac{Q.S}{I.t}$$ kullanılabilir.

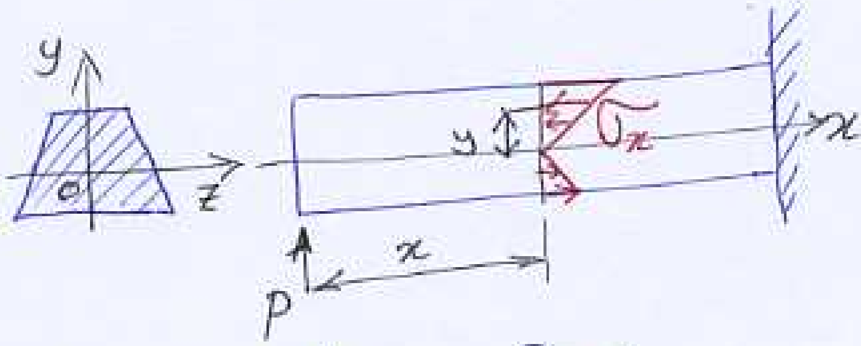


veya

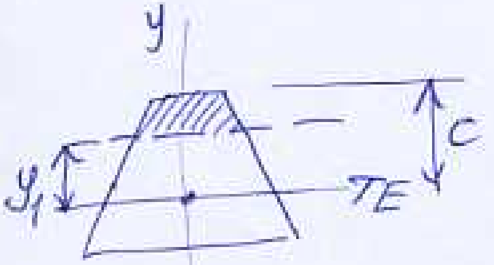


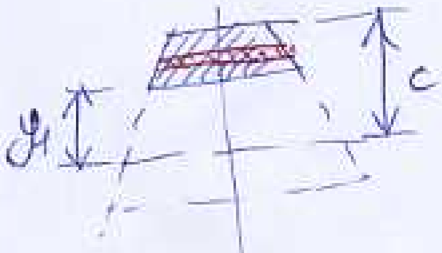
Bir "I" kirişte τ_{xy} dağılımı

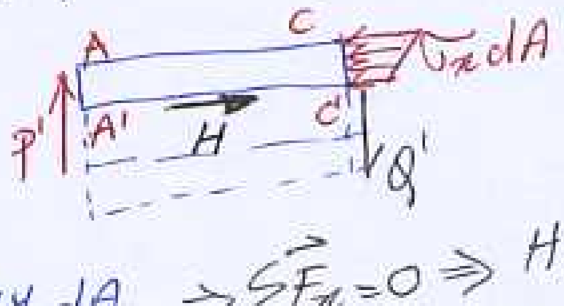




$$\sigma_x = -\frac{My}{I} = -\frac{Pxy}{I}$$







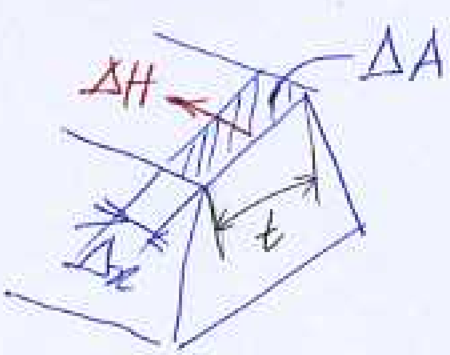
$$\sigma_x dA = -\frac{Pxy}{I} dA \Rightarrow \sum \vec{F}_x = 0 \Rightarrow H - \int \frac{Pxy}{I} dA = 0$$

$$H = \frac{Px}{I} \int_{y_1}^{y=c} y\, dA$$

Statik moment tanımı hatırlanırsa:

$$S = \int y\,dA \Rightarrow S = A \cdot \bar{y}$$

$H = \dfrac{PS}{I} \cdot x$ olur $\quad q = \dfrac{Q \cdot S}{I}$ kayma akısı olarak tanımlan[illegible]



Kayma gerilmesi (ortalama) dağılımı (bir kirişte)

$$\Delta H = q \cdot \Delta x = \frac{QS}{I}\Delta x = \frac{Q \cdot S}{I}\Delta x$$

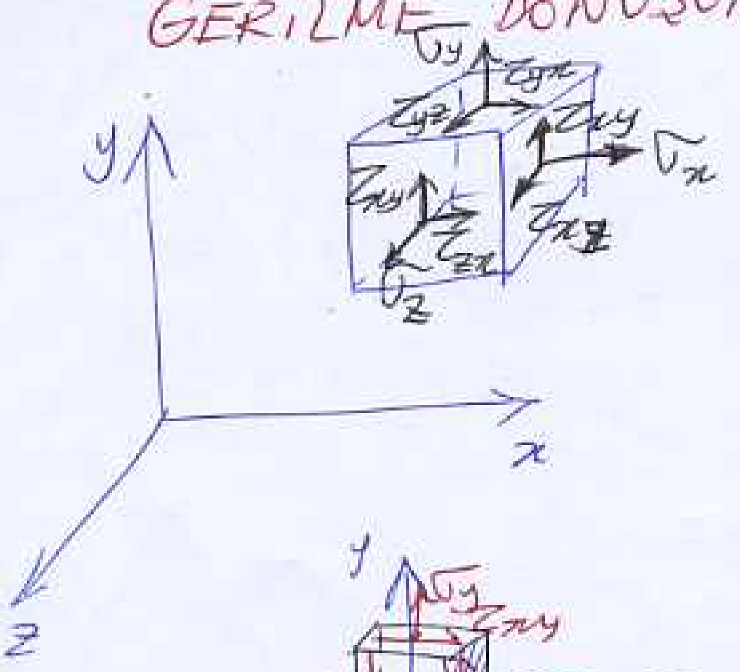
$$\tau_{Ave} = \frac{\Delta H}{\Delta A} = \frac{Q \cdot S}{I}\frac{\Delta x}{(t \cdot \Delta x)} = \frac{Q \cdot S}{I \cdot t}$$

elde edilmiş olur!

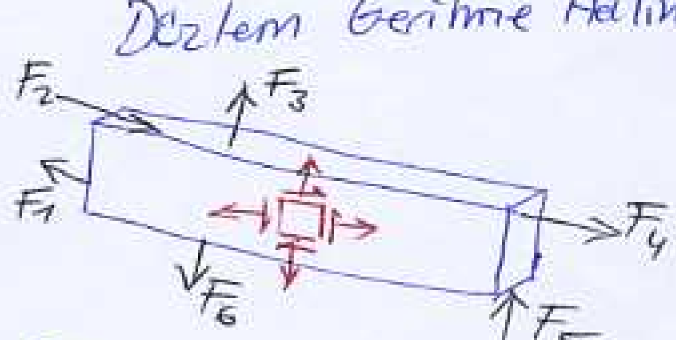
"Timoshenko & Goodier" DİKKAT!

b/h	0,25	0,5	1	2	4	6	10	20	50
τ_{max}/τ_{ave}	1,008	1,033	1,126	1,396	1,988	2,582	3,77	6,74	15[illegible]

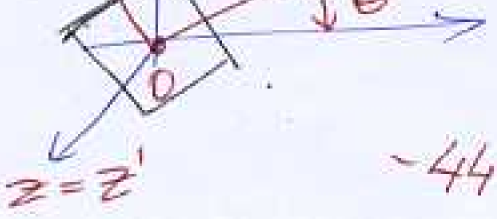
GERİLME DÖNÜŞÜMÜ FORMÜLLERİ



Düzlem Gerilme Halind[illegible]

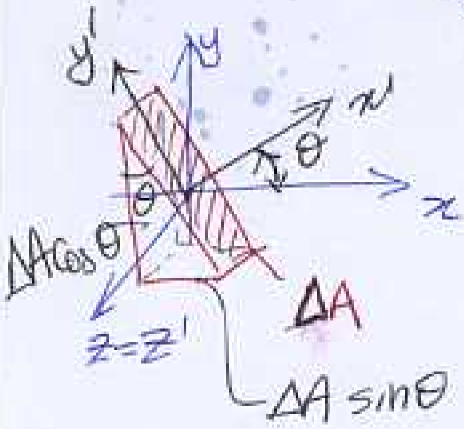


$\sigma_z = \tau_{zx} = \tau_{zy} = 0$ olur!



$$\sum \vec{F}_{x'} = 0 \Rightarrow \sigma_{x'}\Delta A - \sigma_x(\Delta A\cos\theta)\cos\theta - \tau_{xy}(\Delta A\cos\theta)\sin\theta - \sigma_y(\Delta A\sin\theta)\sin\theta - \tau_{xy}(\Delta A\sin\theta)\cos\theta = 0$$

$$\sum \vec{F}_{y'} = 0 \Rightarrow \tau_{x'y'}\Delta A + \sigma_x(\Delta A\cos\theta)\sin\theta - \tau_{xy}(\Delta A\cos\theta)\cos\theta - \sigma_y(\Delta A\sin\theta)\cos\theta + \tau_{xy}(\Delta A\sin\theta)\sin\theta = 0$$

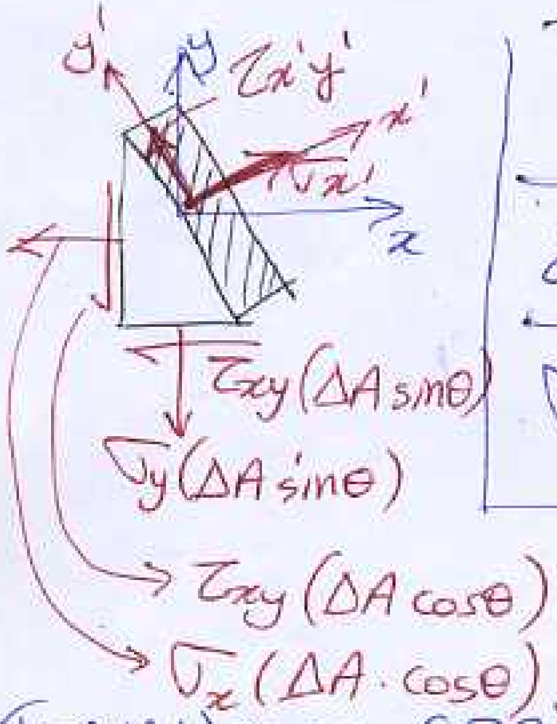


$\sin 2\theta = 2\sin\theta\cos\theta$

ve $\cos 2\theta = \cos^2\theta - \sin^2\theta$

olduğu hatırlanırsa:

ve $\cos^2\theta = \dfrac{1+\cos 2\theta}{2}$; $\sin^2\theta = \dfrac{1-\cos 2\theta}{2}$



$$\sigma_{x'} = \frac{\sigma_x+\sigma_y}{2} + \frac{\sigma_x-\sigma_y}{2}\cos 2\theta + \tau_{xy}\sin 2\theta$$

$$\tau_{x'y'} = -\frac{\sigma_x-\sigma_y}{2}\sin 2\theta + \tau_{xy}\cos 2\theta$$

$$\sigma_{y'} = \frac{\sigma_x+\sigma_y}{2} - \frac{\sigma_x-\sigma_y}{2}\cos 2\theta - \tau_{xy}\sin 2\theta$$

$\sigma_{x'} + \sigma_{y'} = \sigma_x + \sigma_y$

olduğuna DİKKAT!

(NORMAL) ASAL GERİLMELER
Principal Stresses and Maximum Shearing Stress

MOHR DAİRESİ

$$\sigma_{ort} = \frac{\sigma_x+\sigma_y}{2}$$

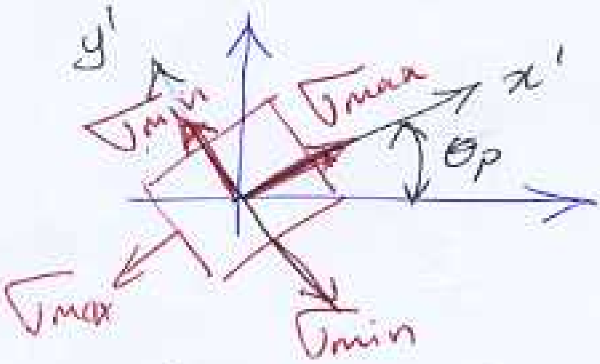
$$R = \sqrt{\left(\frac{\sigma_x-\sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2}$$

A ve B noktaları normal gerilmenin en büyük ve en küçük olduğu noktalardır. Ayrıca bu noktalarda kayma gerilmesi ($\tau_{xy}=0$) sıfırdır.

$$\tau_{xy}=0 \Rightarrow \tan 2\theta_p = \frac{2\tau_{xy}}{\sigma_x-\sigma_y}$$

$$\sigma_{max}=\sigma_{ort}+R \quad \text{ve} \quad \sigma_{min}=\sigma_{ort}-R$$

$$\sigma_{max,min} = \frac{\sigma_x+\sigma_y}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\sigma_x-\sigma_y}{2}\right)^2+\tau_{xy}^2}$$

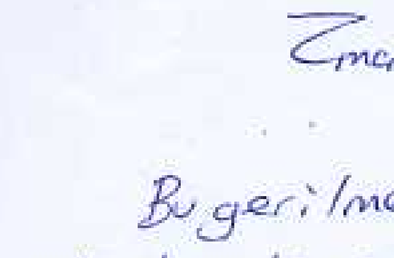


Kayma gerilmesi en büyük değeri MOHR Dairesinden görüleceği üzere R yarıçapında oluşuyor!

$$\tau_{max}=\sqrt{\left(\frac{\sigma_x-\sigma_y}{2}\right)^2+\tau_{xy}^2}$$

Bu gerilmenin birbirinden 90° farkla iki düzlemde oluştuğuna dikkat edilmelidir.

Örnek: 6.01



a) Asal eksenler?

İşaret kabulüne göre:

$\sigma_x=50\,MPa$; $\sigma_y=-10\,MPa$; $\tau_{xy}=40\,MPa$

$$\tan 2\theta_p=\frac{2\tau_{xy}}{\sigma_x-\sigma_y}=\frac{2(40)}{50-(-10)}=\frac{80}{60}$$

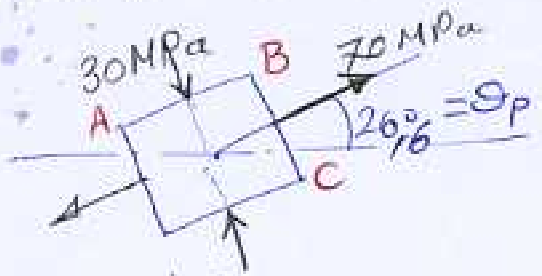
$$2\theta_p=53{,}1° \Rightarrow \theta_p=26{,}6°$$

$$2\theta_p=53{,}1°+180° \Rightarrow \theta_p=116{,}6°$$

b) Asal gerilmeler

$$\sigma_{max;min} = \frac{\sigma_x+\sigma_y}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\sigma_x-\sigma_y}{2}\right)^2+\tau_{xy}^2} = 20 \pm \sqrt{(30^2)+40^2}$$

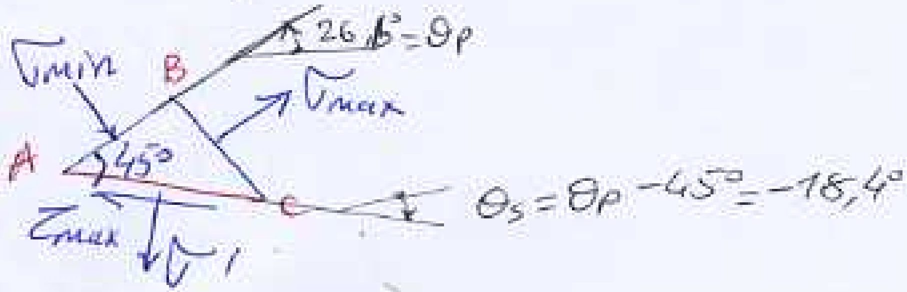
$\sigma_{max} = 20+50 = 70MPa$; $\sigma_{min} = 20-50 = -30MPa$



Kontrol için :

$$\sigma_{x'} = \frac{\sigma_x+\sigma_y}{2} + \frac{\sigma_x-\sigma_y}{2}\cos 2\theta + \tau_{xy}\sin 2\theta$$

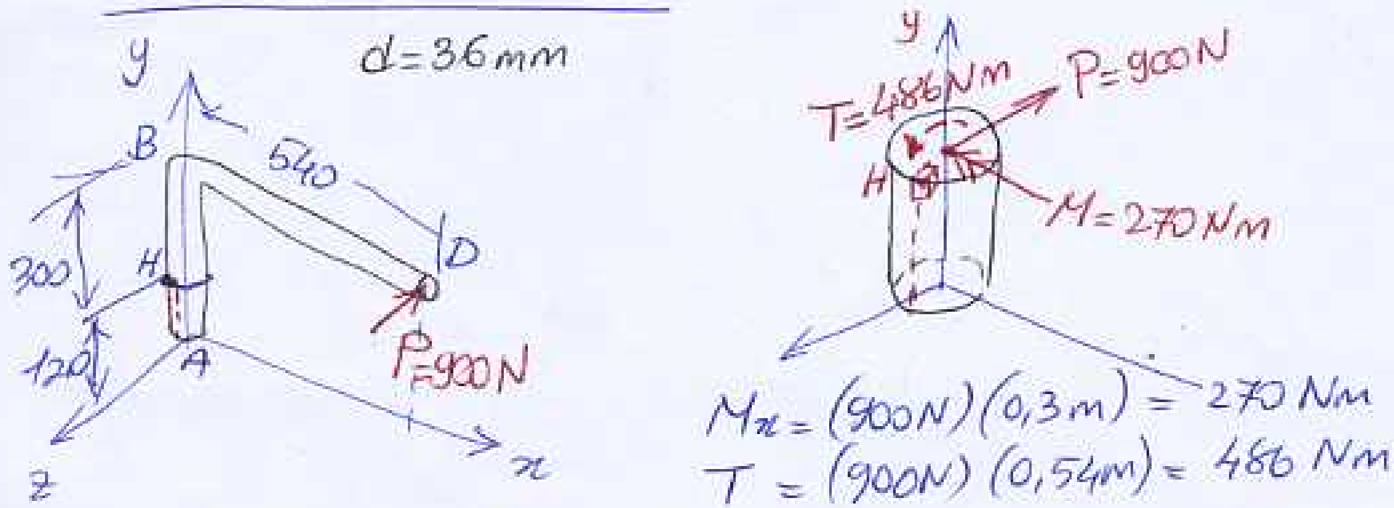
$$\sigma_{x'} = \frac{50-10}{2} + \frac{50-(-10)}{2}\cos 53,1° + 40\sin 53,1° = 70MPa = \sigma_{max}$$



c) Maksimum Kayma Gerilmesi

$$\tau_{max} = \sqrt{\left(\frac{\sigma_x-\sigma_y}{2}\right)^2+\tau_{xy}^2} = \sqrt{30^2+40^2} = 50MPa$$

Örnek Problem 6-1



$M_x = (900N)(0,3m) = 270\ Nm$

$T = (900N)(0,54m) = 486\ Nm$

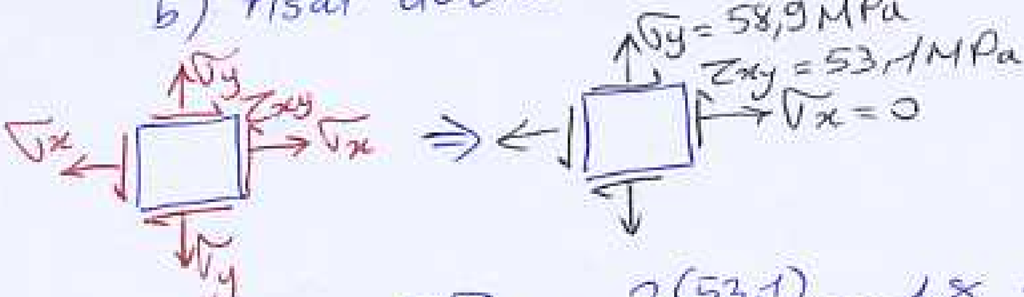
a) Gerilmeler (H noktasında)?

$\sigma_x = 0\ (M_z=0)$; $\sigma_y = +\frac{Mc}{I} = \frac{270Nm(0,18m)}{\frac{1}{4}\pi(0,18m)^4} = 58,9\ MPa$

$$\tau_{xy} = \frac{T.c}{J} = \frac{486\,(Nm)\,.\,(0,18\,m)}{\frac{1}{2}\pi\,(0,18\,m)^4} = 53,1\ MPa$$

P tekil yükünün H noktasında bir kayma gerilmesine sebep olmayacağına DİKKAT!

b) Asal düzlemler ve gerilmeler?

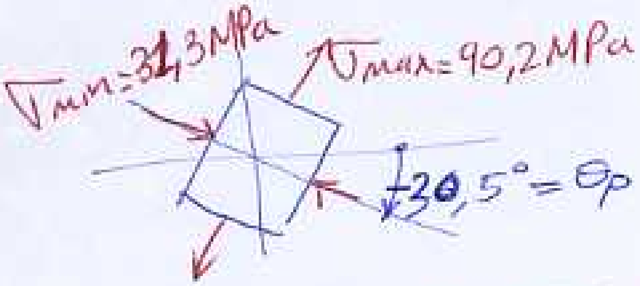


$$\tan 2\theta_p = \frac{2\tau_{xy}}{\sigma_x - \sigma_y} = \frac{2(53,1)}{0-58,9} = -1,8 \Rightarrow 2\theta_p = -61^\circ \text{ ve } 2\theta_p = 180 - 61^\circ = 119^\circ$$

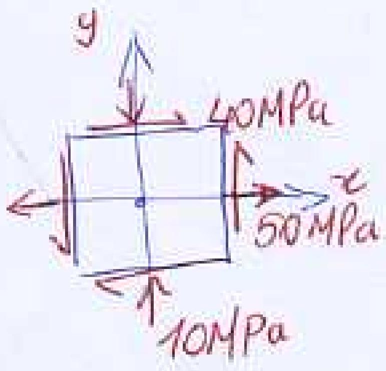
$\theta_p = -30,5^\circ$ ve $\theta_p = 59,5^\circ$

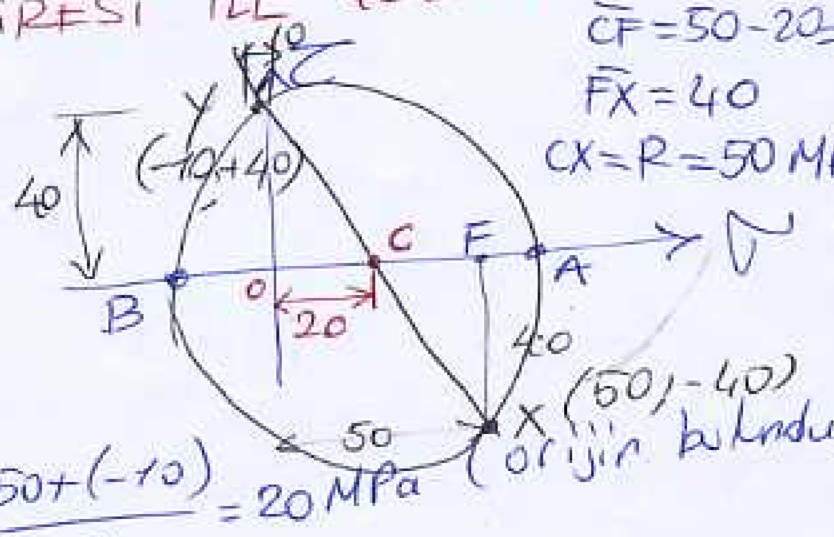
$$\sigma_{max,min} = \frac{0+58,9}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{0-58,9}{2}\right)^2 + (53,1)^2} = 29,45 \pm 60,72$$

$\sigma_{max} = 90,2\ MPa$; $\sigma_{min} = -31,3\ MPa$



MOHR DAİRESİ İLE ÇÖZÜM





$\overline{CF} = 50 - 20 = 30$
$\overline{FX} = 40$
$\overline{CX} = R = 50\ MPa$

(orijin bulundu!)

$$\sigma_{ort} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} = \frac{50+(-10)}{2} = 20\ MPa$$

$\sigma_{max} = \overline{OC} + \overline{CA} = 20 + 50 = 70\,MPa$

$\sigma_{min} = \overline{OB} = \overline{OC} - \overline{BC} = \overline{OC} - R = 20 - 50 = -30\,MPa$

Asal eksenler:

$\tan 2\theta_p = \dfrac{FX}{CF} = \dfrac{40}{30} \Rightarrow 2\theta_p = 53{,}1 \Rightarrow \theta_p = 26{,}6^\circ$

Maksimum Kayma Gerilmesi:

$\tau_{max} = R = 50\,MPa$ olduğu; bu noktada

$\sigma' = \sigma_{ave} = 20\,MPa$ olduğu şekilden görülür!

$\tau_{max} = (\sigma_{max} - \sigma_{min})/2$ dir!

MALZEME AKMA KRİTERLERİ

Malzemenin dayanma sınırı? Malzemenin dayanma sınırı, sünek (düktil) malzemede akma gerilmesi, gevrek (frajil) malzemede kırılma gerilmesidir. Tek eksenli gerilme durumunda bu sınırların deneysel olarak bulunması mümkündür. Ancak üç eksenli gerilme etkisinde olan bir malzeme için dayanma sınırını bulmak kolay değildir.

$\sigma_1 > \sigma_2 > \sigma_3$ ise ve malzemenin basınca ve çekmeye dayanımı aynı ise

a) Rankine Hipotezi

$\sigma_1 = \sigma_M$ dayanma sınırı olarak görür. σ_2 ve σ_3 etkisini hiç dikkate almaz. Döküm demir gibi kırılgan malzemelerde iyi sonuç verse de sünek malzemelerde kayma mukavemetini yanlış verir.

b) En büyük kayma gerilmesi hipotezi (Coulomb, Guest)

3 eksenli gerilme halinde $\tau_{max} = \dfrac{\sigma_1 - \sigma_3}{2}$

Tek " " $\tau_{max} = \dfrac{\sigma_M}{2}$ olduğundan

karşılaştırma $\sigma_1 - \sigma_3 = \sigma_M$ formülüne göre yapılır!

c) En büyük şekil değiştirme hipotezi (Saint-Venant)

Eşit gerilmelerin etki ettiği düzlem gerilme halinde yüksek değerler bulunması bir olumsuzluktur. $\sigma_3 = 0$; $\sigma_1 = \sigma_2$ durumunda iyi sonuç vermiyor!

d) ~~Şekil~~ Biçim değiştirme enerjisi hipotezi (Huber, Hencky, von Mises)

3 eksenli haldeki bu enerji ifadesini tek eksenli haldeki değere eşitlersek:

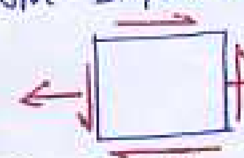
$$\frac{1+\nu}{6E}\left[(\sigma_1-\sigma_2)^2+(\sigma_2-\sigma_3)^2+(\sigma_3-\sigma_1)^2\right] = \frac{1+\nu}{6E}\cdot 2\sigma_M^2$$

ya da $$\sigma_M^2 = \frac{1}{2}\left[(\sigma_1-\sigma_2)^2+(\sigma_2-\sigma_3)^2+(\sigma_3-\sigma_1)^2\right]$$

Bir ve 2 eksenli gerilme halindeki deneysel sonuçlarla uyumludur.

örnek:

$\sigma_M = 240$ MPa



$\sigma_x = 200$ MPa

$\tau_{xy} = 75$ MPa

Asal gerilmeler?

$$\sigma_{1,2} = \frac{200+0}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{200-0}{2}\right)^2+75^2} = \begin{cases} 225 \text{ MPa} \\ -25 \text{ MPa} \end{cases}$$

$\therefore$ $\sigma_1 = 225$ MPa; $\sigma_2 = 0$ ve $\sigma_3 = -25$ MPa

(a) En büyük normal gerilme hipotezine göre: $\sigma_1 \overset{?}{\leq} \sigma_M$

$225 \text{ MPa} \leq 240 \text{ MPa} = \sigma_M$ ✓

(b) En büyük kayma gerilmesi hipotezine göre:

$\sigma_1 - \sigma_3 \overset{?}{\leq} \sigma_{em} \Rightarrow 225-(-25) = 250 \overset{?}{\leq} 240$ — Hayır! Kırılma olur!

c) En büyük şekil değiştirme hipotezine göre:

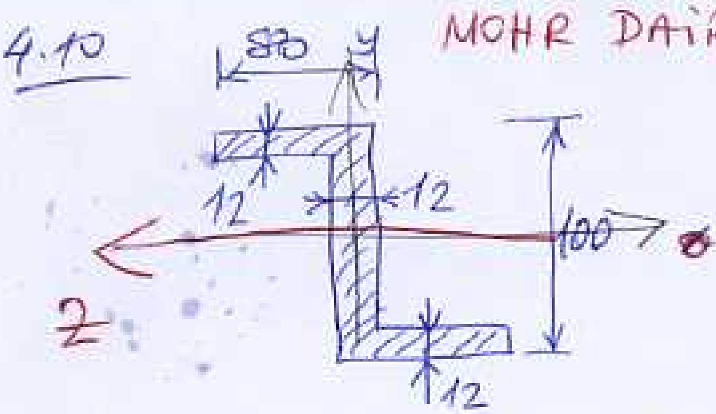
$\sigma_1 - \nu(\sigma_2+\sigma_3) \overset{?}{\leq} \sigma_M \Rightarrow 225-0{,}3(0-25) = 232{,}5 \leq 240$ ✓

d) En büyük ~~şekil~~ biçim değiştirme enerjisi hipotezine göre:

$$\frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{(\sigma_1-\sigma_2)^2+(\sigma_2-\sigma_3)^2+(\sigma_3-\sigma_1)^2} \overset{?}{\leq} \sigma_M$$

$$\frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{(225-0)^2+(0-(-25))^2+(-25-225)^2} = 238{,}5 \leq 240$$ ✓

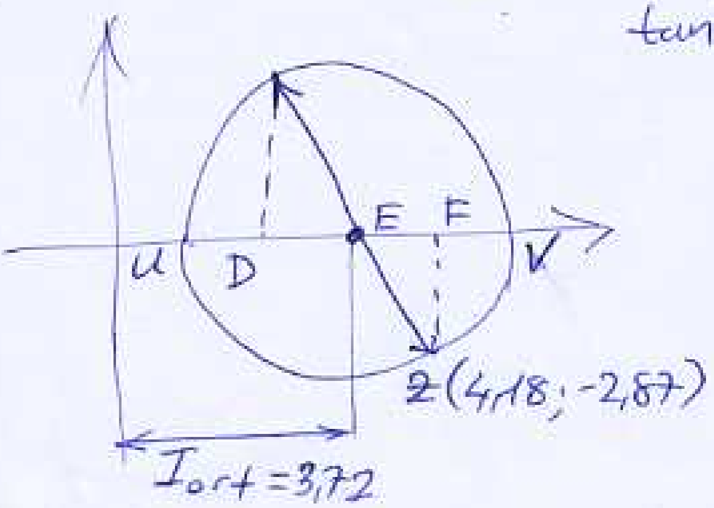
4.10 MOHR DAİRESİ YARDIMIYLA ATALET MOMENTİ



$I_z = 4{,}18 \times 10^{-6}\ m^4 = 418\ cm^4$

$I_y = 3{,}25 \times 10^{-6}\ m^4 = 325\ cm^4$

$P_{zy} = 2{,}87 \times 10^{-6}\ m^4$



$\tan 2\theta_p = \frac{FZ}{EF} = \frac{2{,}87}{(4{,}18-3{,}72)} \Rightarrow 2\theta_p = 80{,}8°$

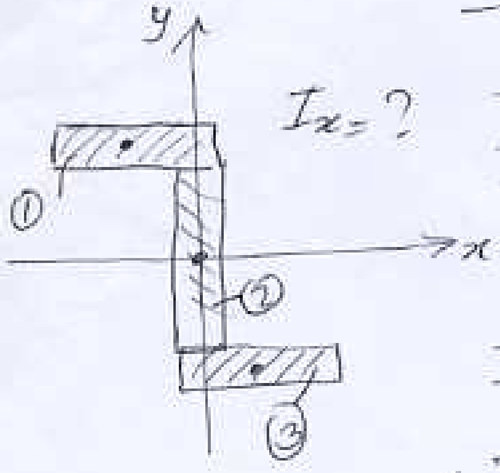
$\theta_p = 40{,}4°$

$R^2 = EF^2 + FZ^2$

$R = 2{,}91 \times 10^{-6}\ m^4$

$I_u = I_{min} = OU = I_{ort} - R = 0{,}81 \times 10^{-6}$

$I_v = I_{max} = I_{ort} + R = 6{,}63 \times 10^{-6}\ m^4$



$I_x = ?$

		A_i	I_i	d_i	d_i^2	$A_i d_i^2$
1	8x1,2	9,6	1,152	4,4	19,36	185,856
2	1,2x7,6	9,12	43,8976	0	0	0
3	8x1,2	9,6	1,152	4,4	19,36	185,856
		Σ = 28,32	Σ = 46,2			Σ = 371,712

$I_x = \Sigma I_i + \Sigma A_i d_i^2 = 417{,}9\ [cm^4]$ ✓

$I_y = ?$

		I_i	d_i	d_i^2	$A_i d_i^2$
1	1,2×8	51,2	3,4	11,56	110,976
2	7,6×1,2	1,09	0,0	0,0	0,0
3	1,2×8	51,2	3,4	11,56	110,976
		Σ = 103,5			Σ = 221,952

$I_y = \Sigma I_i + \Sigma A_i d_i^2$

$I_y = \cancel{328{,}4}\ cm^4$

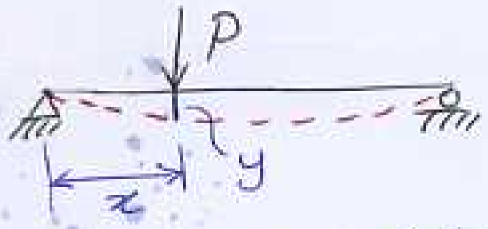
$= 325{,}4\ cm^4$ ✓

Çarpım atalet momenti $P_{xy} = ?$

	Alan	$\bar{x}$	$\bar{y}$	$\bar{x}\bar{y}A$	$\bar{x}\bar{y}A$
1	9,6	−3,4	4,4	$-\cancel{13{,}6}\times 9{,}6$	−143,616
2	9,12	0	0	0	
3	9,6	3,4	−4,4	$-\cancel{13{,}6}\times 9{,}6$	−143,616
				$\Sigma = -\cancel{27{,}2}\times 9{,}6$	$\Sigma = -287{,}8$
				$\Sigma = -26\cancel{1}12$	

$P_{xy} = -287\ cm^4$ ✓

– ELASTİK EĞRİNİN BULUNMASI –



$$\frac{1}{\rho} = \frac{M}{EI}$$

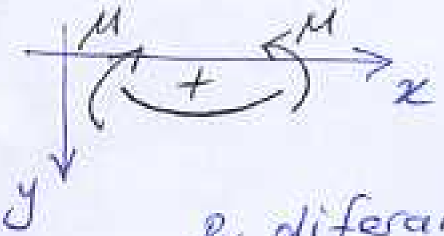
Eğrilik ve eğilme momenti arasındaki ilişki daha evvel gösterilmişti.

Analitik geometride eğrilik ifadesi ise:

$$\frac{1}{\rho} = \frac{d^2y/dx^2}{\mp\left[1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right]^{3/2}}$$ şeklinde tanımlıdır.

Gerçekte bir kirişin yer değiştirmeleri kirişin boyutlarına nazaran çok küçüktür. Böylece $(y')^2$ terimi küçük olduğundan; ihmal edilebilecek derecede

$$\frac{1}{\rho} = \frac{d^2y}{dx^2} = y'' = \mp\frac{M}{EI}$$ yazılabilir.



Pozitif moment böyle tanımlanırsa;

$$y'' = -\frac{M}{EI}$$ elde ederiz.

Bu diferansiyel denklem bir kez integre edilirse, elastik eğrinin eğimi bulunur:

$$y' = \frac{dy}{dx} = -\int\frac{M}{EI}dx + C_1$$

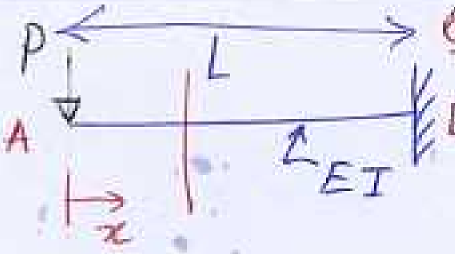
Şimdi bu eğim ifadesi bir kez daha integre edilir ve elastik eğrinin denklemi bulunur:

$$y = -\int\left[-\int\frac{M}{EI}dx + C_1\right]dx + C_2.$$

integrasyon sabitleri sınır koşulları yardımıyla bulunabilir.

Sabit veya kayıcı mafsalda: $y=0$; $M=0$

Ankastre mesnette $y=0$ ve $y'=0$



Örnek 1 Konsol uçtaki çökmeyi bulalım:
Kirişi herhangi bir x mesafesinde kestiğimizi kabul edelim:

S.C.D.

$$\sum \vec{M} = 0 \Rightarrow M + Px = 0 \Rightarrow M = -Px$$

$$y'' = -\frac{-Px}{EI} = \frac{Px}{EI}$$

$$y' = \frac{P}{EI}\frac{x^2}{2} + C_1 \Rightarrow y = \frac{P}{EI}\frac{x^3}{6} + C_1 x + C_2$$

Sınır koşulları yardımıyla C_1 ve C_2 bulunur.

$x = L$ için $y(L) = 0$ ve $y'(L) = 0$ olmalıdır.

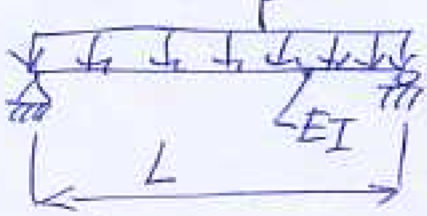
$$0 = \frac{P}{EI}\frac{L^3}{6} + C_1 L + C_2 \quad \text{ve} \quad 0 = \frac{P}{EI}\frac{L^2}{2} + C_1$$

$$C_2 = \frac{PL^3}{3EI} \quad \Leftarrow \quad C_1 = -\frac{PL^2}{2EI}$$

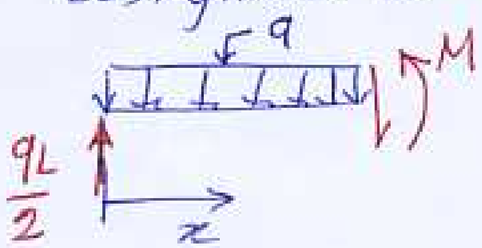
En büyük çökme A noktasında; yani $x = 0$ için olacaktır.

$$y_{max} = y(0) = \frac{PL^3}{3EI}$$

Örnek 2



Kirişi yine herhangi bir noktadan kestiğimizi varsayalım:



$M(x) = ?$

$$\frac{qL}{2} \cdot x - qx\frac{x}{2} - M = 0$$

$$M = -\frac{qx^2}{2} + \frac{qL}{2}x \Rightarrow y'' = -\frac{M}{EI} = \frac{qx^2}{2EI} - \frac{qLx}{2EI}$$

$$y' = \frac{qx^3}{6EI} - \frac{qLx^2}{4EI} + C_1 \Rightarrow y = \frac{qx^4}{24EI} - \frac{qLx^3}{12EI} + C_1 x + C_2$$

Basit mesnet için sınır koşulu:

$y(0)=0$ ve $y(L)=0$

$\Downarrow$

$C_2=0$ ve $y(L)=0=\dfrac{qL^4}{24EI}-\dfrac{qL^4}{12EI}+C_1L$

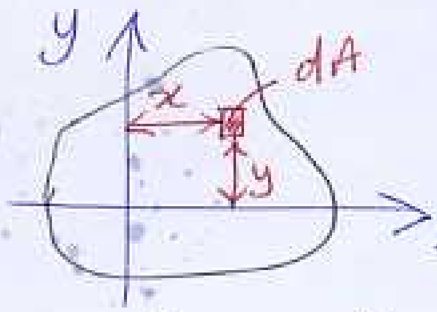
$C_1=\dfrac{qL^3}{24EI}$ bulunur.

$$y=\frac{qx^4}{24EI}-\frac{qLx^3}{12EI}+\frac{qL^3x}{24EI}$$ (elastik eğri denklemi)

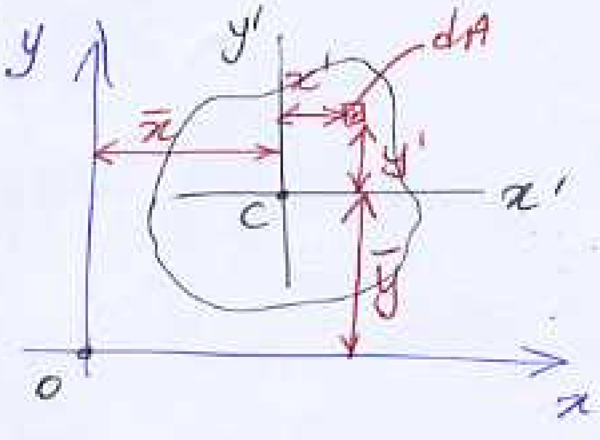
Problemin simetrisi nedeniyle en büyük çökme kirişin ortasında olacaktır.

$$y_{max}=y(L/2)=\frac{5qL^4}{384EI}$$

ÇARPIM ATALET MOMENTİ



$P_{xy} = \int xy\,dA$ şeklinde tanımlıdır.
I_x ve I_y'den farklı olarak negatif bir büyüklüğe de sahip olabilir!



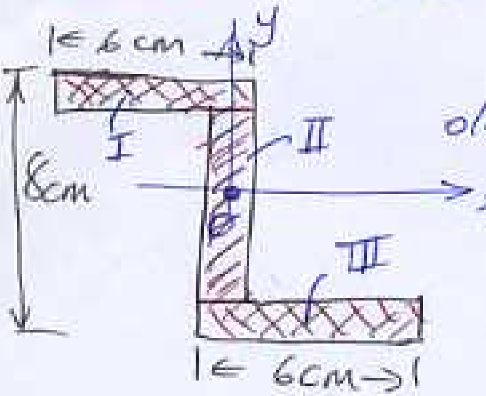
$$P_{xy} = \int xy\,dA = \int (\bar{x}+x')(\bar{y}+y')\,dA$$

$$P_{xy} = \int x'y'\,dA + \bar{y}\int x'\,dA + \bar{x}\int y'\,dA + \bar{x}\bar{y}\int dA$$

x', y' eksen takımı ağırlık (alan) merkezine oturtulmuşsa:
$\bar{y}\int x'\,dA$ ve $\bar{x}\int y'\,dA$ sıfıra eşittir.

$P_{xy} = P_{x'y'} + \bar{x}\bar{y}A$ yazabiliriz

Örnek



Elemanın kalınlığı 1 cm.
$I_x = 166\ cm^4$ ve $I_y = 111{,}5\ cm^4$ olarak hesaplanmıştır.
a) O'ya göre asal eksenlerini ?
b) Asal atalet momenti değerlerini ?
Elemanı 3 parçada inceleyelim:

	Alan	$\bar{x}$	$\bar{y}$	$\bar{x}\bar{y}A$
I	6	−2,5	+3,5	−52,5
II	6	0	0	0
III	6	+2,5	−3,5	−52,5

$\Sigma = -105$

$P_{xy} = \Sigma \bar{x}\bar{y}A = -105\ cm^4$

a) Asal eksenler: $\tan 2\theta_m = -\dfrac{2P_{xy}}{I_x - I_y} = -\dfrac{2(-105)}{166-111{,}5} = +3{,}85$

$2\theta_m = 75{,}4°$ ve $180 + 75{,}4 = 255{,}4°$

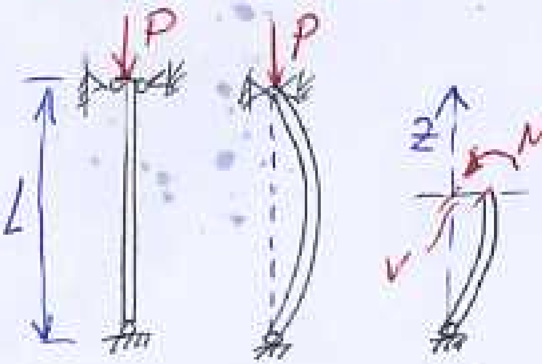
$\theta_m = 37{,}7°$ ve $127{,}7°$

b) Asal atalet momentleri: $I_{max,min} = \dfrac{I_x + I_y}{2} \pm \sqrt{\left(\dfrac{I_x - I_y}{2}\right)^2 + P_{xy}^2}$

$I_{max} = 247{,}25\ cm^4$; $I_{min} = 30{,}25\ cm^4$ bulunur!

BURKULMA

- Euler Teorisi -



(a) (b) (c)

(b) Denge hali var sayalım.

$$M - Pv = 0 \Rightarrow M = P.v$$

Diğer yandan eğilmede çökme ile moment arasında :

$$\frac{d^2v}{dz^2} = -\frac{M}{EI}$$ ilişkisi vardı.

$$\Rightarrow \frac{d^2v}{dz^2} + \frac{P}{EI} v = 0$$ diferansiyel denklemi elde edilir!

Genel çözüm $v = C_1 \cos\left(\frac{P}{EI} z\right) + C_2 \sin\left(\frac{P}{EI} z\right)$ şeklinde aranır!

$\lambda^2 = P/EI$

Sınır şartları yardımıyla; C_1 ve C_2 integral sabitleri bulunabilir! $z = 0$ 'da $v = 0$ ve $z = l$ 'de $v = 0$ olmalı

ilk sınır şartından $C_1 = 0$ bulunur. İkinci şartı kullanarak $0 = C_2 . \sin\left(\frac{P}{EI} L\right)$ bulunur.

C_2 de sıfır olsa; bu doğrusal çubuk formuna karşılık gelir ve bizim aradığımız durum değildir. Bu durumda

$\sin\left(\frac{P}{EI} L\right) = 0$ olmalıdır. Bu da $\sqrt{\frac{PL}{EI}} = n\pi$ halinde gerçekleşir.

$L \cdot \lambda = n\pi$

Buradan $v = C_2 \sin\left(\frac{n\pi}{L} z\right)$ elde edilir.

Eğer burkulma parametresi diye bir şey tanımlamışsak;

$$\lambda^2 = \frac{P}{EI} \text{ gibi} \Rightarrow \lambda^2 l^2 = n^2\pi^2$$

$$P = \frac{n^2\pi^2 EI}{l^2}$$; $n = 0$ için $P = 0$ işimize yaramaz

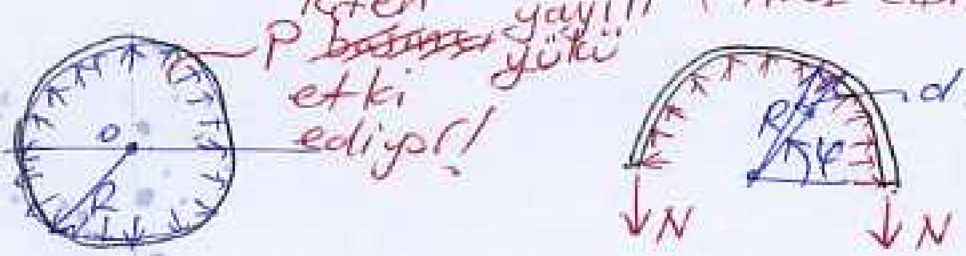
$n = 1$ hali aradığımız kritik yüktür

$$P_{kr} = \frac{\pi^2 EI}{l^2}$$

Kritik burkulma gerilmesi ise: $\sigma_{kr} = \frac{P_{kr}}{A}$

- İÇ BASINÇ ETKİSİNDEKİ İNCE HALKALAR -

(İNCE CİDARLI BORULAR)



Düşey kuvvet dengesin...

$$-2N + \int_0^{\pi} pR\sin\varphi \, d\varphi = 0$$

İntegrasyon sonucunda $N = PR$ elde edilir.

Halkanın kesit alanı A ise; gerilme: $\sigma = \dfrac{N}{A} = \dfrac{PR}{A}$

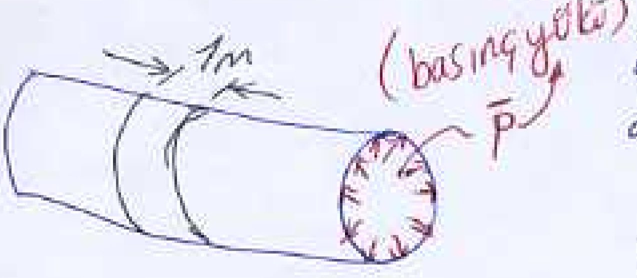
Normal kuvvet etkisi altında halkanın birim boyundaki uzama da:

$$\varepsilon = \frac{PR}{E \cdot A}$$

Tüm boydaki uzama ise: $\delta = 2\pi R \cdot \varepsilon$ olacağından

$\delta = 2\pi \dfrac{PR^2}{EA}$ olacaktır. Halkanın yarıçapındaki

ΔR artımı da kolayca bulunabilir: $2\pi(\Delta R) = \delta$; $\Delta R = \dfrac{\delta}{2\pi}$



Borunun 1m'lik bir kısmını dikkate alalım:

$$\sigma = \frac{PR}{A} = \frac{\bar{p}\cdot(1m)\cdot R}{(1m)\cdot t} = \frac{\bar{p}R}{t}$$

Örnek: 80 metre derinlikte bir barajda kullanılacak 120 cm çaplı çelik borunun kalınlığı ne olmalıdır? Boru malzemesinin emniyetli gerilme değeri $\sigma_{em} = 100$ MPa

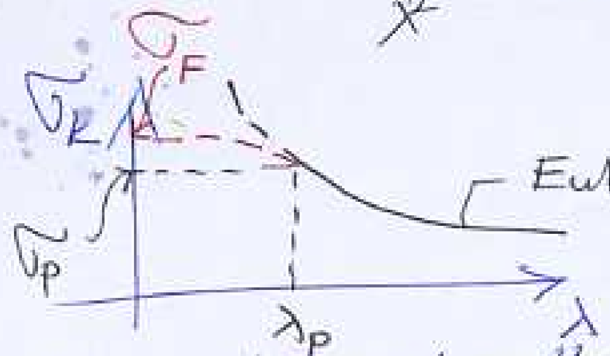
80 metre derinlikte boru dış çeperine gelecek statik basınç yükü: $\bar{p} = \gamma \cdot h = 1\,ton/m^3 \cdot 80\,m = 80\,ton/m^2 \cong 800\,\frac{kN}{m^2}$

$$100\,MPa = 100\,M\frac{N}{m^2} = \frac{800\,k\frac{N}{m^2}\cdot 0{,}6\,m}{t} \Rightarrow t = 0{,}0048\,m$$

$t = 4{,}8$ mm $\Rightarrow$ $t = 5$ mm

Bu formülde $\lambda = l_k / i$ (narinlik katsayısı) tanımlanır

$$\sigma_k = \frac{\pi^2 E}{\lambda^2}$$ şeklinde yazılabilir.



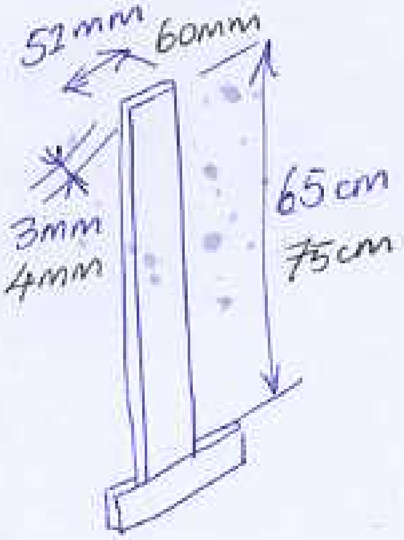
Teorik ve deneysel yollarla, çeşitli malzemeler için bu eğriler elde edilir ve ampirik formüllerle verilir.

Burkulma etkisindeki yapılarda emniyet katsayısı yüksek tutulur. (3~5)

$$\bar{\sigma}_{em} = \frac{\sigma_k}{n}$$ → kritik burkulma yükü; n — emniyet katsayısı

$P/A \leq \bar{\sigma}_{em}(\lambda)$ şeklinde ifade edilir ve boyutlandırmaya geçilir.

Burkulma yükünün Bulunmasına Bir Örnek



$I_x = 117\ mm^4$; $I_y = 35152\ mm^4$

$$P_{cr} = \frac{\pi^2 \cdot E \cdot I}{l^2}$$

Ahşap (odun) için $E \cong 10$ GPa

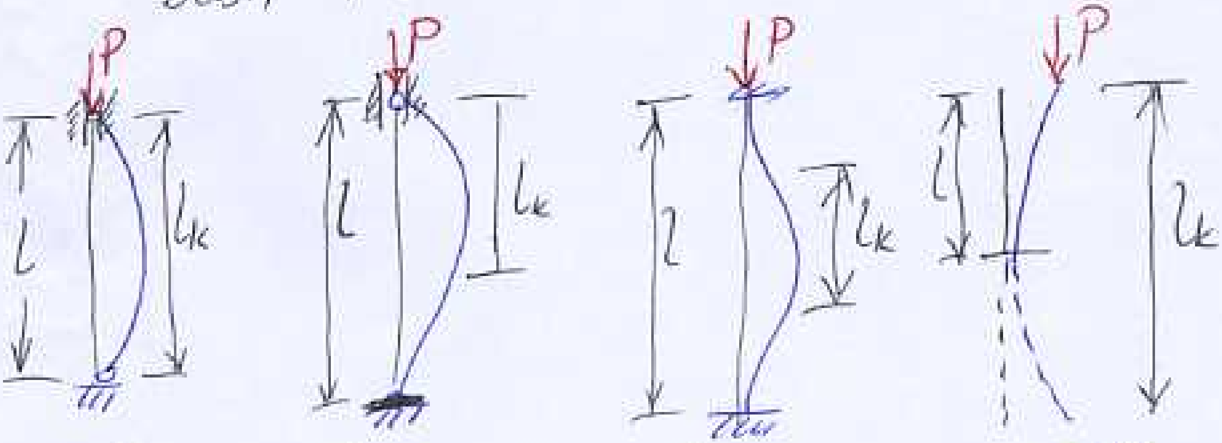
$$P_{cr} = \frac{\pi^2 (10000\ MPa) . 117\ mm^4}{(650mm)^2} = 27,3\,[N] \approx 2,8\ kg$$

Normalde basınca dayanımı = 50 MPa

$$\sigma = P/A \leq 50\ MPa \Rightarrow P \leq (3mm \times 52mm) . 50\ N/mm^2$$

$$P \leq 7800\,[N]$$

Basit Euler Halleri



(a) (b) (c) (d)

(a) $l_k = l$, $P_k = \frac{\pi^2 EI}{l^2}$

(b) $l_k = 0,7l$, $P_k = \frac{2,043\pi^2 EI}{l^2}$

(c) $l_k = 0,5l$, $P_k = \frac{4\pi^2 EI}{l^2}$

(d) $l_k = 2l$, $P_k = \frac{\pi^2 EI}{4l^2}$

Kritik burkulma yükü $P_k = \frac{\pi^2 EI}{l_k^2}$ şeklinde verilir.

Kritik burkulma gerilmesi de $\sigma_k = \frac{P_k}{A} = \frac{\pi^2 EI}{l_k^2 A} = \frac{\pi^2 E}{(l_k/i)^2}$