

8. BÖLÜM

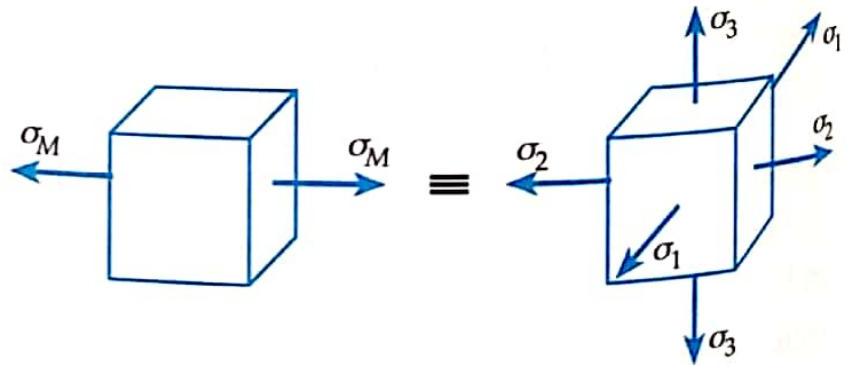
PLASTİSİTE VE KIRILMA VARSAYIMLARI

8.1. Genel Düşünceler

“Cisimlerin Mukavemeti” yönünden bir malzemenin hangi yük sınırında plastik hale geçeceği veya hangi gerilme değeri için kırılacağını bilmek öncelikli bir sorudur. Yapı için tehlikeli sayılacak bu sınırları bulmak için cisim üzerinde deneyler yapmak gerekecektir. Fakat malzeme deneyleri çok defa basit çekme ve basınç gibi bir eksenli gerilme altında yapılır ve tehlikeli sınırlar ancak bu tür yüklemeler için doğrudan doğruya deneyle saptanabilir. Oysaki uygulamada cisimler daha çok iki veya üç eksenli gerilme halinin etkisindedir. Böyle bileşik bir zorlamanın, malzemeyi plastik duruma veya kırılma durumuna hangi koşullarda getireceğini bilmek gerekir. Diğer bir deyişle, bir eksenli sınır durumundan, üç eksenli sınır durumuna nasıl geçilebilir? Bu soruya deney yoluyla hemen yanıt vermek olası değildir. Çünkü üç eksenli gerilme halinin çeşidi sonsuz olup bütün haller için ayrı ayrı deney yapmak zor ve pahalıdır, ayrıca üç eksenli deney tekniği bir eksenliye göre çok güçtür.

İşte biz bu bölümde, bir eksenli gerilme haliyle üç eksenli gerilme halini, tehlike sınırı yönünden karşılaştıran kriterleri gözden geçireceğiz. “Tehlikeli durum” sözü, gevrek olan cisimlerde kırılma, kopma ve ezilme gibi durumları ifade etmekte, plastik özelliğe sahip olan ve çok uzayan cisimlerde ise, akma anlamını taşımaktadır.

Şekil 8.1 de aynı bir cismin iki tip zorlanması gösterilmiştir, bunlardan biri bir eksenlidir ve σ_M ile gösterilen gerilme altında cisim sınır durumuna ulaşmıştır. İkinci gerilme hali üç eksenli olup orada da durum tıpkı birincideki gibi sınırdadır. Kısaca her iki zorlama tehlike yönünden özdeştir.



Şekil 8.1

Mukavemet veya karşılaştırma kriterlerinin amacı, fizik yönden eşit durumda olan iki halin gerilmeleri arasındaki bağıntıyı bulmaktır. Yani

$$\sigma_M = f(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3) \quad (8.1)$$

gibi bir karşılaştırma kriteri bulmaktır. Burada f üç asal gerilmeye bağlı bir fonksiyonu gösterir. Üç eksenli gerilme altında cisim henüz kırılmamış veya plastik hale geçmemişse, (8.1) karşılaştırması

$$\sigma_M > f(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3) \quad (8.2)$$

gibi bir eşitsizlik olacak demektir.

Cisim *homogen* ve *izotrop* olursa f fonksiyonu asal gerilmelerin simetrik bir fonksiyonu olup yalnız şiddetlerine bağlıdır; asal gerilmelerin doğrultuları burada rol oynamaz.

Uygulama için önemi büyük olan bu tür kriterleri teorik yünden elde etmek bugün için olası değildir. İç bünye ile ilgili karmaşık olayların kesin fizik yasaları yerine mühendis şimdilik kırılma veya plastik hale geçme olayının dış ve *ortalama* faktörlerini bulmakla yetinmektedir. Bu nedenle kesin bir karşılaştırma kriterinden söz etmek doğru olmaz. Çünkü cismin bünyesindeki rastgele kusur ve süreksizlikler, kırılma ve plastik hale geçme kriterlerine *istatistiksel* bir yapı verirler. Bu konudaki yeni çalışmalar da çokluk bu yöndedir.

Ayrıca bir başka noktaya da değinmek yerinde olur. İç yapı bakımından birbirinden çok büyük farklılıklar gösteren tüm yapı malzemeleri için tek bir kriter bulmak ve kullanmak doğru olmaz. Tüm bu düşüncelerden sonra izlenmesi gereken yol deneyim ve sezgiye dayanarak bir takım varsayımlar kullanmak ve bunların gerçeğe uygunluk derecesini çeşitli deneylerle görmek ve elde edilen sonuca göre malzeme seçmek olacaktır.

Bugüne kadar pekçok araştırmacı tarafından çeşitli mukavemet hipotezleri (varsayımları) ortaya atılmıştır. Bunların bazıları deneylerle uyum göstermedikleri için terk edilmişlerdir. Aşağıda statik problemler için verilen bazı varsayımlar ele alınacak ve uygulamadaki kullanılabilirlikleri tartışılacaktır.

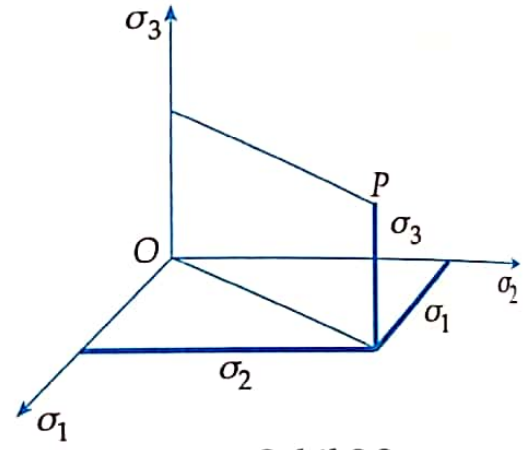
8.2. Çeşitli Varsayımlar

Kırılma veya plastik hale geçişte, farklı nedenler gözeterek verilen çeşitli hipotezler üç büyük grupta toplanmıştır:

- a) Gerilme varsayımları
- b) Şekil değiştirme varsayımları
- c) Enerji varsayımları

Adlarından da kolayca anlaşılacağı üzere bu hipotezlerden birinci grup, tehlikeli duruma geçişte, gerilmenin etkin rol oynadığını; ikinci gruptaki varsayımlar, olayda şekil değiştirmenin önemli faktör olduğunu, üçüncü grupta ise, şekil değiştirme enerjisinin önemli olduğunu kabul etmiştir. Bununla beraber, gerilme-şekil değiştirme bağıntılarını ele almak koşulu ile çeşitli açılardan ileri sürülen bütün hipotezleri gerilme diline çevirmek de olasıdır. (8.1) denkleminde bu kriterler yalnız asal gerilmelerle ifade edilmiştir.

Hipotezleri ayrı ayrı incelemeden önce şu birkaç noktayı açıklamak yerinde olur: Çeşitli hipotezleri birbirleriyle kolayca karşılaştırmak için, bunları geometrik olarak tanımlamak gerekir. σ_1 , σ_2 ve σ_3 ile verilen üç eksenli gerilme halini, uzayda bir P noktasının koordinatları olarak alırsak, çeşitli gerilme halleri çeşitli tanım noktalarına karşı gelir, şekil 8.2. Bu tanım sistemine göre, mukavemet varsayımları, tehlikeli durumları tehlikesizden ayıran bir sınır yüzeyi ile gösterilir ve iki eksenli gerilme halinde bu sınır yüzeylerinin ilgili koordinat düzlemleri ile olan arakesit eğrileri ele alınır. Diğer bir tanım sisteminde de, Mohr daireleri için kullanılan σ , τ düzlemi esas alınır. İlerideki açıklamaları kolaylaştırmak için, üç asal gerilmenin büyüklük sırasına göre $\sigma_1 > \sigma_2 > \sigma_3$ şeklinde dizildikleri kabul edilmiştir.



Şekil 8.2

8.3. Gerilme Varsayımları

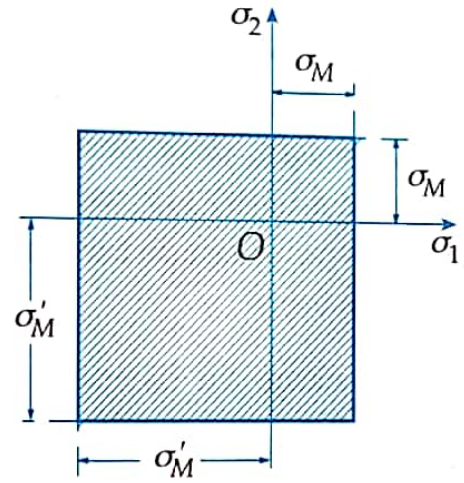
Bu grup varsayımlarda, kırılma veya plastik hale geçmede en etkin rolün gerilmeye olduğu kabul edilmektedir. Bu grup içindeki önemli varsayımlar aşağıda verilmiştir.

H_1) *En büyük normal gerilme varsayımı*: Bu varsayıma göre tehlikeli duruma geçmede esas rol en büyük normal gerilme olan σ_1 dedir. Diğer bir deyişle (8.1) karşılaştırma denklemi

$$\sigma_1 = \sigma_M \quad (8.3)$$

şeklinde olacaktır. Burada σ_M ile malzemenin tek eksenli haldeki sınır gerilmesi gösterilmektedir. σ_2 ortalanca gerilme ile σ_3 en küçük gerilmeye önem vermeyen bu varsayım tarih bakımından en eski varsayımdır. *Galilei*,

Leibniz, Navier ve Lamé tarafından ileriye sürülmüştür. Şekil 8.2 de anlatılan tanım tarzında, bu hipotezin gösterdiği sınır yüzey, koordinat düzlemlerine paralel olan bir *dikdörtgenler prizması*dır. Yani *kapalı* bir yüzeydir. Şekil 8.3 de iki eksenli gerilme hali için bu yüzeyin örneğin σ_1 , σ_2 düzlemiyle olan arakesiti gösterilmiştir. Burada cismin çekme mukavemeti σ_M ve basınç mukavemeti de σ'_M dir. En büyük normal gerilme varsayımı, *gevrek* malzemeler için halâ kullanılsa bile, hidrostatik basınç deneyini sağlamadığı için doğru bir varsayım değildir. Paragraf 7.6 da açıklandığı gibi cisim ister gevrek isterse sünek tipten olsun, onu hidrostatik basınç tipinden bir zorlama ile tehlikeli duruma sokmak mümkün değildir. Buna göre bütün cisimlerin sınır yüzeyleri basınç tarafından açık olmalıdır. Ayrıca söz konusu olan varsayım göre kopma kesitinin, en büyük gerilmeye dik bir *ayrılma düzlemi* olması gerekir ki deneyler bunu her zaman gerçekleştirmez.

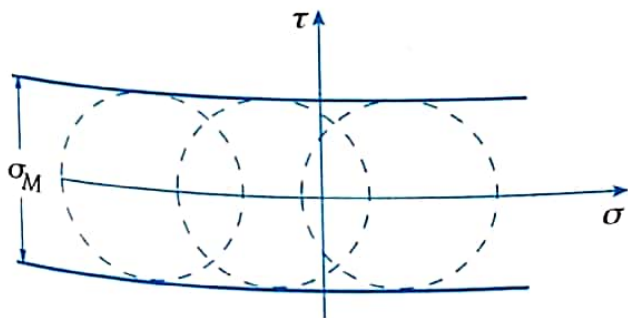


Şekil 8.3

H₂) En büyük kayma gerilmesi varsayımı: Uygulama alanı için önemli olduğu kadar basit olan bu hipotez, plastik hale geçmede veya kırılmadaki en önemli faktörün en büyük *kayma gerilmesi* olduğunu söyler, diğer bir deyişle karşılaştırma

$$\sigma_1 - \sigma_3 = \sigma_M \quad (8.4)$$

denklemiyle yapılır. Burada $\sigma_1 - \sigma_3$ farkı üç eksenlide en büyük kayma gerilmesinin iki katını, sağ taraf ise $(\sigma_M - 0)$ ile bir eksenli haldeki kayma gerilmesinin iki katını göstermektedir. Varsayım en büyük gerilme olan σ_1 ile en küçük olan σ_3 gerilmesine önem vermekte, σ_2 ortanca gerilmesinin rolünü gözardı etmektedir. Mohr tasvir sistemi anımsanırsa (8.4) eşitliğinin



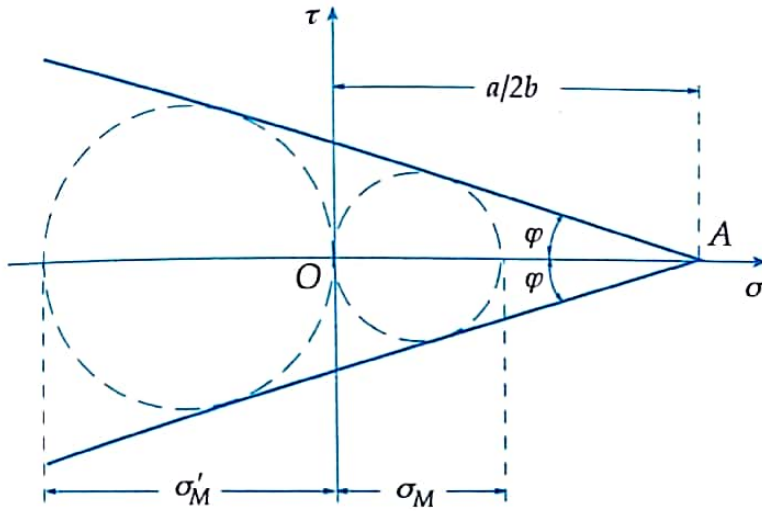
Şekil 8.4

grafik anlamının sınır durumlarda en büyük Mohr dairesinin çapının sabit olacağı ve bunun da σ_M değerine eşit olacağıdır. Şekil 8.4 de birkaç sınır Mohr dairesi çizilmiş ve bunların *zarfları* gösterilmiştir. Bu varsayım göre sınır Mohr dairelerinin merkezi nerede

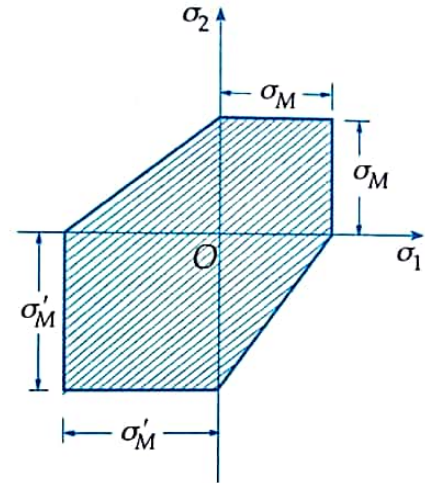
koşullarından

$$a = \frac{2\sigma_M \sigma'_M}{\sigma_M + \sigma'_M} \quad \text{ve} \quad b = \frac{\sigma'_M - \sigma_M}{\sigma_M + \sigma'_M} \quad (8.6)$$

bulunur. (8.5) ifadesinin, Mohr grafik gösterilim sistemindeki anlamı, sınır dairelerinin zarfının birbirini kesen iki doğru olması gerektiğidir, şekil 8.6.



Şekil 8.6



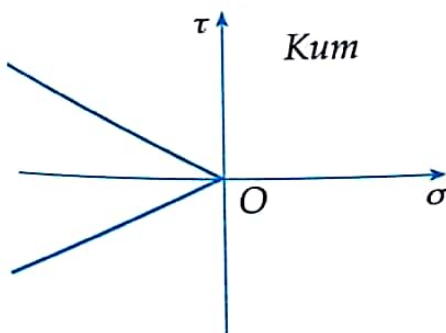
Şekil 8.7

Zarf doğruları σ eksenini ile φ açısı yapar. Burada $b = \sin \varphi$ bağıntısını göstermek kabildir. Ayrıca zarf doğrularının kesiştikleri A noktasının absisi

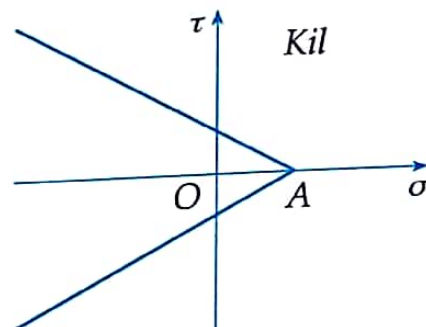
$$\overline{OA} = \frac{a}{2b} = \frac{\sigma_M \sigma'_M}{\sigma'_M - \sigma_M} \quad (8.7)$$

olarak bulunabilir ve malzemenin *hidrostatik çekme* halindeki mukavemetini gösterir. Sonlu olması gereken bu değer için en büyük kayma gerilmesi varsayımı sonsuz değer verir ki bu gerçeğe uymaz.

Bu hipotez eğer şekil 8.2 deki sistemle tanımlanacak olursa, σ_1, σ_2 düzleminde yine bir altgen verir, bu çevre şekil 8.7 de $\sigma'_M > \sigma_M$ hali için gösterilmiştir.



Şekil 8.8

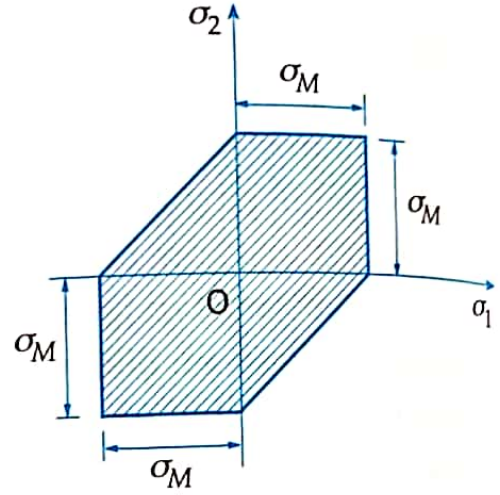


Şekil 8.9

olursa olsun çapı sabit olacağından zarflar, σ eksenine paralel iki doğrudan ibaret olur. İlkeleri çok basit olan bu varsayımın bugün plastisite teorisinde çok önemli bir yeri vardır ve **Tresca varsayımı** adıyla anılır. Şekil 8.2 de verilen biçimde varsayımı tanımlayacak olursak, sınır yüzeyi altı köşeli iki taraflı açık bir prizmanın yüzeyi olur. Prizmanın eksenini üç koordinat eksenleriyle eşit açı yapar. Şekil 8.5 düzlem gerilme halinde, sınır yüzeyin σ_1, σ_2 düzleminde olan ara kesitini göstermektedir. Buna çoğu kez **Tresca altıgeni** denir.

En büyük kayma gerilmesi varsayımı, çekme ve basınçta eşit davranış gösteren malzeme için, deneylere uygun sonuçlar vermektedir. Hidrostatik basınç değişimi yönünden de bu varsayım doğru sonuçlar verir.

Yalnız çekme ve basınçta farklı mukavemet gösteren gevrek malzemede sınır **Mohr** dairelerinin çapları sabit olmadığından bu varsayım onlara doğrudan doğruya uygulanamaz.



Şekil 8.5

H₃) Coulomb kayma gerilmesi varsayımı: Bu varsayım yukarıdaki varsayımın eksik taraflarını tamamlayan onun biraz daha genelleştirilmiş şeklidir. Burada cismin mukavemetinin sona ermesinde, yine temel olarak kayma gerilmesi alınmakla birlikte, iç sürtünme nedeniyle kayma gerilmesinin etkidiği yüzeyde normal gerilmenin de etkisi olacağı düşünülmektedir. Bu varsayım en büyük kayma gerilmesinin iki katı olan $\sigma_1 - \sigma_3$ farkının *sabit* olmayıp bunu $\sigma_1 + \sigma_3$ toplamının *lineer* bir fonksiyon saymakta, daha doğrusu, klasik mekanikteki sürtünme yasasından yararlanıp bir genelleme yapmaktadır. Kısa burada

$$\sigma_1 - \sigma_3 = a - b(\sigma_1 + \sigma_3) \quad (8.5)$$

bağıntısı, sınır durumları tanımlamaktadır. Burada a cismin *kohezyonu* ile ilgili sabit, b de *iç sürtünmeyi* karakterize eden boyutsuz bir çarpandır. $b = 0$ hali bizi bir önceki varsayımına götürür. a, b sabitlerini malzemenin birbirinden farklı olarak kabul ettiğimiz σ_M çekme mukavemeti ve σ'_M basınç mukavemeti cinsinden bulmak mümkündür. (8.5) den çekme mukavemeti için

$$\sigma_M - 0 = a - b(\sigma_M + 0)$$

ve basınç mukavemeti için

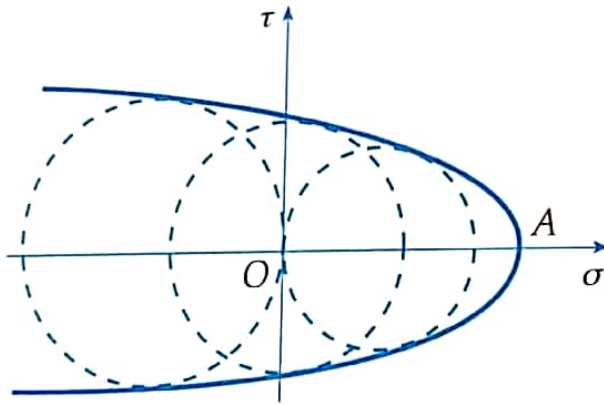
$$0 - (-\sigma'_M) = a - b[0 + (-\sigma'_M)]$$

Kum, kil gibi taneli malzemelere ait bir cismin sınır denge konumlarını Coulomb varsayımı ile açıklamak mümkündür. Şekil 8.8 kum ve şekil 8.9 ise kohezyonlu kil için zarf doğrularını göstermektedir.

H₄) Mohr genel kayma gerilmesi varsayımı: En büyük kayma gerilmesi varsayımının yukarıda anlatılan şekilde genişletilmesi gevrek cisim için uygun değildir. Çünkü deneyler göstermiştir ki, sınır Mohr dairelerinin zarfı her zaman *iki doğru* değildir. Bu nedenle bütün halleri kapsayan bir genişletmeye daha gerek vardır, o da **Mohr** tarafından yapılmıştır. Mohr'a göre en büyük kayma gerilmesi, üzerine etkiyen normal gerilmeye bağlıdır; fakat bu bağıklık *lineer* değildir, daha çok

$$\sigma_1 - \sigma_3 = F(\sigma_1 + \sigma_3)$$

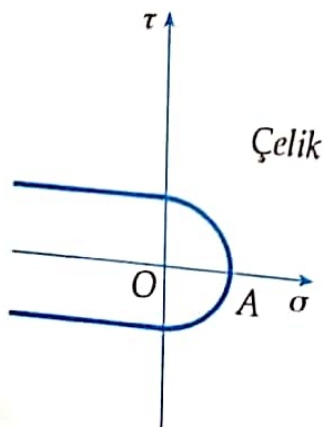
(8.8)



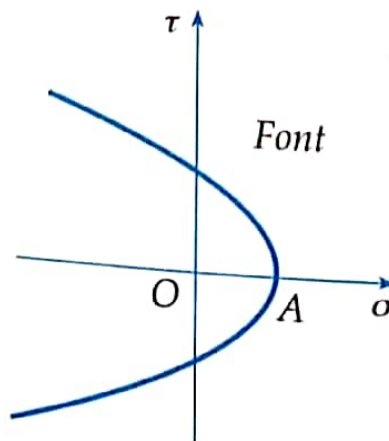
Şekil 8.10

gibi genel bir ifadedir. Burada F fonksiyonu her malzeme için *deneyden* elde edilir. Örneğin şekil 8.10 da bir malzemenin sınır Mohr dairelerinin doğru olmayan zarfı gösterilmiştir. Bu zarf eğrisi her malzeme için karakteristik bir şekle sahiptir. Bunlar ayrı ayrı deneylerle bulunmalıdır. Bir cisim için zarf belli olursa, zorlama haline

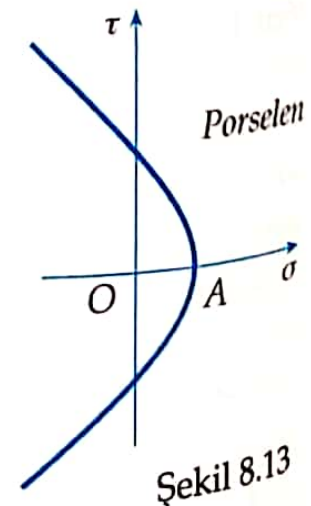
karşı gelen en büyük Mohr dairesi σ, τ düzleminde yerine oturtulur. Bu daire zarfı kesmedikçe, zorlamanın sınırdan uzak olduğuna karar verilir. Şekil 8.11, 8.12, 8.13 ve 8.14 de birkaç cisim için karakteristik zarf eğrileri şematik olarak verilmiştir. Önemli nokta karakteristik eğrilerin basınç taraflarının



Şekil 8.11



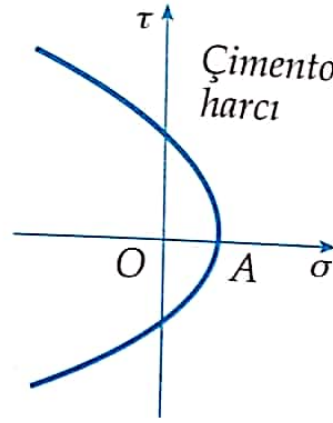
Şekil 8.12



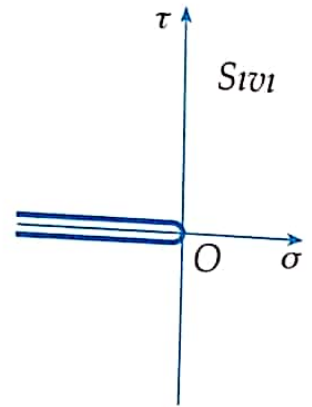
Şekil 8.13

açık olmasıdır; çünkü malzemeler *sınırsız* hidrostatik basıncı tehlikesizce taşıyabilirler. Hepsinin çekme tarafları ise kapalıdır. Zira *sonlu* kohezyonları dolayısıyla hidrostatik çekmenin de belirli bir değeri aşmaması gerekir.

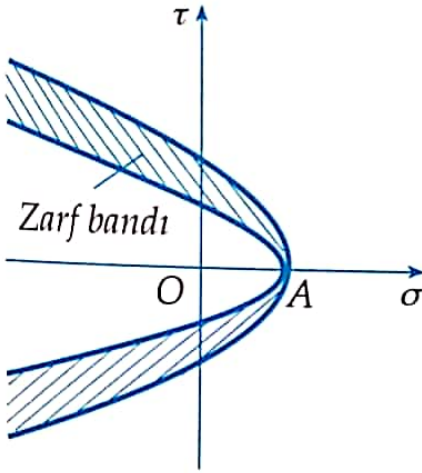
Dengede bulunan sıvılardaki iç gerilme hali, *yalnız* hidrostatik basınç olduğundan bunlara ait karakteristik eğri absis ekseninin negatif kısmı ile üst üste düşer, şekil 8.15 e bakınız.



Şekil 8.14



Şekil 8.15



Şekil 8.16

Mohr'un genel kayma gerilmesi varsayımına yapılacak tek ama önemli itiraz, ortanca gerilme olan σ_2 nin hiç hesaba alınmamış olmasıdır. Deneyler göstermiştir ki ortanca gerilmenin değerine göre zarf eğrisi de değişmektedir. Tek bir zarf yerine bunları içine alan bir zarf *bandından* söz etmek daha doğru olur. Şekil 8.16 da ortanca gerilmenin değerine göre zarf eğilerinin içinde bulunduğu bant şematik olarak gösterilmiştir.

8.4. Şekil Değiştirme Varsayımları

Bu gruptaki hipotezler, cisimde *akma* veya *kırılma* halinin doğmasında şekil değiştirmenin, örneğin uzunluk değişiminin rolünü esas alırlar. Başlıcaları şunlardır:

H_5) *En büyük uzama veya kısalma varsayımı*: Bugün için ancak tarihi önemi olan bu hipotez, **Mariotte**, **St. Venant** ve **Poncelet** tarafından ileri sürülmüştür. Üç eksenli zorlamada tehlikeli halin, en büyük uzama veya kısalmanın, bir eksenlideki değere eşit olduğu zaman doğacağı düşünülür. Örneğin mutlak değer olarak en büyük asal boy değişimi bir uzama olsun, o halde bu varsayımına göre karşılaştırma

$$\frac{1}{E} [\sigma_1 - \nu(\sigma_2 + \sigma_3)] = \frac{\sigma_M}{E}$$

veya

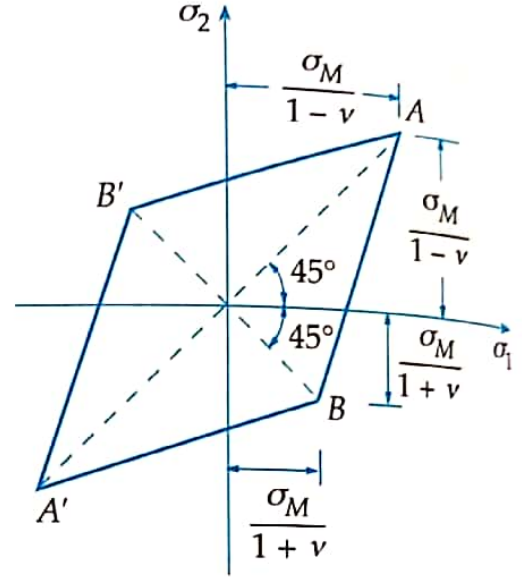
$$\sigma_1 - \nu(\sigma_2 + \sigma_3) = \sigma_M \quad (8.9)$$

denklemini ile yapılacaktır. Mutlak değer olarak en büyük boy değişimi bir kısalma ise, (8.9) denklemini yerine

$$\sigma_3 - \nu(\sigma_1 + \sigma_2) = -\sigma'_M \quad (8.10)$$

bağıntısı geçerli olur. Burada σ'_M cismin basınç mukavemetini gösterir. Şekil 8.17 bu hipoteze göre düzlem gerilme haline ait sınırları göstermektedir. Şekil çizilirken $\sigma_M = \sigma'_M$ olarak kabul edilmiştir. Sınır, AA' ve BB' köşegenlerine göre simetriktir, yani eşkenar dörtgendir.

Bu hipotez hidrostatik basınç deneyini sağlamadığı gibi, iki eksenli çekme halinde de, malzemenin tek eksenliden daha büyük bir mukavemet göstereceği gibi gerçeğe uymayan bir sonuç verir. Bugün için bu varsayımın fazla bir değeri yoktur.



Şekil 8.17

H_6) Genel şekil değiştirme varsayımı: Burada ϵ_{enb} ve ϵ_{enk} yerine, üç asal uzama oranının bir çeşit bileşkesi olan ve aşağıdaki formülle bulunan ϵ_d değeri esas alınır:

$$\epsilon_d = \sqrt{\epsilon_1^2 + \epsilon_2^2 + \epsilon_3^2} \quad (8.11)$$

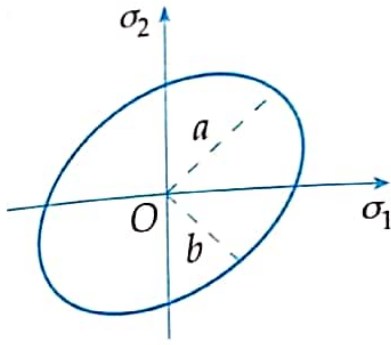
Eğer bu değer tek eksenlideki karşıtına eşit olursa, iki hal birbirleriyle karşılaştırılabilir. Varsayımın asal gerilmelerle ifade edilen şekli

$$\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2 - \frac{2\nu(2-\nu)}{1+2\nu^2}(\sigma_1\sigma_2 + \sigma_1\sigma_3 + \sigma_2\sigma_3) = \sigma_M^2 \quad (8.12)$$

denklemdir. $\sigma_3 = 0$ düzlem hali için

$$\sigma_1^2 + \sigma_2^2 - \frac{2\nu(2-\nu)}{1+2\nu^2}\sigma_1\sigma_2 = \sigma_M^2 \quad (8.13)$$

olur. Buna ait sınır eğrisi olan elips, şekil 8.18 de şematik olarak çizilmiştir. Elipsin yarıçapları (8.13) denkleminde



Şekil 8.18

$$\left. \begin{aligned} a &= \sqrt{\frac{1+2\nu^2}{1+3\nu^2-2\nu}} \sigma_M \\ b &= \sqrt{\frac{1+2\nu^2}{1+\nu^2+2\nu}} \sigma_M \end{aligned} \right\} \quad (8.14)$$

olarak bulunur. Bu hipotez ortanca gerilmenin rolünü hesaba katmakla birlikte hidrostatik basınç deneyini sağlamaz. Bununla beraber, plastik özelliği fazla cisimlerde iki eksenli zorlamalar için, iyiye yakın sonuçlar verir.

8.5. Enerji Varsayımları

Bu varsayımlar, malzemenin plastik hale geçme veya mukavemetinin yenilmesinde, şekil değiştirme enerjisinin veya bunun bir kısmının rol oynadığını kabul eder. Enerji, belirli bir değere erişince cisim sınır duruma ulaşmış demektir. Enerjinin bu belirli değeri de tek eksenli sınır zorlamadaki enerjidir.

Enerji bazlı hipotezler, diğerlerine göre daha yenidir. Her üç asal gerilmeyi birden göz önünde tutmaları bakımından ilgi çekicidirler. Bunlardan önemli olan ikisi aşağıda açıklanmıştır.

H₇) Toplam şekil değiştirme enerjisi varsayımı: **Beltrami** tarafından konan bu varsayıma göre, karşılaştırma her iki zorlamada şekil değiştirme enerjilerinin eşit olması kabul edilerek yapılır. σ_1 , σ_2 ve σ_3 asal gerilmeleriyle verilen üç eksenli hal ile σ_M ile gösterilen tek eksenli hal ancak

$$u_i = \frac{1}{2E} [\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2 - 2\nu(\sigma_1\sigma_2 + \sigma_1\sigma_3 + \sigma_2\sigma_3)] = \frac{1}{2E} \sigma_M^2 \quad (8.15)$$

eşitliği ile karşılaştırılabilir. (8.15) yerine daha basit olan

$$\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2 - 2\nu(\sigma_1\sigma_2 + \sigma_1\sigma_3 + \sigma_2\sigma_3) = \sigma_M^2 \quad (8.16)$$

ifadesi yazılabilir. (8.16) denklemi, şekil 8.2 de tanımlanan gerilme uzayında bir *elipsoid* gösterir, yani *kapalı* bir sınır yüzeyi tanımlanır. Oysaki malzemenin sınırsız hidrostatik basınç deneyine dayanması bu yüzeyin açık olmasını gerektirir. Bu yönden bu varsayım ancak bazı özel koşullarda gevrek olmayan malzeme için kullanılabilir.

$\sigma_3 = 0$ düzlemsel gerilme hali için (8.16) denklemi

$$\sigma_1^2 + \sigma_2^2 - 2\nu\sigma_1\sigma_2 = \sigma_M^2 \quad (8.17)$$

ifadesine dejenere olur, bu da şekil 8.18 deki gibi bir elips çevre gösterir, yalnız bu halde yarıçaplar

$$a = \sqrt{\frac{1}{1-\nu}} \sigma_M, \quad b = \sqrt{\frac{1}{1+\nu}} \sigma_M \quad (8.18)$$

dir.

H₈) Biçim değiştirme enerjisi varsayımı: Hidrostatik basınç deneyinde, mukavemetin sınırsız oluşu, tehlikeli durumun doğmasında, hacim değiştirmenin bir rolü olmadığını açıkça göstermektedir. O halde enerji esasına dayanan bir varsayım kurulurken hacim değiştirme enerjisini işleme sokmak doğru olmaz; daha çok enerjinin, cismin geometrisini değiştirmeye harcanan bölümü, yani *biçim değiştirme enerjisi* karşılaştırmaya esas alınmalıdır. (6.20) denkleminin yararlanarak (8.15) yerine

$$u_g = \frac{1}{6G} [\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2 - (\sigma_1\sigma_2 + \sigma_2\sigma_3 + \sigma_1\sigma_3)] = \frac{1}{6G} \sigma_M^2$$

veya

$$\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2 - (\sigma_1\sigma_2 + \sigma_2\sigma_3 + \sigma_3\sigma_1) = \sigma_M^2 \quad (8.19)$$

denklemini elde edilir. (8.19) denklemi, her iki tarafından *açık* olan *silindirik* yüzeyi gösterir ve özellikle uzaması fazla olan malzeme için, deneyler tarafından doğrulanan sonuçlar verir.

V. Mises ve arkadaşları tarafından bu hipotez, plastisite teorisinde, *akma koşulu* olarak başarı ile kullanılmıştır.

Biçim değiştirme enerjisi kriterinin tek eksik tarafı, *hidrostatik basınçta* olduğu gibi *hidrostatik çekme* için de bir sınır tanımamasıdır. Oysaki çekme halinde kohezyon nasıl olsa yenilecek, cisimde bir ayrılma görülecektir. Bu kusur, **Huber** tarafından iki enerji hipotezi birleştirilerek ortadan kaldırılmıştır. Eğer ortalama gerilme $(\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3)/3 < 0$ tarzında basınç ise (8.19) kriteri uygulanacak; bunun çekme yani $(\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3)/3 > 0$ olan değerleri için de **Beltrami**'nin (8.16) varsayımı kullanılacaktır. Bu *düzeltilme* iki tarafından da açık olan yüzeyini çekme tarafından kapatmak demektir. Yalnız $\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3 = 0$ düzlemi için (8.16) ve (8.19) kriterlerinin farklı sonuçlar vereceğine dikkat edilmelidir.

Biçim değiştirme enerjisi hipotezi düzlemsel gerilme hali için

$$\sigma_1^2 + \sigma_2^2 - \sigma_1\sigma_2 = \sigma_M^2 \quad (8.20)$$

denklemin tanımlanan bir elips ile gösterilir. Şekil 8.18 deki gibi olan bu elipsin yarıçapları

$$a = \sqrt{2} \sigma_M, \quad b = \sqrt{\frac{2}{3}} \sigma_M \quad (8.21)$$

dir.

Düzlemsel gerilme hali, asal gerilmeler yerine σ_x , σ_y ve τ_{xy} gerilmeleriyle verilecek olursa (8.20) denklemi

$$\sigma_x^2 + \sigma_y^2 - \sigma_x\sigma_y + 3\tau_{xy}^2 = \sigma_M^2 \quad (8.22)$$

şeklini alır.

Biçim değiştirme enerjisi hipotezine bir *genel kayma gerilmesi* hipotezi gözüyle de bakılabilir. Çünkü (3.39) ve (8.19) denklemleri karşılaştırılacak olursa

$$9\tau_{ok}^2/2 = \sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2 - (\sigma_1\sigma_2 + \sigma_2\sigma_3 + \sigma_1\sigma_3)$$

bağıntısı bulunur. Demek oluyor ki biçim değiştirme enerjisi *oktoedral kayma gerilmesinin* karesiyle orantılıdır. Buna göre enerjetik yönden ve oktoedral kayma gerilmesi yönünden yapılacak karşılaştırma hep aynı sonucu veriyor demektir. Burada karşılaştırma

$$(\tau_{ok})_{\text{üç eksenli}} = (\tau_{ok})_{\text{bir eksenli}} = \sqrt{2}\sigma_M/3 \quad (8.23)$$

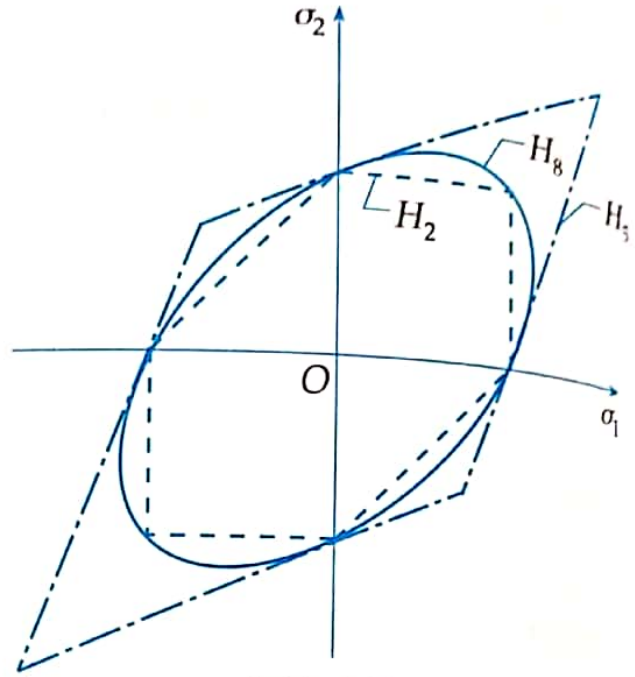
denkleminle yapılır.

8.6. Çeşitli Varsayımların Karşılaştırılması

Kuruluşlarında hareket noktaları başka başka olan çeşitli varsayımları birbirleri ile karşılaştırmak için en iyi yol, bunların σ_1 , σ_2 ve σ_3 eksen takımındaki tasvirlerini üst üste çizmektir. Böyle bir karşılaştırma düzlem gerilme hali için şekil 8.19 da gösterilmiştir. σ_1 , σ_2 düzleminde çizilen üç farklı varsayıma ait *sınır çevreleri* birbirlerini kapsamaktadır. En içerideki *altıgen* τ_{enb} varsayımını, bunu çevreleyen *elips* maksimum biçim değiştirme varsayımını ve en dışarıdaki *paralelkenarlı* ise en büyük uzama varsayımını göstermektedir. Şekilden anlaşıldığına göre τ_{enb} varsayımı diğer iki varsayımdan daha düşük sınırlar değerler vermektedir. Bir yönden ifadesinin basitliği diğer yönden daha gerçekçi sonuçlar vermesi nedeniyle uygulamada τ_{enb} varsayımı çok kullanı-

lır. En büyük biçim değiştirme enerjisi varsayımı bazı hallerde τ_{enb} varsayımından daha büyük değerler verirse de aradaki fark hiçbir zaman %15 den fazla değildir. Sürekli bir sınır eğrisiyle gösterilmesi yönünden birçok problemlerde, özellikle plastisite teorisinde en büyük biçim değiştirme enerjisi varsayımı kullanılır.

Aşağıdaki tablo bir malzemenin basit kayma mukavemeti olan τ_M ile basit çekme mukavemeti σ_M arasındaki oranı gösterir. Değerler çeşitli varsayımlar ele alınarak bulunmuştur. Hesaplarda, gerektiğinde $\nu = 0,3$ alınmıştır.



Şekil 8.19

Varsayımlar	τ_{enb} H_2	$(u_g)_{enb}$ H_8	$(\epsilon_d)_{enb}$ H_6	$(u_i)_{enb}$ H_7	ϵ_{enb} H_5	σ_{enb} H_1
τ_M / σ_M	0,576	0,576	0,590	0,620	0,770	1,000

Tablo düzenlenirken elde edilen sınır değerlerinin büyüklük sırası göz önünde tutulmuştur. Yalnız şu noktayı önemle belirtelim ki bu sıra yalnız bu özel gerilme hali içindir; başka bir gerilme hali için yapılacak karşılaştırmada başka bir diziliş elde edilebilir ve hatta farklı varsayımlar aynı sonucu da verebilir.

Son olarak, pratikte seçilen varsayımlar şöylece özetlenebilir:

- Gevrek malzeme için Mohr'un genel kayma gerilmesi varsayımı,
- Çok uzayabilen malzeme için de ya en büyük kayma gerilmesi veya en büyük yük biçim değiştirme enerjisi varsayımı iyi sonuç verir.

Yüklemenin periyodik olması gibi dinamik zorlamalarda da en büyük biçim

değiştirme enerjisi hipotezinin uygulanmasının gerektiğini, Ross ve Eischinger ileriye sürmektedirler.

8.7. Mukavemet Varsayımlarında Son Gelişmeler

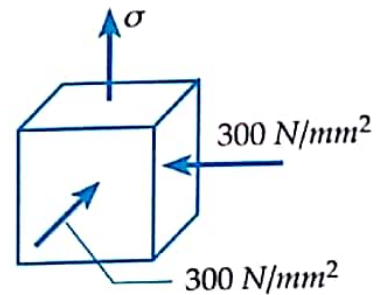
Yukarıda anlatılan çeşitli hipotezler ele alınırken, cismin tehlikeli duruma girmesinde esas rolün, en fazla zorlanmakta olan *nokta* olduğu düşünülmüştür. Deneyler göstermiştir ki, cisimde plastik hale geçme bir nokta yerine daha çok bir bölgede ani olarak meydana gelmektedir. Bir noktadaki gerilme hali sınır değere ulaştığı, hatta aştığı halde bile, cisimdeki kalıcı şekil değiştirmeler görülmemektedir. Bunun nedeni, yüksek zorlamalı noktanın yakın civarının çok düşük gerilmeli olması ve akmayı frenlemesidir. Bu hal daha çok *gerilme sivrilikleri* adı verilen ve homojen olmayan gerilme hallerinde görülmektedir. Bu gibi durumlarda akma olayı, ancak zorlanmanın bir bölgedeki ortalama değeri sınıra ulaşınca başgöstermektedir. Bu nedenle yukarıda açıklanan varsayımlar ancak *homojen* veya buna yakın gerilme alanları için iyi sonuçlar verirler. Gerilme alanında bir noktadan diğerine değişim çok hızlı olursa, hipotezlerin verdikleri sınır değerler küçük olup hesap daima güvenli tarafta kalmaktadır.

Gerecin mukavemeti yönünden, bir güvenlik payı sayılan bu özelliğinden de yararlanılmak istenirse *noktayı* göz önüne alan varsayımdan *bölgeyi* inceleyecek olan hipoteze geçmek gerekir.

8.8. Problemler

Problem 1: Dökme demirin basınç mukavemeti 800 N/mm^2 ve çekme mukavemeti 200 N/mm^2 olarak verilmiştir. Şekil 8.20'deki gerilme haline ait σ değeri ne kadar olmalıdır ki malzeme limit duruma erişmiş olsun. Coulomb kayma gerilmesi varsayımını kullanınız.

Problem 2: İki eksenli gerilme hali σ_x , σ_y ve τ_{xy} gerilmeleriyle veriliyor. Biçim değiştirme enerjisi varsayımına göre karşılaştırma gerilmesini bu gerilmelerle ifade eden (8.22) formülünü bulunuz.



Şekil 8.20