



Kesikli Olasılık Dağılımları

Düzgün (Uniform) Dağılım

- Kesikli olasılık dağılımlarının en basitidir.
- X rasgele değişkeninin alabileceği her değer eşit olasılıklıdır.
- X ; $x_1, x_2, \dots, x_k$ değerlerini alıyorsa ve bunların her birinin olasılığı eşitse,

$$f(x; k) = \frac{1}{k} \quad x = x_1, x_2, \dots, x_k$$

Örneğin; 40, 60, 75 ve 100 watt'lık 4 ampul bulunan bir kutudan rasgele bir ampul seçildiğinde örnek uzayının her bir elemanı eşit ve $\frac{1}{4}$ olasılıkla çekilme şansına sahiptir. Bu durumda,

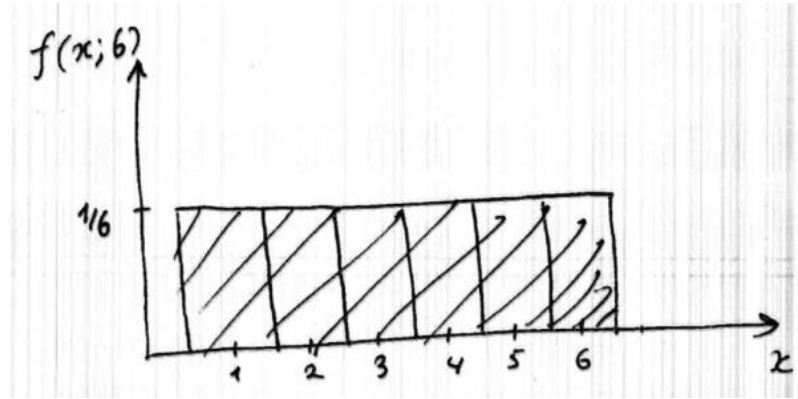
$$S=\{40,60,75,100\}$$

ve

$$f(x;4)=1/4 \quad ; x=40,60,75,100$$

olan bir düzgün dağılım elde ederiz.

Örneğin; hilesiz bir zar attığımızda $S=\{1,2,3,4,5,6\}$ örnek uzaylı, $1/6$ eşit olasılıklı ve $f(x;6)=1/6 \quad ; x=1,2,3,4,5,6$ olan bir düzgün dağılım elde edilir.



Bir zar atımının histogram ile gösterimi

Teorem: $f(x;k)$ düzgün dağılımının ortalama değeri ve varyansı

$$\mu = \frac{1}{k} \sum_{i=1}^k x_i \quad \text{ve} \quad \sigma^2 = \frac{1}{k} \sum_{i=1}^k (x_i - \mu)^2$$

İspat:

$$\mu = E(X) = \sum_{i=1}^k x_i f(x_i; k) = \sum_{i=1}^k \frac{x_i}{k} = \frac{1}{k} \sum_{i=1}^k x_i$$

$$\sigma^2 = E[(X - \mu)^2] = \sum_{i=1}^k (x_i - \mu)^2 f(x_i; k) = \frac{1}{k} \sum_{i=1}^k (x_i - \mu)^2$$

Binom Dağılımı

- Binom dağılımında bir deneyin tekrarlı ve bağımsız olması ve bir deneyin iki çıktısının olması gözetilir.
- Çıktılardan biri "başarı" diğeri ise "başarısızlık" olarak nitelendirilir.

Başarı olasılığı  p

Başarısızlık olasılığı  $q=1-p$

Teorem: Bir deney n kez tekrar ediliyor ve x kez başarıya ulaşıyorsa, bu sürecin olasılığı,

$$b(x; n, p) = \binom{n}{x} p^x q^{n-x}$$

- Hiçbir başarı yakalayamama olasılığı; q^n
- En az bir başarı elde etme olasılığı ise; $1 - q^n$

Eğer n ve p sabit ise, $f(x) = b(x; n, p)$ fonksiyonu kesikli bir olasılık dağılımıdır:

x	0	1	2	...	n
$f(x)$	q^n	$\binom{n}{1} p^1 q^{n-1}$	$\binom{n}{2} p^2 q^{n-2}$		p^n

- Bu dağılım binom dağılımı olarak adlandırılır.

$k=0,1,2,\dots,n$ için binom dağılımı,

$$(q + p)^n = q^n + \binom{n}{1} q^{n-1} p + \binom{n}{2} q^{n-2} p^2 + \dots + p^n$$

Bu dağılım aynı zamanda "Bernoulli Dağılımı" olarak da adlandırılır ve iki çıktılı bağımsız denemeler Bernoulli denemeleri olarak adlandırılır.

Ortalama	$\mu = n p$
Varyans	$\sigma^2 = n p q$
Standart sapma	$\sigma = \sqrt{npq}$

Örnek: A takımının yaptığı her maçta $\frac{2}{3}$ kazanma olasılığı vardır. A takımı eğer 4 maç yaparsa,

- a) 2 maç
- b) en az 1 maç
- c) maçlardan yarısından fazlasını

kazanma olasılıklarını bulunuz.

$$n=4$$

$$p=\frac{2}{3}$$

$$q=1-p=\frac{1}{3}$$

a) $P(2 \text{ kazanma}) = b(2; 4, \frac{2}{3}) = \binom{4}{2} \left(\frac{2}{3}\right)^2 \left(\frac{1}{3}\right)^2 = \frac{8}{27}$

b) $q^4 = \left(\frac{1}{3}\right)^4 = \frac{1}{81} \rightarrow \text{Her maçı kaybetme olasılığı}$

$$1 - q^4 = 1 - \frac{1}{81} = \frac{80}{81} \rightarrow \text{En az 1 maçı kazanma olasılığı}$$

c) A takımı 3 ya da 4 maç kazanırsa,

$$P(3 \text{ kazanma}) + P(4 \text{ kazanma}) = \binom{4}{3} \left(\frac{2}{3}\right)^3 \left(\frac{1}{3}\right) + \binom{4}{4} \left(\frac{2}{3}\right)^4 = \frac{32}{81} + \frac{16}{81} = \frac{48}{81}$$

Poisson Dağılımı

- Verilmiş bir zaman aralığında ya da uzayın verilmiş bir bölgesinde başarıların sayısı, X rasgele değişkeni olsun. Aşağıdaki koşulları sağlayan X 'e Poisson rasgele değişkeni denir.
 - İki ayrık zaman aralığında veya uzayın bölgelerindeki başarıların sayıları bağımsızdır.
 - Küçük bir zaman aralığı veya uzayın küçük bir bölgesi için başarı olasılığı, uzaydaki bölge ya da zaman aralığının uzunluğu ile orantılıdır.
 - Küçük bir zaman aralığı veya uzayın küçük bir bölgesinde iki ya da daha çok başarının olasılığı önemsizdir.

Örneğin; - Büyük bir şehirdeki aylık otomobil kazalarının sayısı
- Bir havaalanına her saat inen uçakların sayısı

Poisson Dağılımı

$$P(X = x) = \frac{e^{-\lambda} \lambda^x}{x!} \quad \begin{array}{l} x=0, 1, 2, \dots, \\ \lambda > 0 \end{array}$$

$e=2,71828$

λ : Uzayın bir bölgesinde veya verilmiş bir zaman aralığında elde edilen başarıların ortalamasıdır.

Sürekli Düzgün Dağılım

- Düz bir yoğunluk fonksiyonu ile tanımlanır.
- Dolayısıyla olasılık değeri kapalı bir aralıkta düzgündür. (örn, $[A,B]$)

Yoğunluk fonksiyonu;

$$f(x; A, B) = \frac{1}{B-A} \quad A \leq x \leq B$$

$$0 \quad \text{diğer}$$

Yoğunluk fonksiyonu
(B-A) tabanlı $(1/(B-A))$
yükseklikli bir dikdörtgen
oluşturur.