



İki Boyutlu Rasgele Değişkenler

İki Boyutlu Rasgele Değişken

Herhangi bir deney gerçekleştirildiğinde, aynı anda birden çok rasgele değişkenin bir arada düşünülmesi gerektiği durumlarla karşılaşılabilir.

Örneğin, bir sınıfta bulunan öğrencilerin yaş ve boy uzunluklarının ortak dağılımı aynı deney içerisinde düşünülmesi gereken iki değişken olabilir.

Bir olay içerisinde ortak olarak ele alınması gereken durumlarla karşılaşılabilir.

Kesikli Rasgele Değişken için Ortak Dağılım

X ve Y iki kesikli rasgele değişken

$$P(X=x, Y=y) = f(x, y)$$

$$1. f(x, y) \geq 0$$

$$2. \sum_x \sum_y f(x, y) = 1$$

Kesikli Rasgele Değişken için Ortak Dağılım

X 'in m sayıda $x_1, x_2, \dots, x_m$ ve Y 'nin n sayıda $y_1, y_2, \dots, y_n$ değerlerini aldığı düşünülürse;

$X=x_j$ ve $Y=y_k$ olaylarının olasılığı,

$$P(X=x_j, Y=y_k) = f(x_j, y_k)$$

Kesikli Rasgele Değişken için Ortak Dağılım

$X \backslash Y$	y_1	y_2	...	y_n	Toplam
x_1	$f(x_1, y_1)$	$f(x_1, y_2)$	...	$f(x_1, y_n)$	$f_1(x_1)$
x_2	$f(x_2, y_1)$	$f(x_2, y_2)$	...	$f(x_2, y_n)$	$f_1(x_2)$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	...	$\vdots$	$\vdots$
x_m	$f(x_m, y_1)$	$f(x_m, y_2)$	...	$f(x_m, y_n)$	$f_1(x_m)$
	$f_2(y_1)$	$f_2(y_2)$	...	$f_2(y_n)$	1

→
Y'nin
olasılık
fonksiyonu

↑
X'in olasılık
fonksiyonu

Kesikli Rasgele Değişken için Ortak Dağılım

$$P(X = x_j) = f_1(x_j) = \sum_{k=1}^n f(x_j, y_k)$$

$$P(Y = y_k) = f_2(y_k) = \sum_{j=1}^m f(x_j, y_k)$$

$f_1(x)$
 $f_2(y)$ } X ve Y'nin marjinal olasılık fonksiyonları

$$\sum_{j=1}^m f_1(x_j) = 1$$

$$\sum_{k=1}^n f_2(y_k) = 1$$

$$\sum_{j=1}^m \sum_{k=1}^n f(x_j, y_k) = 1$$

Kesikli Rasgele Değişken için Ortak Dağılım Fonksiyonu

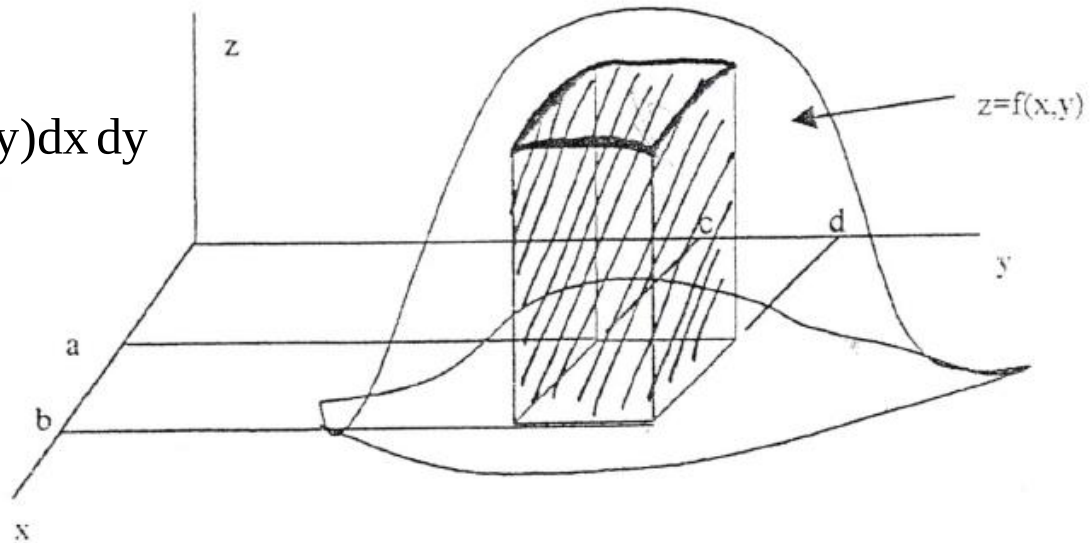
$$F(x, y) = P(X \leq x, Y \leq y) = \sum_{u \leq x} \sum_{v \leq y} f(u, v)$$

Sürekli Rasgele Değişken için Ortak Dağılım

1. $f(x, y) \geq 0$

2. $\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y) dx dy = 1$

$$P(a < X < b, c < Y < d) = \int_{x=a}^b \int_{y=c}^d f(x, y) dx dy$$



Sürekli Rasgele Değişken için Ortak Dağılım Fonksiyonu

$$F(x, y) = P(X \leq x, Y \leq y) = \int_{u=-\infty}^x \int_{v=-\infty}^y f(u, v) du dv$$

$$\frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} = f(x, y)$$

$$P(X \leq x) = F_1(x) = \int_{u=-\infty}^x \int_{v=-\infty}^{\infty} f(u, v) du dv$$

$$P(Y \leq y) = F_2(y) = \int_{u=-\infty}^{\infty} \int_{v=-\infty}^y f(u, v) du dv$$

Örnek: Üç hilesiz para atılıyor. X rasgele değişkeni gelen tura sayısını, Y ise (tura-yazı) sayısını gösterebilir. X ve Y'nin ortak dağılımını bulunuz.

Örnek Uzayı	x	y
TTT	3	3
TTY	2	1
TYT	2	1
YTT	2	1
TTY	1	-1
YTY	1	-1
YYT	1	-1
YYY	0	-3

Örnek: Üç hilesiz para atılıyor. X rasgele değişkeni gelen tura sayısını, Y ise (tura-yazı) sayısını gösterebilir. X ve Y'nin ortak dağılımını bulunuz.

Örnek Uzayı	x	y
TTT	3	3
TTY	2	1
TYT	2	1
YTT	2	1
TTY	1	-1
YTY	1	-1
YYT	1	-1
YYY	0	-3

		x			
	f(x,y)	0	1	2	3
y	-3	1/8			
	-1		3/8		
	1			3/8	
	3				1/8

Bağımsız Rasgele Değişkenler

X ve Y Kesikli Rasgele Değişkenler

$$P(X = x, Y = y) = P(X = x)P(Y = y)$$

ya da

$$f(x, y) = f_1(x)f_2(y)$$

X ve Y bağımsız rasgele
değişkenler ise

X ve Y Sürekli Rasgele Değişkenler

$$P(X \leq x, Y \leq y) = P(X \leq x)P(Y \leq y)$$

ya da

$$F(x, y) = F_1(x)F_2(y)$$

X ve Y bağımsız rasgele
değişkenler ise

Örnek: X ve Y kesikli rasgele değişkenlerinin ortak olasılık fonksiyonu $f(x,y)=c*(2x+y)$ olarak veriliyor. Eşitlikte x ve y; $0 \leq x \leq 2$; $0 \leq y \leq 3$ ve diğer bölgelerde de $f(x,y)=0$ olmak üzere tüm tamsayı değerlerini alabiliyor.

- a) $c=?$
- b) $P(x=2, y=1)=?$
- c) $P(x \geq 1, y \leq 2)=?$

x \ y	0	1	2	3	Toplam
0	0	c	2c	3c	6c
1	2c	3c	4c	5c	14c
2	4c	5c	6c	7c	22c
Toplam	6c	9c	12c	15c	1

Örnek:

a) $c=?$

b) $P(x=2, y=1)=?$

c) $P(x \geq 1, y \leq 2)=?$

$x \backslash y$	0	1	2	3	Toplam
0	0	c	$2c$	$3c$	$6c$
1	$2c$	$3c$	$4c$	$5c$	$14c$
2	$4c$	$5c$	$6c$	$7c$	$22c$
Toplam	$6c$	$9c$	$12c$	$15c$	1

a) $42c=1$; $c=1/42$

b) $P(x=2, y=1)=5c=5/42$

c) $P(x \geq 1, y \leq 2) = (2c+3c+4c)+(4c+5c+6c)=24c=24/42$

$X=x$	0	1	2
$f(x)$	$6/42$	$14/42$	$22/42$

$Y=y$	0	1	2	3
$f(y)$	$6/42$	$9/42$	$12/42$	$15/42$

X ve Y'nin marjinal olasılık fonksiyonları

Örnek: Verilen tabloya göre x ve y'nin rasgele değişkene bağlı olup olmadığını gösteriniz.

x \ y	0	1	2	3	Toplam
0	0	c	2c	3c	6c
1	2c	3c	4c	5c	14c
2	4c	5c	6c	7c	22c
Toplam	6c	9c	12c	15c	1

$$\begin{aligned}P(X = x, Y = y) &= P(X = x)P(Y = y) \\ &= f_1(x)f_2(y)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}P(X = 2, Y = 1) &= \frac{5}{42} = P(X = 2)P(Y = 1) \\ \frac{5}{42} &\neq \frac{11}{21} \cdot \frac{3}{14}\end{aligned}$$

Bağımlıdır.



Dağılım Parametreleri

Matematiksel Beklenti

Matematiksel beklenti

Umut değer

Beklenen değer

Rasgele bir değişkenin beklentisi

Bir rasgele değişkenin beklenen değeri olasılık fonksiyonunun merkezi hakkında bilgi verir.

1. Kesikli Rasgele Değişken için Beklenen Değer

$$E(X) = x_1 P(X = x_1) + \dots + x_n P(X = x_n) = \sum_{j=1}^n x_j P(X = x_j)$$

$$P(X = x_j) = f(x_j)$$

$$E(X) = x_1 f(x_1) + \dots + x_n f(x_n) = \sum_{j=1}^n x_j f(x_j) = \sum x f(x)$$

2. Sürekli Rasgele Değişken için Beklenen Değer

$$E(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x f(x) dx$$

1. Kesikli Rasgele Değişken için Beklenen Değer

X'in olası değerleri eşit olasılıklı ise;

$$E(X) = \frac{x_1 + x_2 + \dots + x_n}{n}$$

Aritmetik
Ortalama

Örnek: Hilesiz bir para iki kez atılıyor. X üste gelen yazı sayısı ise bunun beklenen değerini bulunuz.

Örnek Nokta	X (yazıların sayısı)	Ort.Çık.Olas.
TT	0	1/4
TY	1	1/4
YT	1	1/4
YY	2	1/4

$X=x$	0	1	2
$f(x)$	1/4	1/2	1/4

X'in olasılık fonk.

$$E(X) = \sum_{j=1}^n x_j f(x_j)$$

$$E(X) = 0 \times \frac{1}{4} + 1 \times \frac{1}{2} + 2 \times \frac{1}{4} = 1$$

Örnek: Sayısal loto çekilişinde 200 bilete 5 TL, 20 bilete 25 TL, 5 bilete de 100 TL ödül veriliyor. 10000 bilet satıldığına göre bir bilete ödenmesi gereken uygun fiyat ne olmalıdır?

X : Dağıtılan ödüller

X	5	25	100	0
P(X=x)	0.02	0.002	0.0005	0.9775

$$E(X) = \sum_{j=1}^n x_j f(x_j)$$

$$E(X) = 5 * 0.02 + 25 * 0.002 + 100 * 0.0005 + 0 * 0.9775 = 0.2 \text{ TL}$$

Umut Değer ile İlgili Teoremler

1. c bir sabit sayı ise,

$$E(c \cdot X) = c \cdot E(X)$$

$$E(c + X) = c + E(X)$$

2. X ve Y herhangi iki rasgele değişken ise,

$$E(X + Y) = E(X) + E(Y)$$

3. X ve Y bağımsız rasgele değişkenler ise,

$$E(X \cdot Y) = E(X) \cdot E(Y)$$

Örnek: X rasgele değişkeninin olasılık fonksiyonu aşağıda verilmiştir:

X=x	1	2	3	4	5	6
f(x)	1/6	1/6	1/6	1/6	1/6	1/6

- a) $E(X^2)$
- b) $E(2X)$
- c) $E(2X-1)$

a) $E(X^2)$

$X=x$	1	4	9	16	25	36
$f(x)$	1/6	1/6	1/6	1/6	1/6	1/6

$$E(X^2) = 1 * \frac{1}{6} + 4 * \frac{1}{6} + 9 * \frac{1}{6} + 16 * \frac{1}{6} + 25 * \frac{1}{6} + 36 * \frac{1}{6} = \frac{91}{6}$$

b) $E(2X)$

$X=x$	2	4	6	8	10	12
$f(x)$	1/6	1/6	1/6	1/6	1/6	1/6

$$E(2X) = 2 * \frac{1}{6} + 4 * \frac{1}{6} + 6 * \frac{1}{6} + 8 * \frac{1}{6} + 10 * \frac{1}{6} + 12 * \frac{1}{6} = \frac{42}{6}$$

c) $E(2X-1)$

$X=x$	1	3	5	7	9	11
$f(x)$	$1/6$	$1/6$	$1/6$	$1/6$	$1/6$	$1/6$

$$E(2X-1) = 1 * \frac{1}{6} + 3 * \frac{1}{6} + 5 * \frac{1}{6} + 7 * \frac{1}{6} + 9 * \frac{1}{6} + 11 * \frac{1}{6} = \frac{36}{6}$$

Örnek: X'in yoğunluk fonksiyonu aşağıda verilmiştir. Beklenen değerini bulunuz.

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}x & 0 < x < 2 \\ 0 & \text{aralık dışı} \end{cases}$$

$$E(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x f(x) dx = \int_0^2 x \left(\frac{1}{2}x\right) dx = \int_0^2 \frac{x^2}{2} dx = \frac{x^3}{6} \Big|_0^2 = \frac{4}{3}$$