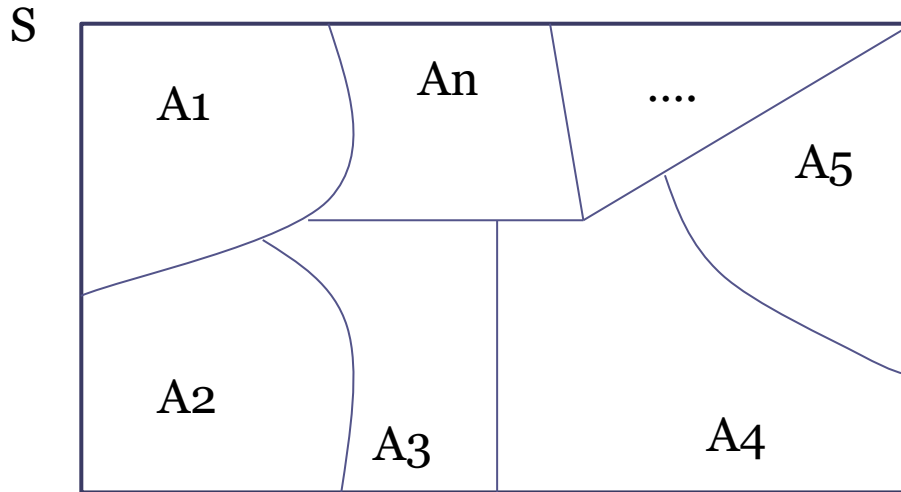


Bayes Teoremi

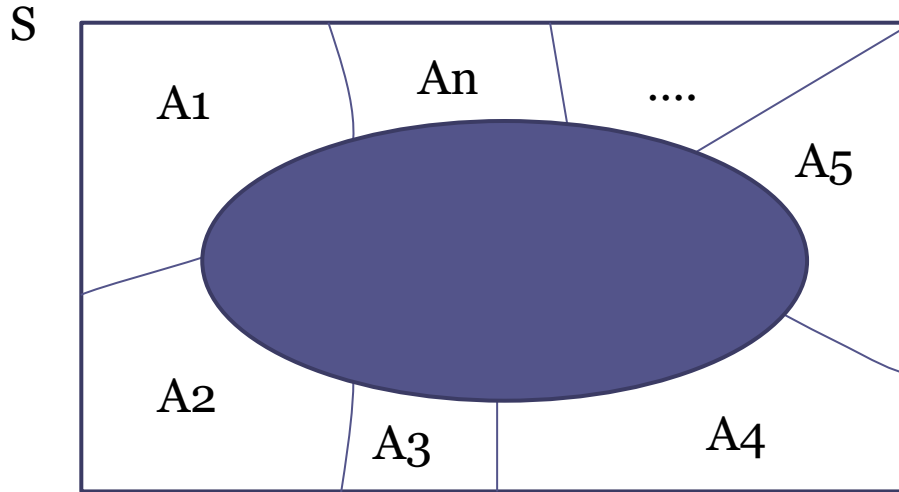
$A_1, A_2, A_3, \dots, A_n$ S örnek uzayının ayrık ve birleşimleri S olan olayları olsun. Eğer $P(A_i) \neq 0$ ($i = 1, 2, 3, \dots, n$) ve E, S örnek uzayında herhangi bir olay ise $P(E) \neq 0$,



$$S = A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup A_4 \cup A_5 \cup \dots \cup A_n$$

Bayes Teoremi

$A_1, A_2, A_3, \dots, A_n$ S örnek uzayının ayrık ve birleşimleri S olan olayları olsun. Eğer $P(A_i) \neq 0$ ($i = 1, 2, 3, \dots, n$) ve E, S örnek uzayında herhangi bir olay ise $P(E) \neq 0$,



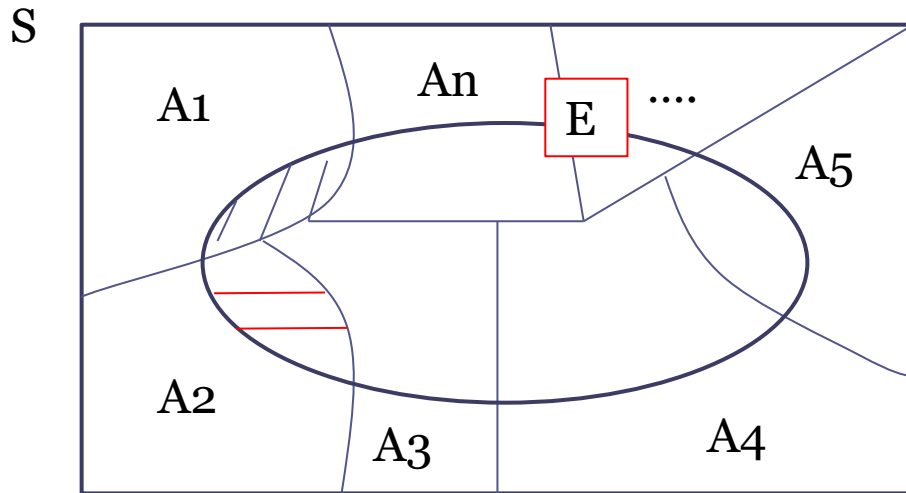
Taralı alan E olayı

$$P(A_1 \setminus E) = ?$$



E olayının gerçekleşmiş olması koşuluna göre A'lardan herhangi birinin ortaya çıkma olasılığını hesaplamak

Bayes Teoremi



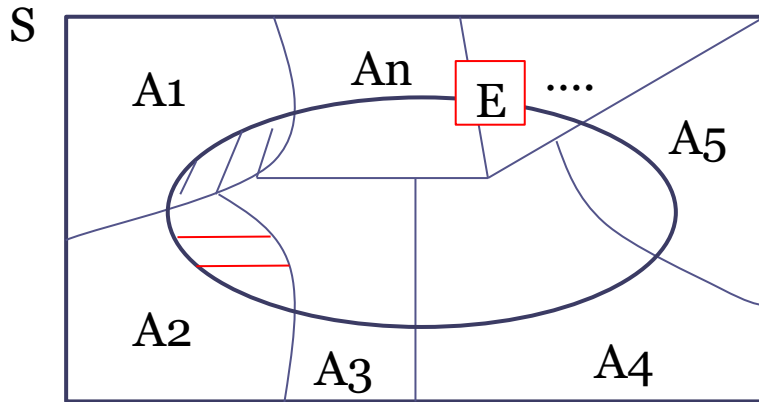
$$P(E) = P(E \cap A_1) + P(E \cap A_2) + P(E \cap A_3) + \dots + P(E \cap A_n)$$

$$P(E \setminus A_1) = \frac{P(E \cap A_1)}{P(A_1)} \longrightarrow \text{Koşullu Olasılık}$$

$$P(E \cap A_1) = P(E \setminus A_1)P(A_1)$$

$$P(E) = P(E \setminus A_1)P(A_1) + P(E \setminus A_2)P(A_2) + \dots + P(E \setminus A_n)P(A_n)$$

Bayes Teoremi



$$P(E \setminus A_i) = \frac{P(E \cap A_i)}{P(A_i)}$$

$$P(A_i \setminus E) = \frac{P(A_i \cap E)}{P(E)}$$

$$P(A_i) P(E \setminus A_i) = P(E) P(A_i \setminus E)$$

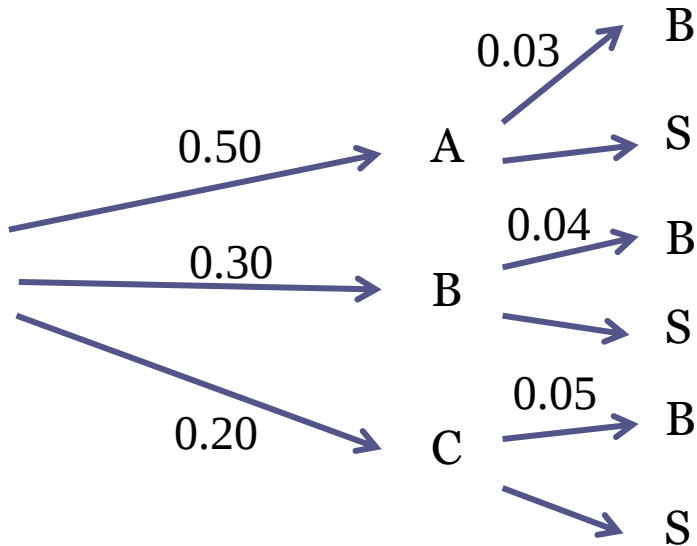
$$P(A_i \setminus E) = \frac{P(A_i) P(E \setminus A_i)}{P(E)}$$

$$P(E) = P(E \setminus A_1) P(A_1) + P(E \setminus A_2) P(A_2) + \dots + P(E \setminus A_n) P(A_n)$$

Örnek:

A, B ve C gibi üç makina bir fabrikadaki ürünlerin sırasıyla %50, %30 ve %20 sini üretmektedir. Bu makinalar %3, %4 ve %5 oranında bozuk ürün vermektedir. Rasgele seçilen bir ürünün bozuk olma olasılığı nedir?

X: Ürünün bozuk olduğu olay



$$P(X) = P(X \setminus A)P(A) + P(X \setminus B)P(B) + P(X \setminus C)P(C)$$

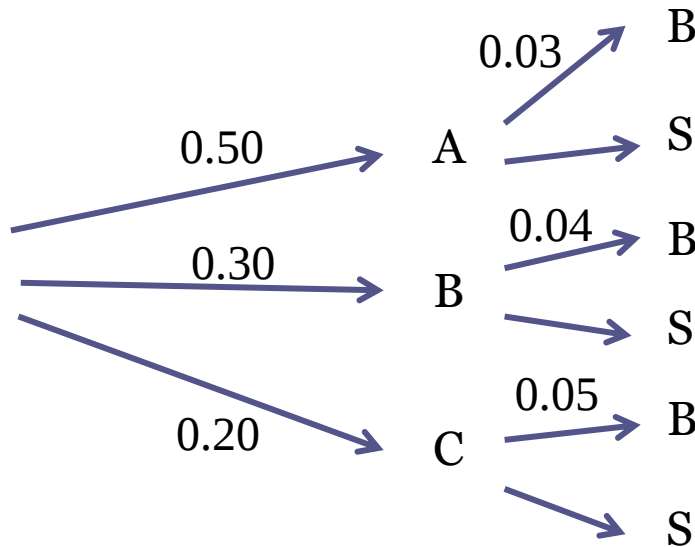
$$P(X) = 0.03 * 0.50 + 0.04 * 0.30 + 0.05 * 0.20 = 0.037$$

Örnek:

A, B ve C gibi üç makina bir fabrikadaki ürünlerin sırasıyla %50, %30 ve %20 sini üretmektedir. Bu makinalar %3, %4 ve %5 oranında bozuk ürün vermektedir. Rasgele seçilen bir ürünün bozuk olma olasılığı nedir?

b) Bu seçilen ürünün A makinasında üretilme olasılığı nedir?

X: Ürünün bozuk olduğu olay



$$P(X) = P(X \setminus A)P(A) + P(X \setminus B)P(B) + P(X \setminus C)P(C)$$

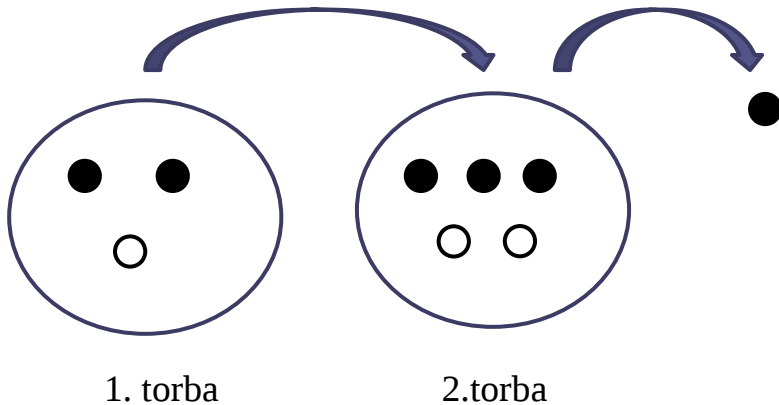
$$P(X) = 0.03 \cdot 0.50 + 0.04 \cdot 0.30 + 0.05 \cdot 0.20 = 0.037$$

$$P(A_i \setminus E) = \frac{P(A_i) P(E \setminus A_i)}{P(E)} \longrightarrow P(A \setminus X) = \frac{P(A) P(X \setminus A)}{P(X)}$$

$$P(A \setminus X) = \frac{P(A) P(X \setminus A)}{P(X)} = \frac{0.50 \cdot 0.03}{0.037} = \frac{15}{37}$$

Örnek: İki torbadan birinde iki siyah, bir beyaz top; ikincisinde iki beyaz, üç siyah top vardır.

1. torbadan bir top çekiliyor. 2. torbaya atılıyor. 2. torbadan çekilen top siyah olduğuna göre 1. torbadan çekilen topun beyaz olma olasılığı nedir?



B1=1. torbadan beyaz top çekilmesi olayı

B2=1. torbadan siyah top çekilmesi olayı

A=2. torbadan siyah top çekilmesi olayı



Bayes Teoremi

$$P(B1 \setminus A) = \frac{P(B1 \cap A)}{P(A) = P(B1 \cap A) + P(B2 \cap A)} = \frac{P(B1) * P(A \setminus B1)}{P(B1) * P(A \setminus B1) + P(B2) * P(A \setminus B2)}$$

$$P(B1) = \frac{1}{3}; \quad P(A \setminus B1) = \frac{1}{2}; \quad P(A \setminus B2) = \frac{4}{6}; \quad P(B2) = \frac{2}{3}$$

$$P(B1 / A) = \frac{\frac{1}{3} * \frac{1}{2}}{\frac{1}{3} * \frac{1}{2} + \frac{2}{3} * \frac{4}{6}} = \frac{3}{11}$$

Örnek: Bir kutuda 4'ü defolu 12 sanayi ürünü bulunmaktadır. Bu kutudan ardı ardına rastgele üç ürün seçilmektedir. Seçilen üç ürünün de defosuz (sağlam) olma olasılığını bulunuz.

A1: Birinci çekim defosuz

A2: A1'in defosuz olması durumunda ikinci çekimin defosuz olması

A3: A1 ve A2'nin defosuz olması durumunda üçüncü çekimin defosuz olması

$$P(A1) = \frac{8}{12} \quad P(A2 \setminus A1) = \frac{7}{11} \quad P(A3 \setminus A1 \cap A2) = \frac{6}{10}$$

$$P(A1 \cap A2 \cap A3) = P(A1) P(A2 \setminus A1) P(A3 \setminus A1 \cap A2)$$

$$P(A1 \cap A2 \cap A3) = \frac{8}{12} * \frac{7}{11} * \frac{6}{10} = \frac{14}{55}$$

$$\frac{\binom{8}{3} \binom{4}{0}}{\binom{12}{3}}$$

Kombinasyon
Analizi

Örnek: Sadece 500 kişide bir görülen nadir bir hastalık mevcuttur. Hastalığı belirleyen bir test yöntemi bulunmaktadır ancak mükemmel değildir.

Doğru pozitif sonuç (yani bireyin gerçekten hastalığa yakalandığı durumda) %95 olasılıkla, yanlış pozitif sonuç ise (yani bireyin aslında hastalığa yakalanmadığı durumda) %1 olasılıkla elde edilmektedir.

Eğer rasgele bir birey seçilip test edilse ve sonuç pozitif çıksa, bu kişi yüzde kaç olasılıkla gerçekten hastalığa yakalanmıştır?

H: Birey gerçekten hasta

$$P(H|P) = ?$$

P: Test sonucu pozitif

$$P(P) = P(H \cap P) + P(H' \cap P) = P(H)P(P|H) + P(H')P(P|H')$$

$$P(P) = (1/500) * 0.95 + (499/500) * 0.01 = 0.0119$$

$$P(H|P) = \frac{P(H \cap P)}{P(P)} = \frac{P(H)P(P|H)}{P(P)} = \frac{0.95 * (1/500)}{0.0119} = 0.1597$$

Örnek:

Bir okulda öğrencilere öğle yemeğinde ne tür yemekler yemek istedikleri soruluyor. Yemek türleri belirli standartlara göre gruplandırılıyor ve öğrencilerin oylamasına sunuluyor. Öğrencilerin %40'ı A türü yemekler, %50'si B türü yemekler, %10'u ise C türü yemekler istediği belirleniyor. Seçimin sonunda öğrencilere bir anket uygulanıyor ve elde edilen sonuçlara göre,

A türü yemekleri seçenlerin %20'si, B türü yemekleri seçenlerin %30'u, C türü yemekleri seçenlerin %50'si yemeklerden önce dondurma yemek istediklerini belirtmiş.

Bu durumda yemeklerden önce dondurma yemek isteyenlerden rasgele bir kişi seçilse, bu kişinin A türü yemekler yemek isteyenlerden birisi olma olasılığı nedir?

Örnek:

Bir okulda öğrencilere öğle yemeğinde ne tür yemekler yemek istedikleri soruluyor. Yemek türleri belirli standartlara göre gruplandırılıyor ve öğrencilerin oylamasına sunuluyor. Öğrencilerin %40'ı A türü yemekler, %50'si B türü yemekler, %10'u ise C türü yemekler istediği belirleniyor. Seçimin sonunda öğrencilere bir anket uygulanıyor ve elde edilen sonuçlara göre,

A türü yemekleri seçenlerin %20'si, B türü yemekleri seçenlerin %30'u, C türü yemekleri seçenlerin %50'si yemeklerden önce dondurma yemek istediklerini belirtmiş.

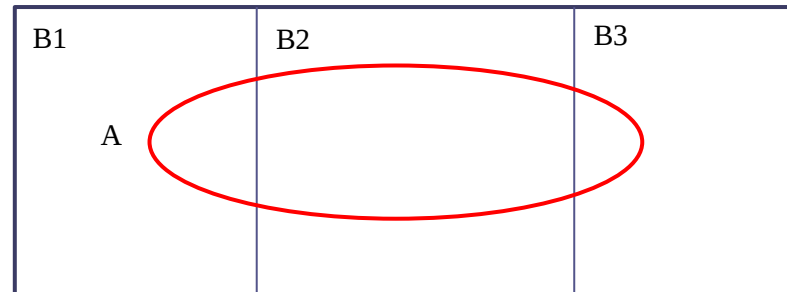
Bu durumda yemeklerden önce dondurma yemek isteyenlerden rasgele bir kişi seçilse, bu kişinin A türü yemekler yemek isteyenlerden birisi olma olasılığı nedir?

B1: A türü yemekleri seçenler

B2: B türü yemekleri seçenler

B3: C türü yemekleri seçenler

A: dondurma yemek isteyenler

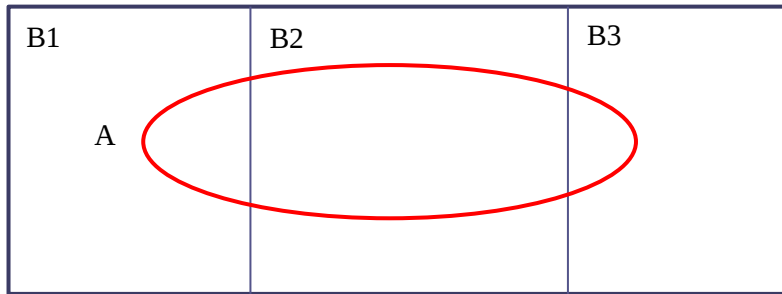


$$P(B1 \setminus A) = ?$$

$$P(B_i \setminus A) = \frac{P(A \setminus B_i) P(B_i)}{P(A) = \sum_{j=1}^n P(A \setminus B_j) P(B_j)}$$

$$P(B1 \setminus A) = \frac{P(A \setminus B1) P(B1)}{P(A \setminus B1) P(B1) + P(A \setminus B2) P(B2) + P(A \setminus B3) P(B3)}$$

Örnek:



$$P(B1 \setminus A) = ?$$

$$P(B1 \setminus A) = \frac{P(A \setminus B1) P(B1)}{P(A \setminus B1) P(B1) + P(A \setminus B2) P(B2) + P(A \setminus B3) P(B3)}$$

$$P(B1 \setminus A) = \frac{0.20 * 0.40}{0.2 * 0.4 + 0.3 * 0.5 + 0.5 * 0.1} = \frac{2}{7}$$

Örnek:

Bir çekmecedeki 4 mavi, 6 kahverengi ve 8 yeşil çorap bulunmaktadır.

Çorap sahibi çekmecedeki rastgele 2 çorap alır ve yerine geri koymaz.

Seçilen çorapların aynı renk olduğu bilindiğine göre ikisinin de yeşil olması olasılığı nedir?

Y1: 1. seçimin yeşil renk olması olayı

Y2: 2. seçimin yeşil renk olması olayı



$$P(Y1 \cap Y2 \mid A) = \frac{P(Y1 \cap Y2 \cap A)}{P(A)}$$

A: Aynı renk olması olayı

$$P(A) = P[(Y1 \cap Y2) \cup (M1 \cap M2) \cup (K1 \cap K2)]$$

$$P(A) = P(Y1 \cap Y2) + P(M1 \cap M2) + P(K1 \cap K2)$$

$$= P(Y1) * P(Y2 \mid Y1) + P(M1) * P(M2 \mid M1) + P(K1) * P(K2 \mid K1)$$

$$= \frac{8}{18} * \frac{7}{17} + \frac{4}{18} * \frac{3}{17} + \frac{6}{18} * \frac{5}{17}$$

Örnek:

Y1: 1. seçimin yeşil renk olması olayı

Y2: 2. seçimin yeşil renk olması olayı

A: Aynı renk olması olayı

$$\longrightarrow P(Y1 \cap Y2 \setminus A) = \frac{P(Y1 \cap Y2 \cap A)}{P(A)}$$

$$P(A) = P[(Y1 \cap Y2) \cup (M1 \cap M2) \cup (K1 \cap K2)]$$

$$P(Y1 \cap Y2) = P(Y1) * P(Y2 \setminus Y1) = \frac{8}{18} * \frac{7}{17}$$

$$P(Y1 \cap Y2 \setminus A) = \frac{8 * 7}{8 * 7 + 6 * 5 + 4 * 3} = \frac{56}{98} = 0,57$$