



Serbest Ağ Dengelemesi

Prof. Dr. U. Doğan & Prof. Dr. C. Aydın

YTÜ-Harita Mühendisliği Bölümü, Jeodezi Anabilim Dalı
İstanbul, Mart 2021

Serbest Ağlar

- ✓ Tüm nokta koordinatları bilinmeyen olan ağlara **SERBEST AĞLAR** denir.
- ✓ Bu ağların dengelenmesine ise **SERBEST AĞ DENGELEMESİ** adı verilir.
- ✓ Serbest ağlar, bir takım jeodezik istatistik test ve analizlerin yapılması için kullanılır:

1. Bir ağın güvenilirliğinin belirlenmesi,

2. Uyuşumsuz (kaba hatalı) ölçülerin araştırılması,

3. Bağlantı (dayanak) noktalarının test edilmesi,

4. Geometrik deformasyon analizi

Jeodezik Datumu ve Serbest Datum Parametreleri

- ✓ Bir ağıdaki jeodezik ölçüler, o ağın bir koordinat sisteminde tanımı için yeterli bilgiyi içermez.
- ✓ Ağ nokta koordinatlarının ilgili koordinat sisteminde tanımı, yani **JEODEZİK DATUMUN** tanımlanması için bu bilginin ağ dengelemesine dahil edilmesi gerekir.
- ✓ Bir jeodezik ağın datumu için gereken bilgi **SERBEST DATUM PARAMETRELERİ** (kısaca datum parametreleri) ile tanımlanır.



Datum, kelime anlamıyla «Bilgi» demektir. Datum'un çoğulu Data'dır. Sonu «um» ile biten Latince kelimeler «a» ile çoğul hale getirilir.

Jeodezik Datumu ve Serbest Datum Parametreleri

	SERBEST DATUM PARAMETRELERİ	SAYISI (d)
Nivelman Ağları	Düşey Öteleme	1
İki Boyutlu Ağlar	x öteleme, y öteleme 1 dönüklük, 1 ölçek	4*
Üç Boyutlu Ağlar	X öteleme, Y öteleme, Z öteleme, 3 dönüklük, 1 ölçek	7**

) İki boyutlu ağlarda bir kenar bile ölçülmüşse, ölçek çarpanını tanımlamaya gerek yoktur. Bu nedenle, **kenar ve doğrultu-kenar ağlarında $d=3$ olur.*

****) GPS ağlarında noktalar arasında baz farkları (X, Y, Z farkları) ölçü olarak alınıyorsa, dönüklükleri ve ölçeği tanımlamaya gerek yoktur. Bu durumda $d=3$ olur.*

Serbest Ağ Dengeleme Çözümleri

- ✓ **Zorlamasız klasik dengeleme çözümü**
- ✓ **Tüm-iz minimum çözümü**
- ✓ **Kısmi-iz minimum çözümü**

Serbest Ağ Dengeleme Çözümleri

Bu çözümler ile elde edilen bazı elemanlar **ÖZDEŞ**, bazı elemanlar **FARKLIDIR**

ÖZDEŞ elemanlar:

- ✓ Serbestlik derecesi (f)
- ✓ Ölçü düzeltmeleri (v)
- ✓ Düzeltmelerin ağırlıklı karelerinin toplamı ($[pvv]$)
- ✓ Birim ağırlıklı ölçünün standart sapması (S_0)
- ✓ Dengeli ölçüler ($\bar{L}$)
- ✓ Dengeli ölçülerin kofaktör matrisi ($\bar{Q}_{ll}$), düzeltmelerin kofaktör matrisi ve standart sapmaları.

FARKLI elemanlar:

- ✓ Küçültülmüş bilinmeyenler vektörü (x)
- ✓ Bilinmeyenlerin ağırlık katsayıları matrixi (Q_{xx})
- ✓ Dengeli koordinatlar
- ✓ Dengeli koordinatların standart sapmaları
- ✓ Konum hatası
- ✓ Nokta hata ve güven elipsleri

Serbest Ağ Dengeleme Çözümleri: *Serbestlik Derecesi*

Bir serbest ağ dengelemesinde serbestlik derecesi f şöyle hesaplanır:

- ✓ Ölçü sayısı (n)
- ✓ Bilinmeyen sayısı (u) (*tüm nokta koordinatları bilinmeyen*)
- ✓ Datum parametrelerinin sayısı (d)

$$f = n - u + d$$

Zorlamasız Klasik Dengeleme

- ✓ Datum parametrelerinin sayısı (d) kadar koordinat bilinmeyi sabit alındığında yapılacak bilinen dolaylı ölçüler dengeleme işlemine **ZORLAMASIZ KLASİK DENGELEME** denir. *
- ✓ Örneğin, bir nivelman ağında **bir noktanın yüksekliği sabit** ise (ya da alınır), yapılacak dengeleme zorlamasız klasik dengelemedir. Bu dengeleme, elbette, bir serbest ağ dengelemesidir.
- ✓ Bir doğrultu ağında **iki nokta sabit** ise, bu ağda $d=4$ olduğu için, yapılacak dengeleme yine zorlamasız dengelemedir.

**) Datum parametrelerinin sayısından daha fazla koordinat bilinmeyi sabit alındığında yapılan dengelemeye DAYALI AĞ DENGELEMESİ denir.*



Zorlamasız Klasik Dengeleme

- ✓ Kenar ve doğrultu-kenar ağında $d=3$ 'tür. Bu ağlarda, örneğin bir noktanın x,y koordinatları, bir başka noktanın x ya da y 'si sabit alındığında (toplam 3 adet sabit koordinat) yapılacak dengeleme bir zorlamasız klasik dengelemedir.
- ✓ Bir noktanın x, y koordinatları sabit ve bu noktadan olan bir açıklık açısı sabit ise, ağa toplam $d=3$ kadar bilgi dahil edilir ki, bu dengeleme de yine bir zorlamasız klasik dengeleme olur.
- ✓ Görüldüğü gibi bir ağda birden çok sayıda zorlamasız klasik dengeleme yapılabilir.

Zorlamasız Klasik Dengeleme: *Serbestlik derecesi örnekleri*

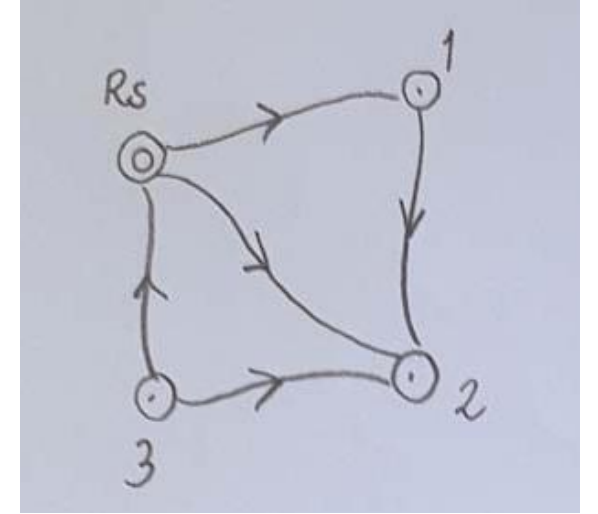
ÖRNEK-1

Şekildeki nivelman ağında R_s noktası sabit, diğerleri bilinmeyen noktalardır. Serbestlik derecesini hesaplayınız. Yapılacak dengeleme çözümünü belirtiniz.

ÇÖZÜM-1

$$\begin{aligned}n &= 5 \\u &= 3 \\f &= n - u = 5 - 3 = 2\end{aligned}$$

Nivelman ağında $d=1$ 'dir. Bir adet sabit nokta alındığı için bu örnek bir zorlamasız klasik dengeleme çözümüne ilişkindir.



Zorlamasız Klasik Dengeleme: *Serbestlik derecesi örnekleri*

ÖRNEK-2

Bir önceki örnekte tüm noktalar bilinmeyendir. Bir zorlamasız dengeleme çözümü yapılmak isteniyor. Nasıl yapılır? Bu durumda serbestlik derecesi ne olur?

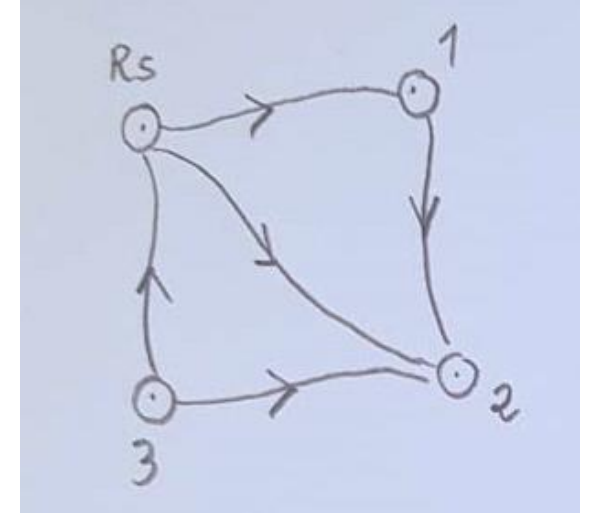
ÇÖZÜM-2

Tüm noktalar bilinmeyendir. Bir zorlamasız dengeleme yapabilmek için herhangi bir nokta sabit alınır. Bu durumda gerçek bir datum sağlanamaz; çünkü, o sabit noktanın yüksekliği herhangi bir yüksekliktir. Ancak serbest ağ dengelemesi açısından datumun fiziksel bir karşılığının olup olmamasının bir önemi yoktur.

Bu durumda serbestlik derecesi bir önceki örnekle aynı olur. Ancak, ilke olarak, şekildeki gibi tüm noktalar bilinmeyen ise, bu hesap şöyle yapılır:

$$n=5, u=4, d=1$$

$$f=n-u+d=5-4+1=2$$



Zorlamasız Klasik Dengeleme: *Serbestlik derecesi örnekleri*

ÖRNEK-3

Bir önceki örnekte Rs ve 1 noktası sabit alınırsa serbestlik derecesi ne olur? Yapılacak dengelemenin türünü belirtiniz.

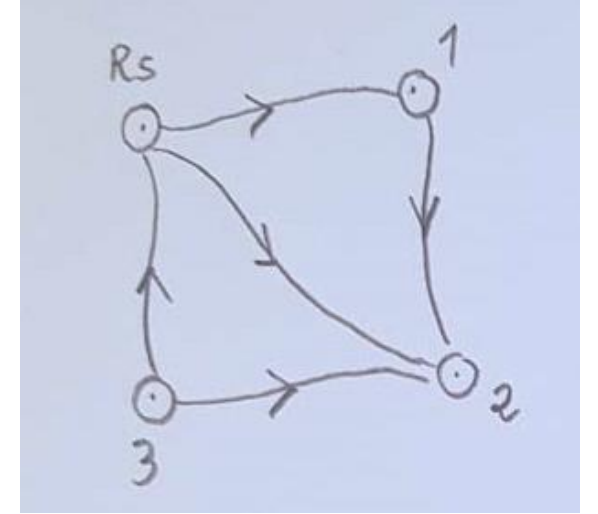
ÇÖZÜM-3

$$n=5$$

$$u=2$$

$$f=n-u=5-2=3$$

Nivelman ağında $d=1$ 'dir. d 'den daha fazla sayıda ağa bilgi dahil edilmiştir (Rs ve 1 noktalarının sabit yükseklikleri olmak üzere iki adet). Bu nedenle ilgili dengeleme bir dayalı ağ dengelemesi olur. Bir **serbest ağ dengeleme çözümü değildir**.



Zorlamasız Klasik Dengeleme: *Serbestlik derecesi örnekleri*

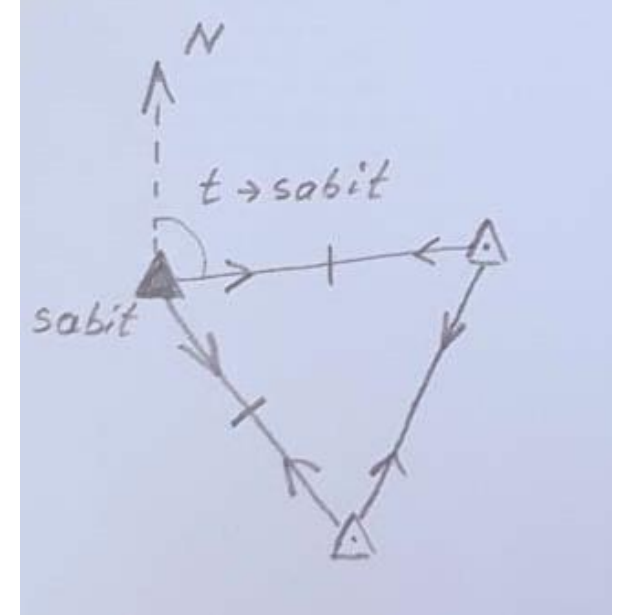
ÖRNEK-4

Şekildeki yatay ağda bir nokta ve bir açıklık açısı sabittir. Serbestlik derecesini hesaplayınız. Yapılacak dengelemenin türünü belirtiniz.

ÇÖZÜM-4

$$\begin{aligned} n &= 6 \text{ doğrultu} + 2 \text{ kenar} = 8 \\ u &= 2 \times 2 \text{ koordinat} + 3 \text{ yöneltme} = 7 \\ f &= n - u + 1 = 8 - 7 + 1 = 2 \end{aligned}$$

Doğrultu-kenar ağında $d=3$ 'tür. $d=3$ kadar (sabit nokta koordinatları + 1 açıklık açısı) eleman ağda sabittir. Bu nedenle, yapılacak dengeleme bir zorlamasız klasik dengelemedir. Yani, bir serbest ağ dengelemesidir.



Zorlamasız Klasik Dengeleme: *Serbestlik derecesi örnekleri*

ÖRNEK-5

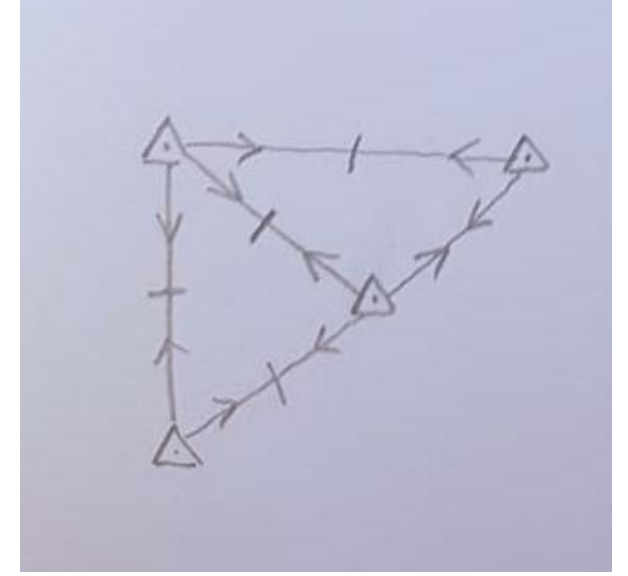
Şekildeki serbest ağda işaretli elemanlar ölçülmüştür. Serbestlik derecesini hesaplayınız. Bu ağda bir zorlamasız dengeleme nasıl yapılır?

ÇÖZÜM-5

$$\begin{aligned}n &= 10 \text{ doğrultu} + 4 \text{ kenar} = 14 \\u &= 4 \times 2 \text{ koordinat} + 4 \text{ yöneltme} = 12 \\d &= 3 \\f &= n - u + d = 14 - 12 + 3 = 5\end{aligned}$$

Bu ağ bir doğrultu-kenar ağıdır. $d=3$ 'tür. Zorlamasız dengeleme yapabilmek için 3 koordinat eleman sabit alınır. Örneğin bir noktanın x ve y 'si + bir diğer noktanın x ya da y 'si.

İki nokta sabit alınırsa, ağa 4 bilgi dahil edilir. Yani, dengelemede $d=3$ 'den daha fazla bilgi bulunur. Bu durumda ağ dengelemesi bir dayalı ağ dengelemesi olur.



Tüm-iz minimum çözümü

- ✓ Bu çözümde ağdaki **tüm noktalar** datum tanımına ortak katkıda bulunur.
- ✓ Tüm noktalar bilinmeyendir.
- ✓ Tanımlanan datum, hiçbir zaman gerçekçi bir datum değildir. Bu nedenle, sadece özel amaçlar (deformasyon analizi vb.) için kullanılır.



Tüm-iz minimum çözümü

Tüm noktaların bilinmeyen olduğu dengelemede katsayılar matrisi g indisi ile gösterilir:

$$\mathbf{A} \rightarrow \mathbf{A}_g$$

$$\mathbf{v} = \mathbf{A}_g \mathbf{x}_g - \mathbf{l} ; \mathbf{P}$$

*Tüm-iz minimum çözümü
dengeleme modeli*

Buna göre, normal denklem elemanları şöyle ifade edilir:

$$\mathbf{N}_g = \mathbf{A}_g^T \mathbf{P} \mathbf{A}_g \quad \mathbf{n}_g = \mathbf{A}_g^T \mathbf{P} \mathbf{l}$$



Tüm-iz minimum çözümü

$$\det(\mathbf{N}_g) = 0$$

Bu nedenle, $\mathbf{N}_g$ 'nin normal tersini alamayız!



*Tüm-iz minimum çözümünde
pseudo-invers (+ **invers**) alınır.*



Tüm-iz minimum çözümü

*Tüm-iz minimum
bilinmeyenlerin
ağırlık katsayıları
matrisi*

$$\mathbf{Q}_g = \mathbf{N}_g^+ = (\mathbf{N}_g + \mathbf{G}\mathbf{G}^T)^{-1} - \mathbf{G}\mathbf{G}^T$$

*Koşul denklemleri
katsayılar matrisi*

*Tüm-iz minimum
Bilinmeyenler vektörü*

$$\mathbf{x}_g = \mathbf{Q}_g \mathbf{n}_g$$

Düzeltilme vektörü

$$\mathbf{v} = \mathbf{A}_g \mathbf{x}_g - \mathbf{l}$$



Tüm-iz minimum çözümü: Özellikler

$$\text{iz}(\mathbf{Q}_g) \rightarrow \min \quad \mathbf{x}_g^T \mathbf{x}_g \rightarrow \min$$

*Tüm noktalar için
en uygun konumlandırma*

$$\mathbf{Q}_g \mathbf{N}_g = \mathbf{E} - \mathbf{G} \mathbf{G}^T$$

E , birim matris

$$\mathbf{G}^T \mathbf{x}_g = \mathbf{0}$$



Tüm-iz minimum çözümü: *Koşul denklemleri katsayılar matrisi*

$$\mathbf{G}^T \mathbf{G} = \mathbf{E}$$

$\mathbf{E}$, birim matris

$$\mathbf{A}_g \mathbf{G} = \mathbf{0} \quad \mathbf{N}_g \mathbf{G} = \mathbf{0}$$

$$\mathbf{G}^T \mathbf{x}_g = \mathbf{0}$$



Tüm-iz minimum çözümü: *Koşul denklemleri katsayılar matrisi*

Nivelman ağlarında koşul denklemleri katsayılar matrisi ($1 \times p$ boyutlu)

$$\mathbf{G}^T = \frac{1}{\sqrt{p}} [1 \ 1 \cdots 1] \quad p: \text{nokta sayısı}$$

ÖRNEK-6 4 noktalı bir nivelman ağında koşul denklemleri katsayılar matrisini oluşturunuz.

ÇÖZÜM-6 $\mathbf{G}^T = \frac{1}{\sqrt{4}} [1 \ 1 \ 1 \ 1] = [0.5 \ 0.5 \ 0.5 \ 0.5]$



Tüm-iz minimum çözümü: *Koşul denklemleri katsayılar matrisi*

İki boyutlu ağlarda koşul denklemleri katsayılar matrisi ($d \times 2p$ boyutlu) için öncelikle aşağıdaki **ötelenmiş ve normlandırılmış yaklaşık koordinatlar** hesaplanır:

$$x'_{i0} = \frac{x_{i0} - x_s}{D} \quad y'_{i0} = \frac{y_{i0} - y_s}{D}$$

x_s ve y_s ağırlık
merkezi koordinatları

$$D = \sqrt{\sum_{i=1}^p \left((x_{i0} - x_s)^2 + (y_{i0} - y_s)^2 \right)}$$



Tüm-iz minimum çözümü: *Koşul denklemleri katsayılar matrisi*

İki boyutlu ağlarda koşul denklemleri katsayılar matrisi ($d \times 2p$ boyutlu):

$$\mathbf{G}^T = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{p}} & 0 & \dots & \dots & \frac{1}{\sqrt{p}} & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{p}} & \dots & \dots & 0 & \frac{1}{\sqrt{p}} \\ -y'_{10} & x'_{10} & \dots & \dots & -y'_{p0} & x'_{p0} \\ x'_{10} & y'_{10} & \dots & \dots & x'_{p0} & y'_{p0} \end{bmatrix}$$

$\rightarrow$ **x öteleme**
 $\rightarrow$ **y öteleme**
 $\rightarrow$ **Dönüklük**
 $\rightarrow$ **Ölçek**

$\leftarrow$

$\underbrace{\hspace{10em}}_{\text{1. NOKTA}} \quad \underbrace{\hspace{10em}}_{\text{p. NOKTA}}$

Kenar ve doğrultu-kenar ağlarında son satır yazılmaz



Tüm-iz minimum çözümü: *Koşul denklemleri katsayılar matrisi-Örnek*

ÖRNEK-7 Bir doğrultu-kenar ağ noktalarının yaklaşık koordinatları aşağıda veriliyor. Tüm-iz minimum çözümü için gereken koşul denklem katsayılar matrisini oluşturunuz.

NN	x_0 (m)	y_0 (m)
1	10	10
2	23	12
3	25	26
4	10	20



Tüm-iz minimum çözümü: *Koşul denklemleri katsayılar matrisi-Örnek*

ÇÖZÜM-7

NN	x_0 (m)	y_0 (m)	$x_0 - x_s$ (m)	$y_0 - y_s$ (m)	x'_0	y'_0
1	10	10	-7	-7	-0.3679	-0.3679
2	23	12	6	-5	0.3154	-0.2628
3	25	26	8	9	0.4205	0.4730
4	10	20	-7	3	-0.3679	0.1577
Ortalama:		17 = x_s	17 = y_s			
Kareleri Toplamı:			198	164		

$$D = \sqrt{198 + 164} = 19.0263 \text{ m}$$



Tüm-iz minimum çözümü: *Koşul denklemleri katsayılar matrisi-Örnek*

ÇÖZÜM-7

	x'_o	y'_o
1	-0.3679	-0.3679
2	0.3154	-0.2628
3	0.4205	0.4730
4	-0.3679	0.1577



x_1	y_1	x_2	y_2	x_3	y_3	x_4	y_4
0.5	0	0.5	0	0.5	0	0.5	0
0	0.5	0	0.5	0	0.5	0	0.5
0.3679	-0.3679	0.2628	0.3154	-0.4730	0.4205	-0.1577	-0.3679

G^T

Kontrol

$$G^T G = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$



Kısmi-iz minimum çözümü

- ✓ Bu çözümde ağdaki **bazı noktalar** datum tanımına katkıda bulunur.
- ✓ Tüm noktalar bilinmeyendir.
- ✓ En genel serbest ağ dengeleme çözümüdür.

*Kısmi-iz minimum çözümünde + invers yerine
– **genel inversi** kullanılır.*



Kısmi-iz minimum çözümü

$$\mathbf{v} = \mathbf{A}_g \mathbf{x}_i - \mathbf{l} ; \mathbf{P}$$

*Kısmi-iz minimum çözümü
dengeleme modeli*

$$\mathbf{N}_g = \mathbf{A}_g^T \mathbf{P} \mathbf{A}_g \quad \mathbf{n}_g = \mathbf{A}_g^T \mathbf{P} \mathbf{l}$$



Kısmi-iz minimum çözümü

Kısmi-iz minimum bilinmeyenlerin ağırlık katsayıları matrisi

$$\mathbf{Q}_i = \mathbf{N}_g^{-1} = (\mathbf{N}_g + \mathbf{B}_i \mathbf{B}_i^T)^{-1} - \mathbf{G}(\mathbf{G}^T \mathbf{B}_i \mathbf{B}_i^T \mathbf{G})^{-1} \mathbf{G}^T$$

Kısmi-iz minimum çözümü koşul denklemleri katsayılar matrisi

Kısmi-iz minimum Bilinmeyenler vektörü

$$\mathbf{x}_i = \mathbf{Q}_i \mathbf{n}_g$$

Düzeltilme vektörü

$$\mathbf{v} = \mathbf{A}_g \mathbf{x}_i - \mathbf{l}$$



Kısmi-iz minimum çözümü: *Koşul denklem katsayılar matrisi* B_i^T

B_i^T

matrisi, G^T matrisinde datumu tanımlayan noktalar (ya da koordinatlar) dışındaki sütunların 0 yapılmasıyla elde edilir.

ÖRNEK-8 Örnek 7'de 1 ve 2 no'lu noktalar datumu tanımlayan noktalar ise kısmi-iz minimum çözümüne ilişkin koşul denklemlerini oluşturunuz.

x1	y1	x2	y2	x3	y3	x4	y4
0.5	0	0.5	0	0	0	0	0
0	0.5	0	0.5	0	0	0	0
0.3679	-0.3679	0.2628	0.3154	0	0	0	0

B_i^T



Kısmi-iz minimum çözümü: Özellikler

Datum noktalarına ilişkin kofaktör alt-matris

$$\mathbf{Q}_i = \begin{bmatrix} \mathbf{Q}_1 & \square \\ \square & \mathbf{Q}_{diğer} \end{bmatrix}$$

$$iz(\mathbf{Q}_1) \rightarrow \min \quad \mathbf{x}_1^T \mathbf{x}_1 \rightarrow \min$$

Datuma katılan noktalar için
en uygun konumlandırma

$$\mathbf{x}_i = \begin{bmatrix} \mathbf{x}_1 \\ \mathbf{x}_{diğer} \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{Q}_g \mathbf{N}_i = \mathbf{E} - \mathbf{G}(\mathbf{B}_i^T \mathbf{G})^{-1} \mathbf{B}_i^T$$

$\mathbf{E}$, birim matris

$$\mathbf{B}_i^T \mathbf{x}_i = \mathbf{0}$$



Kısmi-iz minimum çözümü: Özellikler

- ✓ Kısmi-iz minimum çözümünde datumu tanımlayan noktalar **tüm noktalar** ise, o çözüm tüm-iz minimum çözümüdür.
- ✓ Kısmi-iz minimum çözümünde datumu tanımlayan koordinatların sayısı **d kadar ise**, çözüm, ilgili koordinatların **sabit alındığı zorlamasız klasik dengeleme çözümüne** döner. Bu kısmi-iz minimum çözümünde, sabit alınan koordinatlara ilişkin elemanlar **0** olur.

$$Q_i = \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & Q_{diğer} \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{x}_i = \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{x}_{diğer} \end{bmatrix}$$



*d adet bu eleman datumu tanımlıyor
ise **0 olur.***

- ✓ Söz konusu iki özellik nedeniyle, kısmi-iz minimum çözümü **en genel serbest ağ dengeleme çözümüdür.**



S-dönüşümü:

- ✓ Bir serbest ağ dengeleme çözümü (zorlamasız, tüm-iz ya da kısmi-iz) elimizde varsa, bir diğer serbest ağ dengeleme çözümünü elde etmek için yeniden dengelemeye gerek yoktur.
- ✓ Bu amaçla, ilgili çözüme S-dönüşümü uygulanır.
- ✓ S-dönüşüm matrisi, **hangi çözüme geçilecekse ona ilişkin koşul denklemleri katsayılar matrisi düşünülerek oluşturulur.**
- ✓ S-dönüşümü, sürekli datum değiştirildiği için deformasyon analizinde oldukça kullanışlıdır.



S-dönüşümü: [1] *Tüm-iz minimum çözüme geçiş*

Elimizde bir k datumuna ilişkin çözüm yani, $\mathbf{Q}_k$ ve $\mathbf{x}_k$ olsun.

$$\mathbf{S}_g = \mathbf{E} - \mathbf{G}\mathbf{G}^T$$

*Tüm-iz min çözüme geçiş
S dönüşüm matrisi*



$$\mathbf{x}_g = \mathbf{S}_g \mathbf{x}_k \quad \mathbf{Q}_g = \mathbf{S}_g \mathbf{Q}_k \mathbf{S}_g^T$$

Tüm-iz min çözümü



S-dönüşümü: [2] *i* datum çözümüne geçiş

Elimizde bir k datumuna ilişkin çözüm yani, $\mathbf{Q}_k$ ve $\mathbf{x}_k$ olsun.

$$\mathbf{S}_i = \mathbf{E} - \mathbf{G}(\mathbf{B}_i^T \mathbf{G})^{-1} \mathbf{B}_i^T$$

i datum (kısmi-iz min) çözümüne geçiş **S dönüşüm matrisi**

$$\mathbf{x}_i = \mathbf{S}_i \mathbf{x}_k \quad \mathbf{Q}_i = \mathbf{S}_i \mathbf{Q}_k \mathbf{S}_i^T$$

i datum (kısmi-iz min) çözümü

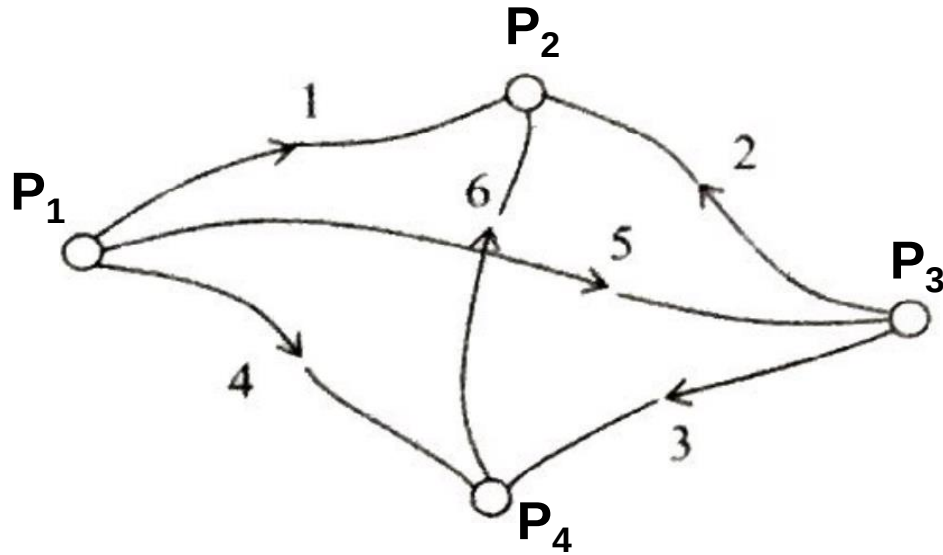


Serbest Ağ Dengelemesi: *Alıştırmalar*

1. Örnek 6 için 2, 3 ve 4 noktalarının datumu tanımladığı kısmi-iz minimum çözümü koşul denklemlerini oluşturunuz.
2. Örnek 6 için tüm-iz minimum çözümüne geçişi sağlayan S -dönüşüm matrisini bulunuz.
3. Örnek 7 için bir zorlamasız klasik dengeleme çözümüne karşılık gelen kısmi-iz minimum çözümü koşul denklemlerini oluşturunuz.
4. Örnek 7 için 1, 2 ve 3 noktalarının datumu tanımladığı kısmi-iz minimum çözümüne geçişi sağlayan S -dönüşüm matrisini bulunuz.

Serbest Ağ Dengelemesi : *Uygulama-1 (Demirel H, 2009)*

UYGULAMA-1 Şekildeki geometrik nivelman ağına ilişkin yükseklik farkı ölçüleri h_i ($i=1,2,...,6$) ve nivelman yol uzunlukları S_i aşağıda verilmektedir.



i	h_i (m)	S_i (m)
1	8.086	560
2	6.312	250
3	0.940	425
4	2.716	210
5	1.762	425
6	5.366	210

Birim nivelman yolu; $S_0 = 1$ km

P_1 noktasının yaklaşık yüksekliği $H_{10} = 500.000$ m olarak veriliyor.

Defekt sayısı kadar parametreyi sabit alarak ağı dengeleyiniz (zorlamasız klasik dengeleme).

Serbest Ağ Dengelemesi : *Uygulama-1 (Demirel H, 2009)*

ÇÖZÜM: Ölçü Sayısı : $n = 6$ adet yükseklik farkı

Datum Sayısı : $d = 1$

Nivelman ağlarında datum (defekt) sayısı "1" olduğundan zorlamasız klasik dengeleme için bir noktanın yüksekliği sabit alınır. Burada P_1 noktasının yüksekliği $H_1 = 500.000$ m sabit alınmıştır. Buna göre;

Bilinmeyen Sayısı : $u = 3$ adet noktanın yüksekliği

Serbestlik Derecesi : $f = n - u = 6 - 3 = 3 > 0$ **DENGELEME**

YAPILABİLİR



Serbest Ağ Dengelemesi : *Uygulama-1 (Demirel H, 2009)*

Diğer noktaların yaklaşık yükseklikleri;

$$x_{20} = H_1 + h_1 = 508.086 \text{ m}, x_{30} = H_1 + h_5 = 501.762 \text{ m}, x_{40} = H_1 + h_4 = 502.716 \text{ m}$$

Düzeltilme Denklemleri:

$$(v = A x - l):$$

$$\begin{aligned} h_1 + v_1 &= x_2 - x_1 \\ h_2 + v_2 &= x_2 - x_3 \\ h_3 + v_3 &= x_4 - x_3 \\ h_4 + v_4 &= x_4 - x_1 \\ h_5 + v_5 &= x_3 - x_1 \\ h_6 + v_6 &= x_2 - x_4 \end{aligned}$$

$$\Rightarrow x_i = x_{i0} + \delta x_i \Rightarrow$$

$$\begin{aligned} v_1 &= \delta x_2 + (x_{2,0} - x_1 - h_1) \\ v_2 &= \delta x_2 - \delta x_3 + (x_{2,0} - x_{3,0} - h_2) \\ v_3 &= -\delta x_3 + \delta x_4 + (x_{4,0} - x_{3,0} - h_3) \\ v_4 &= \delta x_4 + (x_{4,0} - x_1 - h_4) \\ v_5 &= \delta x_3 + (x_{3,0} - x_1 - h_5) \\ v_6 &= \delta x_2 - \delta x_4 + (x_{2,0} - x_{4,0} - h_6) \end{aligned}$$

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{bmatrix}, \quad -l = \begin{bmatrix} 0 \\ 12 \\ 14 \\ 0 \\ 0 \\ 4 \end{bmatrix} \text{ (mm)}, \quad x = \begin{bmatrix} \delta x_2 \\ \delta x_3 \\ \delta x_4 \end{bmatrix}$$

A

-l

Serbest Ağ Dengelemesi : *Uygulama-1 (Demirel H, 2009)*

Ağırlık Matrisi:

$$P_i = S_0 / S_i \quad , \quad \mathbf{P} = \text{diag} (1.79 \quad 4.00 \quad 2.35 \quad 4.76 \quad 2.35 \quad 4.76)$$

Normal Denklemler ve Çözümü:

$$\mathbf{N} = \mathbf{A}^T \mathbf{P} \mathbf{A} = \begin{bmatrix} 10.55 & -4.00 & -4.76 \\ \text{Sim.} & 8.70 & -2.35 \\ & & 11.87 \end{bmatrix} \quad , \quad \mathbf{n} = \mathbf{A}^T \mathbf{P} \mathbf{l} = \begin{bmatrix} -67.04 \\ 80.90 \\ -13.86 \end{bmatrix} \text{ (mm)}$$

Bilinmeyenlerin ağırlık katsayıları matrisi ve bilinmeyenler:

$$\mathbf{Q} = \mathbf{N}^{-1} = \begin{bmatrix} 0.1762 & 0.1058 & 0.0916 \\ \text{Sim.} & 0.1849 & 0.0790 \\ & & 0.1366 \end{bmatrix} \quad , \quad \mathbf{x} = \mathbf{Q} \mathbf{n} = \begin{bmatrix} -4.52 \\ 6.77 \\ -1.64 \end{bmatrix} \text{ (mm)}$$

Dengeli yükseklikler:

j	x_{j0} (m)	δx_j (mm)	$x_j = x_{j0} + \delta x_j$ (m)
2	508.086	-4.5	508.0815
3	501.762	6.8	501.7688
4	502.716	-1.6	502.7144

Serbest Ağ Dengelemesi : *Uygulama-1 (Demirel H, 2009)*

Düzeltilmeler:

$$\mathbf{v} = \mathbf{A} \mathbf{x} - \mathbf{l} = [-4.52 \quad 0.71 \quad 5.59 \quad -1.64 \quad 6.77 \quad 1.12]^T$$

$$\mathbf{v}^T \mathbf{P} \mathbf{v} = 238.50 \text{ mm}^2$$

Birim ağırlıklı ölçünün ve bilinmeyenlerin standart sapması:

Birim ağırlıklı ölçünün standart sapması; $s_0 = \sqrt{238.50 / (6 - 3)} = 8.92 \text{ mm}$

Bilinmeyenlerin (dengeli yükseklikler) standart sapmaları ($s_{x_i} = s_0 \sqrt{Q_{x_i x_i}}$):

j	$Q_{x_j x_j}$	$s_{x_j} \text{ (mm)}$
2	0.1762	3.7
3	0.1849	3.8
4	0.1366	3.3

$$s_{xi} = s_0 \sqrt{Q_{xixi}}$$

Serbest Ağ Dengelemesi : *Uygulama-1 (Demirel H, 2009)*

Dengeli ölçüler ve dengelenenin denetimi:

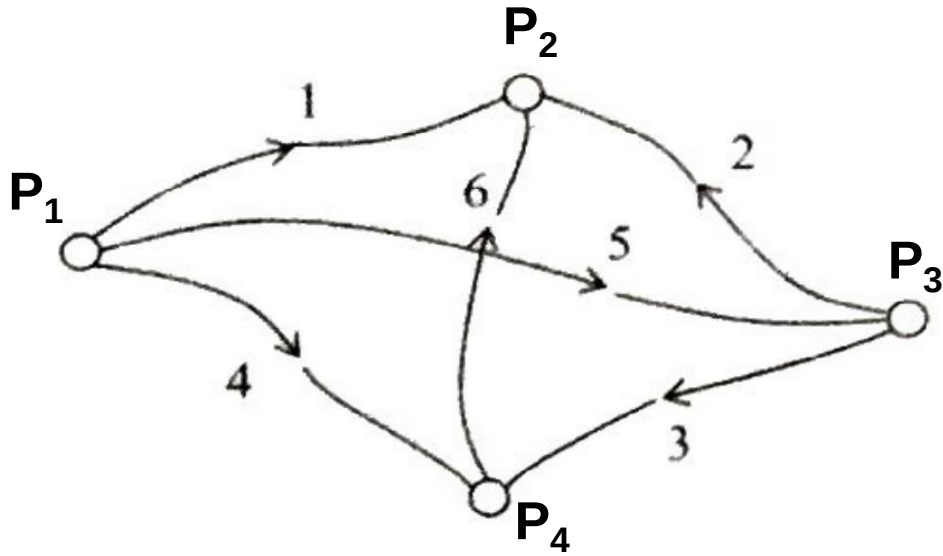
i	h_i (m)	v_i (mm)	$\bar{h}_i = h_i + v_i$ (m)	$\bar{h}_i = \varphi_i(x_1, x_2, x_3, x_4)$
1	8.086	-4.5	8.0815	$x_2 - x_1 = 8.0815$
2	6.312	0.7	6.3127	$x_2 - x_3 = 6.3127$
3	0.940	5.6	0.9456	$x_4 - x_3 = 0.9456$
4	2.716	-1.6	2.7144	$x_4 - x_1 = 2.7144$
5	1.762	6.8	1.7688	$x_3 - x_1 = 1.7688$
6	5.366	1.1	5.3671	$x_2 - x_4 = 5.3671$

Dengeli yükseklik farkları

Dengeleme doğrudur. ✓

Serbest Ağ Dengelemesi : *Uygulama-2 (Demirel H, 2009)*

UYGULAMA-2 Şekildeki geometrik nivelman ağına ilişkin yükseklik farkı ölçüleri h_i ($i=1,2,...,6$) ve nivelman yol uzunlukları S_i aşağıda verilmektedir.



i	h_i (m)	S_i (m)
1	8.086	560
2	6.312	250
3	0.940	425
4	2.716	210
5	1.762	425
6	5.366	210

Birim nivelman yolu; $S_0 = 1$ km

P_1 noktasının yaklaşık yüksekliği $H_{10} = 500.000$ m olarak veriliyor.

Ağı tüm iz minimum yöntemiyle dengeleyiniz.

Serbest Ağ Dengelemesi : *Uygulama-2 (Demirel H, 2009)*

ÇÖZÜM:

Ölçü Sayısı : $n = 6$ adet yükseklik farkı

Datum Sayısı : $d = 1$

Bilinmeyen Sayısı : $u = 4$ adet noktanın yüksekliği

Serbestlik Derecesi : $f = n - u + d = 6 - 4 + 1 = 3 > 0$

DENGELEME YAPILABİLİR ✓

Serbest Ağ Dengelemesi : *Uygulama-2 (Demirel H, 2009)*

Düzeltilme Denklemleri:

$$\begin{aligned}
 v_1 &= -\delta x_1 + \delta x_2 && + (x_{2,0} - x_{1,0} - h_1) \\
 v_2 &= \delta x_2 - \delta x_3 && + (x_{2,0} - x_{3,0} - h_2) \\
 v_3 &= -\delta x_3 + \delta x_4 && + (x_{4,0} - x_{3,0} - h_3) \\
 v_4 &= -\delta x_1 && + \delta x_4 + (x_{4,0} - x_{1,0} - h_4) \\
 v_5 &= -\delta x_1 && + \delta x_3 + (x_{3,0} - x_{1,0} - h_5) \\
 v_6 &= \delta x_2 && - \delta x_4 + (x_{2,0} - x_{4,0} - h_6)
 \end{aligned}$$

$$\mathbf{A}_g = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

$\mathbf{A}_g$

$-\mathbf{I}$

$$-\mathbf{l} = \begin{bmatrix} 0 \\ 12 \\ 14 \\ 0 \\ 0 \\ 4 \end{bmatrix} \text{ (mm)}$$

$\mathbf{x}_g = [\delta x_1 \ \delta x_2 \ \delta x_3 \ \delta x_4]^T$ bilinmeyenler vektörü

Serbest Ağ Dengelemesi : *Uygulama-2 (Demirel H, 2009)*

Normal Denklemler :

$$\mathbf{N} = \mathbf{A}^T \mathbf{P} \mathbf{A} = \begin{bmatrix} 8.90 & -1.79 & -2.35 & -4.76 \\ & 10.55 & -4.00 & -4.76 \\ \text{Sim.} & & 8.70 & -2.35 \\ & & & 11.87 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{n} = \mathbf{A}^T \mathbf{P} \mathbf{l} = \begin{bmatrix} 0 \\ -67.04 \\ 80.90 \\ -13.86 \end{bmatrix} \text{ (mm)}$$

Koşul Denklemi : $\mathbf{G}^T \mathbf{x}_g = 0$

$$\mathbf{G}^T = (1/\sqrt{p}) [1 \ 1 \ 1 \ 1] = 0.5 [1 \ 1 \ 1 \ 1] \quad (\text{Nokta sayısı } p = 4), \quad \mathbf{G}^T \mathbf{G} = \mathbf{E}$$

Serbest Ağ Dengelemesi : *Uygulama-2 (Demirel H, 2009)*

Bilinmeyenler (x_g) ve bilinmeyenlerin ağırlık katsayıları matrisi (Q_g):

$$\mathbf{G} \mathbf{G}^T = 0.25 \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{Q}_g = \begin{bmatrix} 0.0657 & -0.0277 & -0.0268 & -0.0112 \\ & 0.0551 & -0.0144 & -0.0129 \\ \text{Sim.} & & 0.0657 & -0.0246 \\ & & & 0.0487 \end{bmatrix}$$

$(\mathbf{Q}_g = \mathbf{N}^+ = (\mathbf{N} + \mathbf{G} \mathbf{G}^T)^{-1} - \mathbf{G} \mathbf{G}^T)$

$$\mathbf{x}_g = \mathbf{Q}_g \mathbf{n} = [-0.16 \quad -4.68 \quad 6.62 \quad -1.80]^T \text{ (mm)}$$

$\Sigma=0$



Serbest Ağ Dengelemesi : *Uygulama-2 (Demirel H, 2009)*

Dengeli yükseklikler:

j	x_{j0} (m)	δx_j (mm)	$x_j = x_{j0} + \delta x_j$ (m)
1	500.000	- 0.2	499.9998
2	508.086	- 4.7	508.0813
3	501.762	6.6	501.7686
4	502.716	- 1.8	502.7142

Serbest Ağ Dengelemesi : *Uygulama-2 (Demirel H, 2009)*

Düzeltilmeler:

$$\mathbf{v} = \mathbf{A} \mathbf{x}_g - \mathbf{l} = [-4.52 \quad 0.70 \quad 5.58 \quad -1.64 \quad 6.78 \quad 1.12]^T$$

$$\mathbf{v}^T \mathbf{P} \mathbf{v} = 238.50 \text{ mm}^2$$

Birim ağırlıklı ölçünün standart sapması:

$$s_0 = \sqrt{\frac{[\mathbf{P} \mathbf{v} \mathbf{v}]}{n - u + d}} = \sqrt{\frac{238.50}{6 - 4 + 1}} = 8.92 \text{ mm}$$

Bilinmeyenlerin standart sapmaları

j	$Q_{x_j x_j}$	s_{x_j} (mm)
1	0.0657	2.3
2	0.0551	2.1
3	0.0657	2.3
4	0.0487	2.0



$$s_{xi} = s_0 \sqrt{Q_{xixi}}$$

Serbest Ağ Dengelemesi : *Uygulama-2 (Demirel H, 2009)*

Sonuçlar:

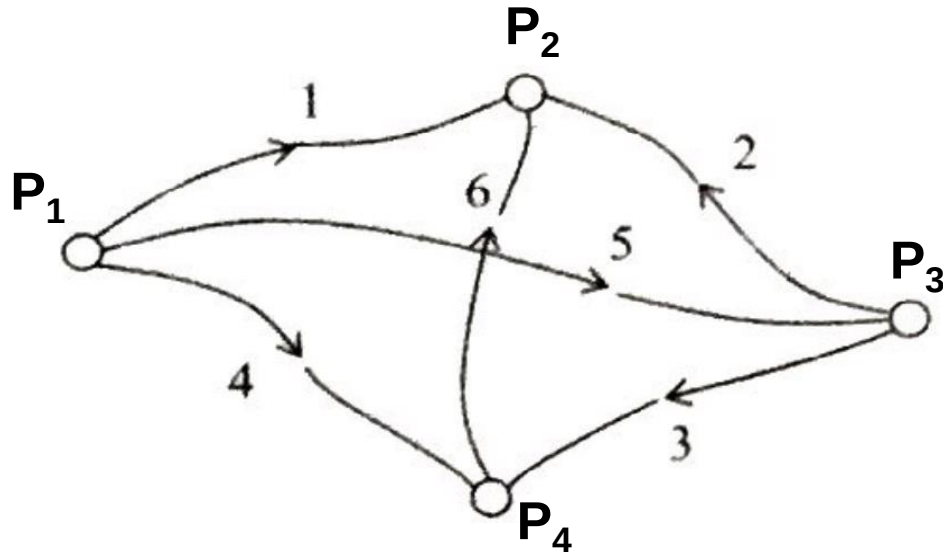
- ✓ Tüm iz minimum çözümünde nokta yüksekliklerinin (bilinmeyenler) ağırlık katsayıları matrisinin köşegen elemanları toplamı "Zorlamasız Klasik Çözüm" den daha küçük

$$\text{iz } \mathbf{Q}_{xx} = \text{iz } \mathbf{N}^{-1} = 0.4977 \quad , \quad \text{iz } \mathbf{Q}_g = \mathbf{N}^+ = 0.2352$$

- ✓ Tüm iz minimum çözümünde standart sapmalar küçük ve homojen dağılımlıdır.
- ✓ Dengeli ölçüler, ağırlık katsayıları matrisi ve standart sapmaları için "Tüm iz minimum çözüm" ile "Zorlamasız Klasik Çözüm" eşit sayısal sonuçlar veriyor.

Serbest Ağ Dengelemesi : *Uygulama-3 (Demirel H, 2009)*

UYGULAMA-3 Şekildeki geometrik nivelman ağına ilişkin yükseklik farkı ölçüleri h_i ($i=1,2,...,6$) ve nivelman yol uzunlukları S_i aşağıda verilmektedir.



i	h_i (m)	S_i (m)
1	8.086	560
2	6.312	250
3	0.940	425
4	2.716	210
5	1.762	425
6	5.366	210

Birim nivelman yolu; $S_0 = 1$ km

P_1 noktasının yaklaşık yüksekliği $H_{10} = 500.000$ m olarak veriliyor.

P_1 ve P_2 datum noktaları olduğuna göre ağı kısmi iz minimum yöntemiyle dengeleyiniz.

Serbest Ağ Dengelemesi : *Uygulama-3 (Demirel H, 2009)*

ÇÖZÜM:

Ölçü Sayısı : $n = 6$ adet yükseklik farkı

Datum Sayısı : $d = 1$

Bilinmeyen Sayısı : $u = 4$ adet noktanın yüksekliği

Serbestlik Derecesi : $f = n - u + d = 6 - 4 + 1 = 3 > 0$

DENGELEME YAPILABİLİR ✓

Serbest Ağ Dengelemesi : *Uygulama-3 (Demirel H, 2009)*

Düzeltilme Denklemleri:

$$\begin{aligned}
 v_1 &= -\delta x_1 + \delta x_2 & + (x_{2,0} - x_{1,0} - h_1) \\
 v_2 &= \delta x_2 - \delta x_3 & + (x_{2,0} - x_{3,0} - h_2) \\
 v_3 &= -\delta x_3 + \delta x_4 & + (x_{4,0} - x_{3,0} - h_3) \\
 v_4 &= -\delta x_1 & + \delta x_4 + (x_{4,0} - x_{1,0} - h_4) \\
 v_5 &= -\delta x_1 & + \delta x_3 + (x_{3,0} - x_{1,0} - h_5) \\
 v_6 &= \delta x_2 & - \delta x_4 + (x_{2,0} - x_{4,0} - h_6)
 \end{aligned}$$

$$\mathbf{A}_g = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

$\mathbf{A}_g$

$-\mathbf{I}$

$$-\mathbf{l} = \begin{bmatrix} 0 \\ 12 \\ 14 \\ 0 \\ 0 \\ 4 \end{bmatrix} \text{ (mm)}$$

$\mathbf{x}_g = [\delta x_1 \ \delta x_2 \ \delta x_3 \ \delta x_4]^T$ bilinmeyenler vektörü

Serbest Ağ Dengelemesi : *Uygulama-3 (Demirel H, 2009)*

Normal Denklemler :

$$\mathbf{N} = \mathbf{A}^T \mathbf{P} \mathbf{A} = \begin{bmatrix} 8.90 & -1.79 & -2.35 & -4.76 \\ & 10.55 & -4.00 & -4.76 \\ \text{Sim.} & & 8.70 & -2.35 \\ & & & 11.87 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{n} = \mathbf{A}^T \mathbf{P} \mathbf{l} = \begin{bmatrix} 0 \\ -67.04 \\ 80.90 \\ -13.86 \end{bmatrix} \text{ (mm)}$$

Koşul Denklemi : $\mathbf{G}^T \mathbf{x}_g = 0$

$$\mathbf{G}^T = (1/\sqrt{p}) [1 \ 1 \ 1 \ 1] = 0.5 [1 \ 1 \ 1 \ 1] \quad (\text{Nokta sayısı } p = 4), \quad \mathbf{G}^T \mathbf{G} = \mathbf{E}$$

$\mathbf{P}_1$ ve $\mathbf{P}_2$ noktalarına göre en uygun konumlandırmayı sağlayan kısmi iz minimum çözümü için koşul denklemi :

$$\mathbf{B}_1^T \mathbf{x}_1 = \mathbf{0}, \quad \mathbf{B}_1^T = 0.5 [1 \ 1 \ 0 \ 0]$$

Serbest Ağ Dengelemesi : *Uygulama-3 (Demirel H, 2009)*

Bilinmeyenler (x_i) ve bilinmeyenlerin ağırlık katsayıları matrisi ($Q_i = N^{-1}$):

$$Q_i = (N + B_i B_i^T)^{-1} - G (G^T B_i B_i^T G)^{-1} G^T, \quad B_i B_i^T = \begin{bmatrix} 0.25 & 0.25 & 0 & 0 \\ 0.25 & 0.25 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$(N + B_i B_i^T)^{-1} = \begin{bmatrix} 1.0441 & 0.9559 & 0.9912 & 0.9983 \\ & 1.0441 & 1.0088 & 1.0018 \\ \text{Sim.} & & 1.1232 & 1.0244 \\ & & & 1.0891 \end{bmatrix}, \quad (G^T B_i B_i^T G)^{-1} = 4$$

$$Q_i = \begin{bmatrix} 0.0441 & -0.0441 & -0.0088 & -0.0017 \\ & 0.0441 & 0.0088 & 0.0018 \\ \text{Sim.} & & 0.1232 & 0.0244 \\ & & & 0.0891 \end{bmatrix}, \quad x_i = Q_i n = \begin{bmatrix} 2.27 \\ -2.27 \\ 9.04 \\ 0.62 \end{bmatrix} \left. \vphantom{\begin{bmatrix} 2.27 \\ -2.27 \\ 9.04 \\ 0.62 \end{bmatrix}} \right\} \Sigma = 0 \quad \checkmark$$

Serbest Ağ Dengelemesi : *Uygulama-3 (Demirel H, 2009)*

Dengeli yükseklikler:

j	x_{j0} (m)	δx_j (mm)	$x_j = x_{j0} + \delta x_j$ (m)
1	500.000	2.3	500.0023
2	508.086	- 2.3	508.0837
3	501.762	9.0	501.7710
4	502.716	0.6	502.7166

Serbest Ağ Dengelemesi : *Uygulama-3 (Demirel H, 2009)*

Düzeltilmeler:

$$v = A x_g - l = [-4.52 \quad 0.70 \quad 5.58 \quad -1.64 \quad 6.78 \quad 1.12]^T$$

$$v^T P v = 238.50 \text{ mm}^2$$

Birim ağırlıklı ölçünün standart sapması:

$$s_0 = \sqrt{\frac{[Pvv]}{n - u + d}} = \sqrt{\frac{238.50}{6 - 4 + 1}} = 8.92 \text{ mm}$$

Bilinmeyenlerin standart sapmaları

j	$Q_{x_j x_j}$	s_{x_j} (mm)
1	0.0441	1.9
2	0.0441	1.9
3	0.1232	3.1
4	0.0891	2.7

$$s_{xi} = s_0 \sqrt{Q_{xixi}}$$

Serbest Ağ Dengelemesi : *Uygulama-3 (Demirel H, 2009)*

Sonuçlar:

- ✓ Zorlamasız klasik dengeleme, tüm iz minimum ve kısmi iz minimum çözümlerinde nokta yüksekliklerinin ağırlık matrisinin köşegen elemanları toplamı toplamaları arasında $\text{iz} \mathbf{Q}_g < \text{iz} \mathbf{Q}_i < \text{iz} \mathbf{Q}$ ilişkisi doğrulanmıştır:

$$\text{iz } \mathbf{Q}_g = \text{iz} \mathbf{N}^+ = 0.2352 \quad , \quad \text{iz } \mathbf{Q}_i = \text{iz} \mathbf{N}^- = 0.3005 \quad , \quad \text{iz } \mathbf{Q} = \text{iz} \mathbf{N}^{-1} = 0.4977$$

- ✓ Zorlamasız klasik dengeleme, tüm iz minimum ve kısmi iz minimum çözümlerinden nokta yükseklik bilinmeyenleri ve standart sapmaları için farklı sonuçlar elde edilmiştir.

Serbest Ağ Dengelemesi : *Uygulama-3 (Demirel H, 2009)*

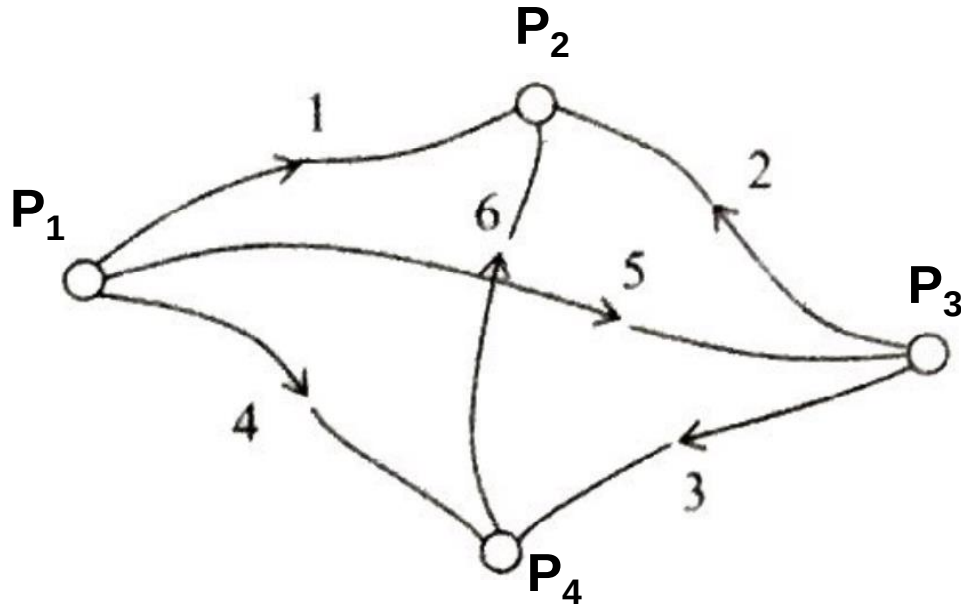
- ✓ Zorlamasız klasik dengeleme, tüm iz minimum ve kısmi iz minimum çözümlerinden dengeli ölçüler, bunların ağırlık katsayıları matrisi ve standart sapmaları için eşit sonuçlar elde edilmiştir.

- ✓ Dengeli ölçülerin ağırlık katsayıları matrisi : $\bar{\mathbf{Q}} = \mathbf{AQA}^T = \mathbf{A}_g \mathbf{Q}_g \mathbf{A}_g^T = \mathbf{A}_g \mathbf{Q}_i \mathbf{A}_g^T$

$$\bar{\mathbf{Q}} = \begin{bmatrix} 0.1762 & 0.0704 & -0.0141 & 0.0917 & 0.1058 & 0.0845 \\ & 0.1496 & 0.0918 & 0.0126 & -0.0792 & 0.0578 \\ & & 0.1636 & 0.0577 & -0.1059 & -0.0718 \\ & & & 0.1368 & 0.0791 & -0.0451 \\ & \text{Sim.} & & & 0.1850 & 0.0268 \\ & & & & & 0.1296 \end{bmatrix}$$

Serbest Ağ Dengelemesi : *Uygulama-4 (Demirel H, 2009)*

UYGULAMA-4 Şekildeki geometrik nivelman ağı serbest dengelenerek aşağıdaki dengeleme sonuçları elde edilmiştir.



$$x = \begin{bmatrix} \delta x_2 \\ \delta x_3 \\ \delta x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -4.52 \\ 6.77 \\ -1.64 \end{bmatrix} (mm)$$

$$Q = N^{-1} = \begin{bmatrix} 0.1762 & 0.1058 & 0.0916 \\ \text{Sim.} & 0.1849 & 0.0790 \\ & & 0.1366 \end{bmatrix}$$

S-transformasyonu yardımıyla verilen dengeleme sonuçlarını,

a) tüm iz minimum dengeleme sonuçlarına

b) P1 ve P2 datum noktaları olduğuna göre kısmi iz minimum dengeleme sonuçlarına dönüştürünüz.

Serbest Ağ Dengelemesi : *Uygulama-4 (Demirel H, 2009)*

ÇÖZÜM: Zorlamasız klasik dengeleme sonuçları olan $\mathbf{x}$ bilinmeyenler vektörü ve $\mathbf{Q}_{xx}$ ağırlık katsayıları matrisi değişmez kabul edilen datum sayısı kadar parametreye karşılık gelen yerlere "0" yazılarak genişletilir.

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} \delta x_2 \\ \delta x_3 \\ \delta x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -4.52 \\ 6.77 \\ -1.64 \end{bmatrix} (mm)$$

$$\mathbf{Q} = \mathbf{N}^{-1} = \begin{bmatrix} 0.1762 & 0.1058 & 0.0916 \\ \text{Sim.} & 0.1849 & 0.0790 \\ & & 0.1366 \end{bmatrix}$$

Zorlamasız klasik dengeleme sonuçları

$$\mathbf{x}_k = \begin{bmatrix} 0 \\ -4.52 \\ 6.77 \\ -1.64 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{Q}_k = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0.1762 & 0.1058 & 0.0916 \\ 0 & 0.1058 & 0.1849 & 0.0790 \\ 0 & 0.0916 & 0.0790 & 0.1366 \end{bmatrix}$$

"0" ile genişletilmiş dengeleme sonuçları

Serbest Ağ Dengelemesi : *Uygulama-4 (Demirel H, 2009)*

a) Tüm iz minimum dengeleme sonuçları

$$\mathbf{S}_g = \mathbf{E} - \mathbf{G} (\mathbf{G}^T \mathbf{G})^{-1} \mathbf{G}^T = \begin{bmatrix} 0.75 & -0.25 & -0.25 & -0.25 \\ & 0.75 & -0.25 & -0.25 \\ \text{Sim.} & & 0.75 & -0.25 \\ & & & 0.75 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{x}_g = \mathbf{S}_g \mathbf{x}_k = [-0.15 \quad -4.67 \quad 6.62 \quad -1.79]^T \text{ (mm)} \quad \longrightarrow \quad \Sigma = 0$$



$$\mathbf{Q}_g = \mathbf{S}_g \mathbf{Q}_k \mathbf{S}_g^T = \begin{bmatrix} 0.0657 & -0.0277 & -0.0268 & -0.0111 \\ & 0.0551 & -0.0144 & -0.0129 \\ \text{Sim.} & & 0.0657 & -0.0246 \\ & & & 0.0487 \end{bmatrix}$$

Serbest Ağ Dengelemesi : *Uygulama-4 (Demirel H, 2009)*

b) Kısmi iz minimum dengeleme sonuçları

$$\mathbf{S}_i = \mathbf{E} - \mathbf{G} (\mathbf{B}_i^T \mathbf{G})^{-1} \mathbf{B}_i^T = \begin{bmatrix} 0.5 & -0.5 & 0 & 0 \\ -0.5 & 0.5 & 0 & 0 \\ -0.5 & -0.5 & 1 & 0 \\ -0.5 & -0.5 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

✓ $\Sigma=0$

$$\mathbf{x}_i = \mathbf{S}_i \mathbf{x}_k = [2.26 \quad -2.26 \quad 9.03 \quad 0.62]^T \text{ (mm)}$$

$$\mathbf{Q}_i = \mathbf{S}_i \mathbf{Q}_k \mathbf{S}_i^T = \begin{bmatrix} 0.0441 & -0.0441 & -0.0089 & -0.0018 \\ & 0.0441 & 0.0089 & 0.0018 \\ \text{Sim.} & & 0.1232 & 0.0244 \\ & & & 0.0891 \end{bmatrix}$$

Ders duyuruları, soru ve görüşleriniz için:



Prof. Dr. Uğur DOĞAN

<https://avesis.yildiz.edu.tr/dogan>

dogan@yildiz.edu.tr



Prof. Dr. Cüneyt AYDIN

<https://avesis.yildiz.edu.tr/caydin>

caydin@yildiz.edu.tr; caydin78@gmail.com