



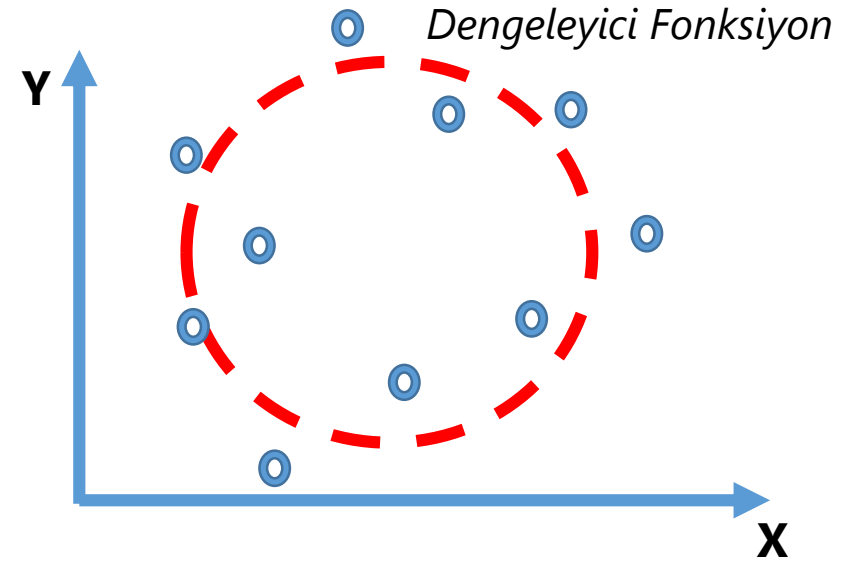
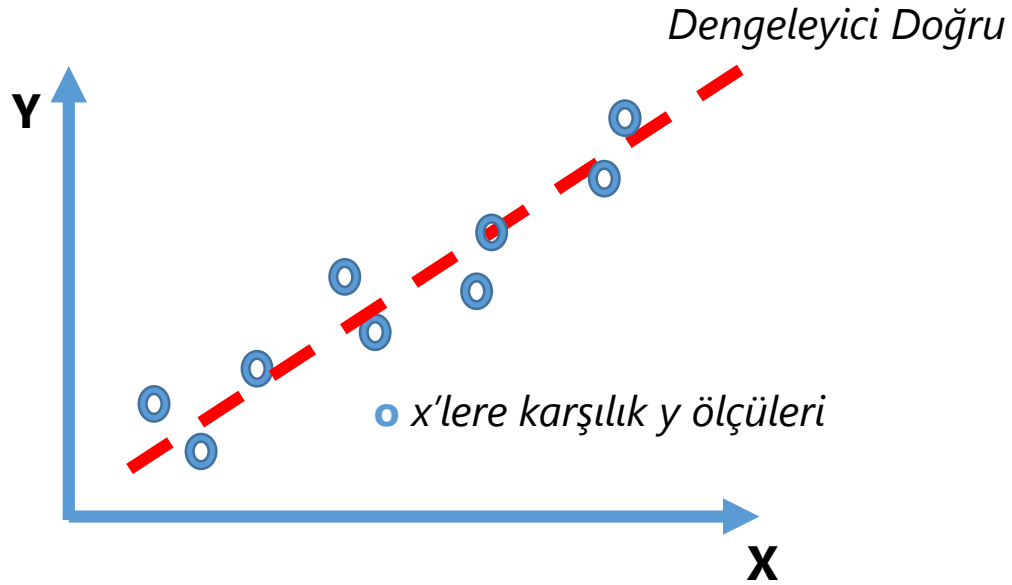
Dengeleyici Fonksiyonlar

Prof. Dr. U. Doğan & Prof. Dr. C. Aydın

YTÜ-Harita Mühendisliği Bölümü, Jeodezi Anabilim Dalı
İstanbul, Mart 2021

Verilere Uyan Fonksiyonun Seçimi

- Ölçüler arasındaki matematiksel bağıntı biliniyorsa ilgili fonksiyon doğrudan yazılır. Örneğin n sayıda noktası verilen bir doğrunun belirlenmesi ya da daire ve elips biçimindeki nesnelerin biçim ve büyüklüklerinin saptanması istenirse bunlara ilişkin bilinen bağıntılar kullanılır.



Verilere Uyan Fonksiyonun Seçimi

- Ölçü değerleri arasındaki matematiksel ilişki bilinmediği durumda; verilerin grafik gösterimi modelin belirlenmesinde kolaylık sağlar.
- (x_i, y_i) ölçü çifti düzlem dik koordinat sisteminde bir nokta belirtir ve ölçülen tüm noktalar koordinat sisteminde işaretlendikten sonra noktalar arasında bir eğri geçirilerek denklemi bilinen hangi standart eğri türünün seçilmesi gerektiği konusunda bir bilgi elde edilir.
- Noktalar arasında geçirilen eğri dalgalı bir yapıda ise uygun bağıntı olarak trigonometrik fonksiyonlar seçilir ($\sin(jx)$ ya da $\cos(jx)$ vb.).
- Ölçüler, eğri, doğru ya da periyodik değilse uygun fonksiyon olarak genellikle «x»'in kuvvetlerine göre n. dereceden bir polinom öngörülür.

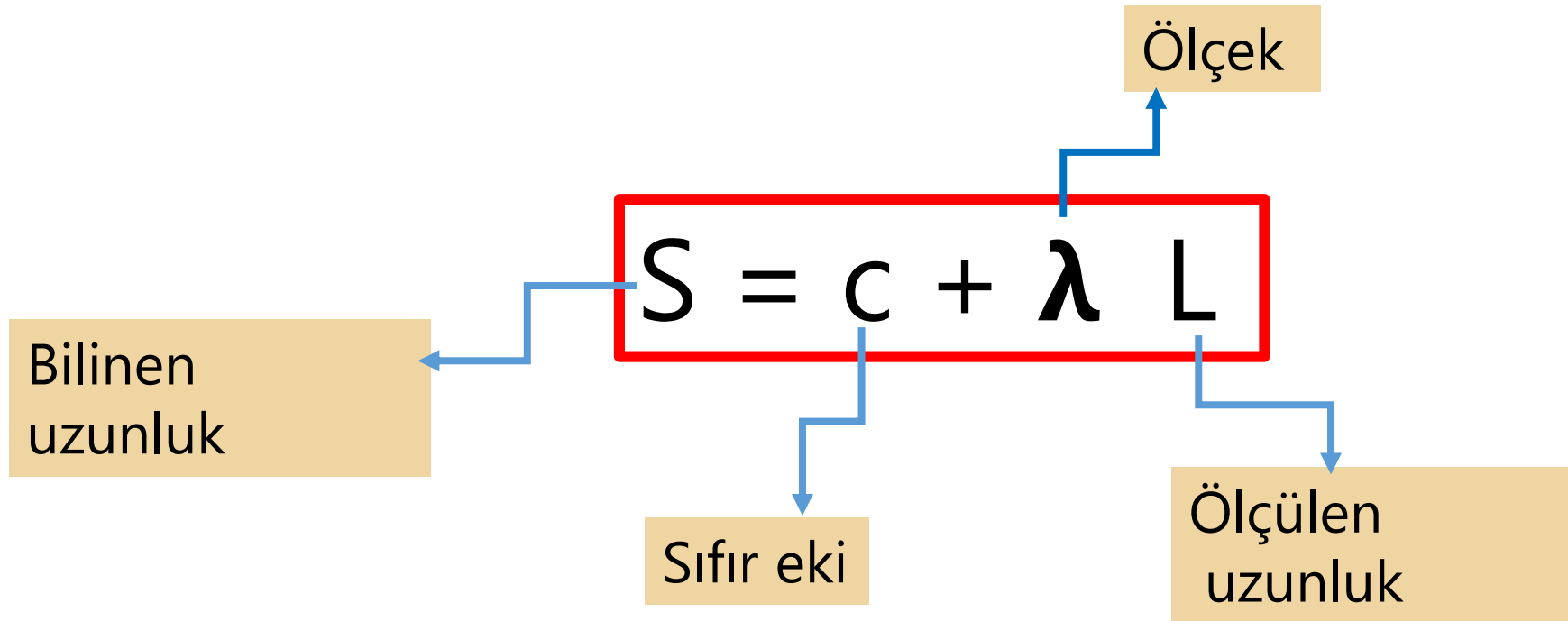
Verilere Uyan Fonksiyonun Seçimi

Uygun modelin seçimi için;

- Birim ağırlıklı ölçünün s_0 standart sapması seçilen fonksiyon için uygunluk ölçütü olarak kullanılır.
- Uygun olarak belirlenen değişik fonksiyonların her biri için en küçük kareler yöntemine göre dengeleme yapılır ve en küçük s_0 değerli fonksiyon uygun dengeleyici fonksiyon olarak seçilir.
- Nokta kümesi için x değişkenli bir polinom seçilirse, başlangıçta polinomun derecesi olabildiğince küçük öngörülür ve buna göre dengeleme yapılır. s_0 standart sapması büyük bir değer çıkmışsa polinoma bir terim daha eklenerek derecesi arttırılır. Yeniden dengeleme yapılarak genişletilen polinomun bilinmeyen katsayıları ve s_0 standart sapması hesaplanır. s_0 değeri öncekinden küçükse polinomun derecesi yeniden arttırılır ve dengeleme yinelenir.
- s_0 değerinin yaklaşık değişmediği ve derece artırıldığında büyümeye başladığı durumda en küçük dereceli polinom, nokta kümesi için en iyi uyan dengeleyici fonksiyondur.

Dengeleyici Doğru

Bir elektronik ya da optik uzaklık ölçerin c ve λ ayar parametrelerini belirlemek için bir doğru denklemi öngörülür:



(1)

Dengeleyici Doğru

Elektronik uzaklık ölçerler için (1) nolu eşitlik;

$$C = C_0 + \delta C$$

$$C_0 = 0$$

$$\lambda = \lambda_0 + \delta \lambda$$

$$\lambda_0 = 1$$

$$d = S - L = \delta C + L \delta \lambda$$

(Bilinen uzunluk – ölçülen uzunluk)

Dengeleyici Doğru

Düzeltilme denklemi :

$$\mathbf{d}_i + \mathbf{v}_i = \delta c + L_i \delta \lambda$$

$$\begin{array}{c} \begin{bmatrix} d_1 \\ d_2 \\ \vdots \\ d_n \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & L_1 \\ 1 & L_2 \\ \vdots & \vdots \\ 1 & L_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \delta c \\ \delta \lambda \end{bmatrix} \end{array}$$

mm **km**

I + **v** = **A** **x**

Dengeleme koşulu

$$\mathbf{f} = \mathbf{n} - \mathbf{u} > 0$$

Ölçü sayısı

Bilinmeyen sayısı
= 2

Dengeleyici Fonksiyonlar - Uygulama-1 (Demirel H, 2009)

UYGULAMA-1

Bir ayar bazının bilinen uzunluk parçaları ile elektronik uzaklık ölçerle ölçülerek L_i değerleri ve bunların olması gereken S_i parça uzunluklarından d_i sapmaları bulunmuştur. Yaklaşık L_i uzunlukları ve d_i farkları aşağıda verilmektedir.

i	L_i (km)	d_i (mm)
1	0.06	2
2	0.12	1
3	0.18	0
4	0.24	-2
5	0.42	-1
6	0.45	-3

Dengeleyici doğruyu belirleyiniz: c ve λ bilinmeyenlerini ve standart sapmalarını bulunuz. c ve λ değerlerinin anlamlı olup olmadığını gösteriniz.

Dengeleyici Fonksiyonlar - Uygulama-1 (Demirel H, 2009)

ÇÖZÜM:

ÖLÇÜ SAYISI: $n = 6$ adet uzunluk ölçüsü

BİL. SAYISI : $u = 2$ adet bilinmeyen parametreler (c ve λ)

SERBESTLİK DERECEİ: $f = n - u = 6 - 2 = 4 > 0$ **DENGELEME YAPILABİLİR**



Dengeleyici Fonksiyonlar - Uygulama-1 (Demirel H, 2009)

Düzeltilme Denklemleri:

$$d_i + v_i = \delta c + L_i \delta \lambda \quad (i = 1, 2, \dots, 6)$$

	δc	$\delta \lambda$	$-l \text{ (mm)}$
v_1	1	0.06	-2
v_2	1	0.12	-1
v_3	1	0.18	0
v_4	1	0.24	2
v_5	1	0.42	1
v_6	1	0.45	3

Ağırlık matrisi $\mathbf{P} = \mathbf{E}$ birim matris

Normal Denklemler ve Çözümü:

$$\mathbf{N} = \mathbf{A}^T \mathbf{A} = \begin{bmatrix} 6 & 1.47 \\ 1.47 & 0.49 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{n} = \mathbf{A}^T \mathbf{l} = \begin{bmatrix} -3.00 \\ -2.01 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{Q}_{xx} = \mathbf{N}^{-1} = \begin{bmatrix} 0.6291 & -1.8875 \\ -1.8875 & 7.7042 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{x} = \mathbf{Q}_{xx} \mathbf{n} = \begin{bmatrix} \delta c \\ \delta \lambda \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1.9066 \\ -9.8229 \end{bmatrix}$$

Bilinmeyenler vektörü

Dengeleyici Fonksiyonlar - *Uygulama-1 (Demirel H, 2009)*

Düzeltilmeler ve birim ağırlıklı ölçünün ve bilinmeyenlerin standart sapmaları :

$$\mathbf{v} = [-0.68 \quad -0.27 \quad 0.14 \quad 1.55 \quad -1.22 \quad 0.49]^T$$

$$[\mathbf{v} \mathbf{v}] = 4.98 \quad , \quad [\mathbf{v} \mathbf{v}] = [\mathbf{11}] - \mathbf{n}^T \mathbf{x} = 4.98$$

$$s_0 = \sqrt{\frac{[\mathbf{v} \mathbf{v}]}{n - u}} = \sqrt{\frac{4.98}{6 - 2}} = 1.12 \text{ mm}$$

$$s_c = s_0 \sqrt{Q_{cc}} = 0.89 \text{ mm} \quad , \quad s_\lambda = s_0 \sqrt{Q_{\lambda\lambda}} = 3.10$$

Dengeleyici Fonksiyonlar - Uygulama-1 (Demirel H, 2009)

Bilinmeyenler:

$$\delta c = 1.91 \text{ mm} , \quad \delta \lambda = -9.82 \text{ mm / km}$$

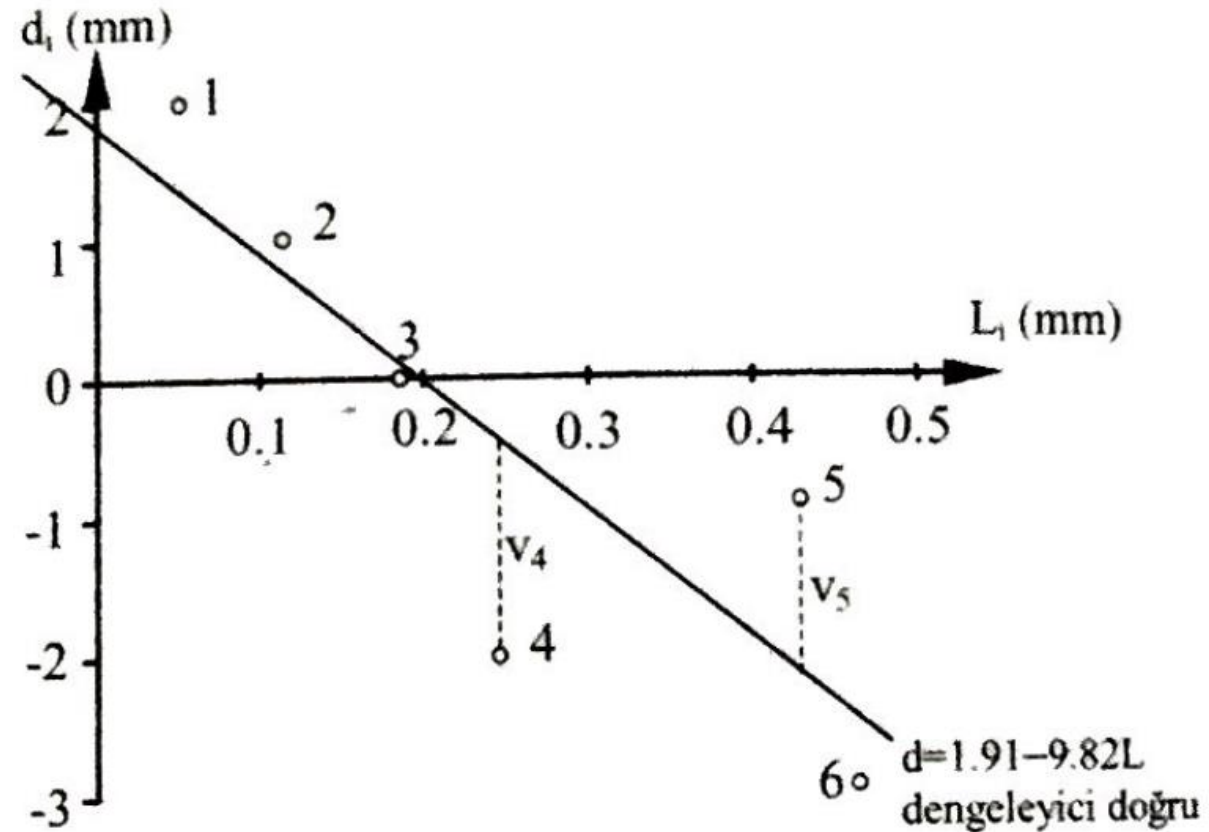
$$c = c_0 + \delta c = 0 + 1.91 \text{ mm} ,$$

$$\lambda = \lambda_0 + \delta \lambda = 1 - 0.00000982 = 0.99999018$$

Dengeleyici Doğru:

$$d \text{ (mm)} = 1.91 - 9.82 L_{\text{km}}$$

$$S = 1.91 \text{ (mm)} + 0.99999018 L$$



Dengeleyici Fonksiyonlar - *Uygulama-1 (Demirel H, 2009)*

Belirlenen Parametrelerin Test Edilmesi :

Anlamlılık düzeyi $\alpha = 0.05$ ve serbestlik derecesi $f = n - u = 4$ için t- dağılımının güven sınır değeri $t_{f, 1-\alpha/2} = 2.78$ dir.

$|\delta c| / s_c = 2.14 < t_{f, 1-\alpha/2}$ olduğundan δc anlamlı değildir; rastlantısal ölçü hatalarından kaynaklanmaktadır; c parametresi "0" beklenen değerine eşittir.

$|\delta \lambda| / s_\lambda = 3.17 > t_{f, 1-\alpha/2}$ olduğundan $\delta \lambda$ değeri anlamlıdır; ölçek "1" beklenen değerine eşit kabul edilemez; belirlenen $\lambda = 0.99999018$ değeri geçerlidir.

Dengeleyici Fonksiyonlar - *Uygulama-2 (Demirel H, 2009)*

UYGULAMA-2

Bir yol ekseninin eğri parçası üzerinde bulunan noktaların x_i , y_i koordinatları :

i	x_i	y_i
1	1.53	6.49
2	2.02	4.35
3	4.56	2.28
4	7.08	4.06
5	8.48	6.45

Nokta kümesine uyan $y = A + Bx + Cx^2$ dengeleyici polinomunu belirleyiniz; polinom katsayılarını ve standart sapmalarını hesaplayınız.

$x = 8.5$ noktasında dengeleyici eğriye teğet olan yolun doğru parçasının eğimini ve standart sapmasını bulunuz.

Dengeleyici Fonksiyonlar - Uygulama-2 (Demirel H, 2009)

ÇÖZÜM :

ÖLÇÜ SAYISI: $n = 5$ adet koordinat

BİL. SAYISI : $u = 3$ adet bilinmeyen parametreler (A, B, C)

SERBESTLİK DERECEİ: $f = n - u = 5 - 3 = 2 > 0$ **DENGELEME YAPILABİLİR**



Dengeleyici Fonksiyonlar - Uygulama-2 (Demirel H, 2009)

Düzeltilme denklemleri : $y_i + v_i = A + x_i B + x_i^2 C \quad (i=1, 2, 3, 4, 5)$

Fonksiyon doğrusal ve değerler küçük olduğundan A, B, C bilinmeyenleri için yaklaşık değer hesabı ve düzeltme denklemlerinin dönüştürülmesi zorunlu değildir. Ölçülerin ağırlıkları eşit; $P_i = 1$.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1.53 & 2.34 \\ 1 & 2.02 & 4.08 \\ 1 & 4.56 & 20.79 \\ 1 & 7.08 & 50.13 \\ 1 & 8.48 & 71.91 \end{bmatrix}, I = \begin{bmatrix} 6.5 \\ 4.3 \\ 3.0 \\ 4.0 \\ 6.5 \end{bmatrix}, N = A^T A = \begin{bmatrix} 5.00 & 23.67 & 149.25 \\ & 149.25 & 1071.34 \\ \text{sim.} & & 8138.41 \end{bmatrix}, n = A^T I = \begin{bmatrix} 23.63 \\ 112.55 \\ 747.68 \end{bmatrix}$$

Katsayılar matrisi

**Küçültülmüş
ölçüler vektörü**

Normal denklem katsayılar matrisi

Dengeleyici Fonksiyonlar - Uygulama-2 (Demirel H, 2009)

Bilinmeyenler vektörü (x) ve kofaktör matrisi (Q_{xx}):

$$Q_{xx} = N^{-1} = \begin{bmatrix} 3.3977 & -1.6627 & 0.1566 \\ & 0.9353 & -0.0926 \\ \text{sim.} & & 0.0094 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{x} = Q_{xx} \mathbf{n} = \begin{bmatrix} A \\ B \\ C \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10.2062 \\ -3.2758 \\ 0.3359 \end{bmatrix}$$

Düzeltilmeler ve standart sapmalar :

$$\mathbf{v} = [-0.51 \quad 0.61 \quad -0.03 \quad -0.21 \quad 0.13]^T$$

$$[vv] = 0.69 \quad , \quad s_0 = 0.59 \quad , \quad s_A = 1.08 \quad , \quad s_B = 0.57 \quad , \quad s_C = 0.06$$

Dengeleyici Fonksiyonlar - Uygulama-2 (Demirel H, 2009)

Polinom katsayılarının test edilmesi:

$f = 5 - 3 = 2$ ve anlamlılık düzeyi $\alpha = 0.05$ için t- dağılımının güven sınırı $t_{f, 1-\alpha/2} = 4.30$ olur.

$$A / s_A = 9.45 > t_{f, 1-\alpha/2}$$

$$B / s_B = 5.75 > t_{f, 1-\alpha/2}$$

$$C / s_C = 5.67 > t_{f, 1-\alpha/2}$$

olduğundan belirlenen katsayıların "0" beklenen değerinden sapmaları anlamlıdır (signifikant).

Dengeleyici Fonksiyonlar - Uygulama-2 (Demirel H, 2009)

x = 8.5 noktasında dengeleyici eğriye teğet olan yolun doğru parçasının eğimi ve standart sapması

Dengeleyici polinom: $y = 10.2062 - 3.2758 x + 0.3359 x^2$

x = 8.5 noktasındaki eğim (F) ve standart sapması (s_F):

$$F = \frac{dy}{dx} = B + 2 C x = 2.4345 \quad , \quad dF = dB + 2 x dC = dB + 17 dC ,$$

$$Q_{FF} = Q_{BB} + 17^2 Q_{CC} + 34 Q_{BC} = 0.5035 \quad , \quad s_F = s_0 \sqrt{Q_{FF}} = 0.42$$

Ders duyuruları, soru ve görüşleriniz için:



Prof. Dr. Uğur DOĞAN

<https://avesis.yildiz.edu.tr/dogan>

dogan@yildiz.edu.tr



Prof. Dr. Cüneyt AYDIN

<https://avesis.yildiz.edu.tr/caydin>

caydin@yildiz.edu.tr; caydin78@gmail.com