



Parametre Kestirimi

Prof. Dr. U. DOĞAN , Prof. Dr. C. AYDIN, Dr. Öğr . Üyesi D. ÖZ DEMİR

YTÜ-Harita Mühendisliği Bölümü, Jeodezi Anabilim Dalı

İstanbul, Kasım 2020

Parametre Kestirimi

- Rasgele değişkenlerin beklenen değerlerinin ve varyanslarının birden fazla ölçü kullanılarak belirlenmesi işlemine PARAMETRE KESTİRİMİ adı verilir.
- Fazla ölçülerden parametre kestirimi yapabilmek için çeşitli yöntemler bulunur. Bu yöntemler;
 1. En Küçük Kareler (EKK) yöntemi,
 2. Beklenen Değere Sadık En Uygun Kestirim (BUE, ya da BLUE)
 3. Maksimum Likelihood yöntemidir.

Her üç yöntem, ölçülerin normal dağılımlı olması durumunda özdeş sonuç verirler.

Parametre Kestirimi

- Uygulamadaki kolaylıkları nedeniyle, jeodezide genellikle, EN KÜÇÜK KARELER (EKK) YÖNTEMİ kullanılır.
- EKK yöntemi; TEMEL DENKLEMLER adı verilen,

$$\text{ÖLÇÜ} + \text{DÜZELTMESİ} = \text{BİLİNMEYENLERİN FONKSİYONU}$$

biçimindeki denklem sistemine dayanır. Dengeleme hesabı bu denklemleri ele alarak, bir problemde geçen bilinmeyenlerin (örneğin koordinatların) ve onların standart sapmalarının EN UYGUN biçimde belirlenmesini konu alır.

Parametre Kestirimi

- Dengeleme hesabına geçmeden önce, fazla ölçüler yoluyla, gözlenen büyüklüklerin en uygun değerlerinin ve standart sapmalarının pratik olarak belirlendiği iki özel problemi ele alacağız:
 - **Sonlu ölçüler yardımıyla standart sapma hesabı,**
 - **Ölçü çiftleri yardımıyla standart sapma hesabı.**

Parametre Kestirimi: *Sonlu ölçüler yardımıyla standart sapma hesabı*

- Bir büyüklük (örneğin, $X \sim N(\mu, \sigma^2)$), DEĞİŞMEYEN KOŞULLAR ALTINDA n kez gözlenmiş olsun;

$$\ell = [L_1 \quad L_2 \quad \cdots \quad L_n]^T \quad n \times 1 \text{ Ölçüler vektörü}$$

- μ için en uygun (en yüksek olasılıklı) değer, BU DURUM İÇİN, aritmetik ortalamadır:

$$E(\mu) = \bar{x} = \frac{[L]}{n} = \frac{1}{n} \mathbf{s} \ell \quad (\mathbf{s} = [1 \quad 1 \quad \cdots \quad 1])$$

Parametre Kestirimi: *Sonlu ölçüler yardımıyla standart sapma hesabı*

- Ölçülerin (gerçek) hataları ve düzeltmeleri kullanılarak;

Hata

$$\varepsilon_i = L_i - \mu$$

Düzeltilme

$$v_i = \bar{X} - L_i$$

$$\varepsilon_i = \bar{X} - v_i - \mu$$

$$\varepsilon_1 = \bar{X} - v_1 - \mu$$

$$\varepsilon_2 = \bar{X} - v_2 - \mu$$

$\vdots$

$$\varepsilon_n = \bar{X} - v_n - \mu$$

$$[\varepsilon] = n\bar{X} - [v] - n\mu$$

0

$$\bar{X} - \mu = \frac{[\varepsilon]}{n}$$

1

Parametre Kestirimi: *Sonlu ölçüler yardımıyla standart sapma hesabı*

- Gerçek hataların kareleri;

$$\varepsilon_i = \bar{X} - v_i - \mu \longrightarrow \varepsilon_1^2 = (\bar{X} - \mu)^2 + v_1^2 - 2v_1(\bar{X} - \mu)$$

$\vdots$

$$\varepsilon_n^2 = (\bar{X} - \mu)^2 + v_n^2 - 2v_n(\bar{X} - \mu)$$

1

$$\bar{X} - \mu = \frac{[\varepsilon]}{n}$$

$$[\varepsilon\varepsilon] = n(\bar{X} - \mu)^2 + [vv] - 2[v](\bar{X} - \mu)$$

0

2

$$[\varepsilon\varepsilon] = \frac{[\varepsilon]^2}{n} + [vv]$$

$$ns^2 = (s^2 + r(n-1)s^2) + [vv]$$

İspat: Demirel (2009)

Bir Ölçünün Varyansı

$$s^2 = \frac{[vv]}{(n-1)(1-r)}$$

**Ölçüler arasında
sabit korelasyon**

Parametre Kestirimi: *Sonlu ölçüler yardımıyla standart sapma hesabı*

- En uygun değer olan aritmetik ortalamanın varyansı:

$$E(\mu) = \bar{x} = \frac{[L]}{n} = \frac{1}{n} \mathbf{s} \boldsymbol{\ell} \longrightarrow \bar{s}^2 = \mathbf{s} \mathbf{C}_{ll} \mathbf{s}^T \longrightarrow \mathbf{C}_{ll} = \begin{bmatrix} s^2 & rs^2 & rs^2 \\ rs^2 & s^2 & rs^2 \\ rs^2 & rs^2 & s^2 \end{bmatrix}$$

Aritmetik Ortalamanın Varyansı

$$\bar{s}^2 = \frac{s^2}{n} (1 + (n-1)r)$$

**Ölçüler arasında
sabit korelasyon**

Parametre Kestirimi: *Sonlu ölçüler yardımıyla standart sapma hesabı (ÖZET)*

Aritmetik Ortalama

$$\bar{x} = [L] / n$$

Düzeltilmeler

$$v_i = \bar{x} - L_i$$

Düzeltilmelerin Karelerinin Toplamı

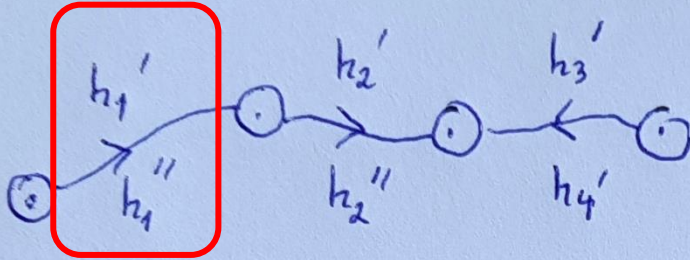
$$[vv] = v_1^2 + v_2^2 + \dots + v_n^2$$

	Korelasyon var (r)	Korelasyon yok ($r=0$)
Bir ölçünün varyansı	$s^2 = \frac{[vv]}{(n-1)(1-r)}$	$s^2 = \frac{[vv]}{(n-1)}$
Aritmetik ortalamanın varyansı	$\bar{s}^2 = \frac{s^2}{n} (1 + (n-1)r)$	$\bar{s}^2 = \frac{s^2}{n}$

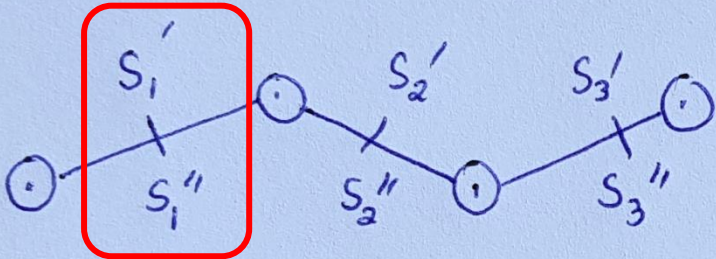
Parametre Kestirimi: Ölçü Çiftleri Yardımıyla Standart Sapma Hesabı

Nivelmanda yükseklik farkları, poligon geçkisinde kenarlar ve kırılma açıları ikişer kez gözlenir. Bunlara **ölçü çiftleri** adı verilir.

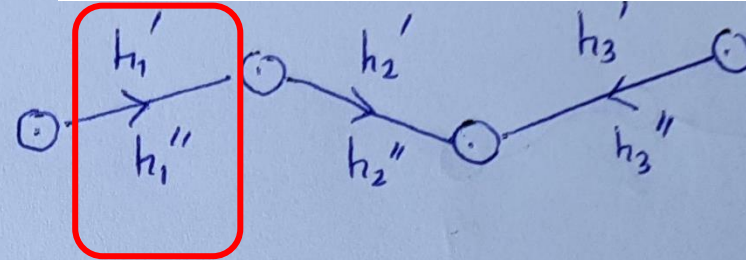
Geometrik Nivelman (yükseklik farkları)



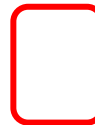
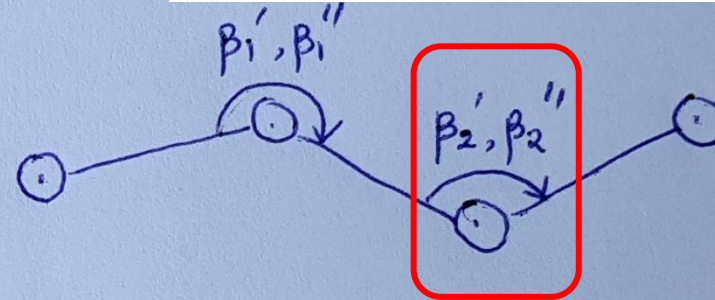
Poligon Geçkisi (kenarlar)



Trigonometrik Nivelman (yükseklik farkları)

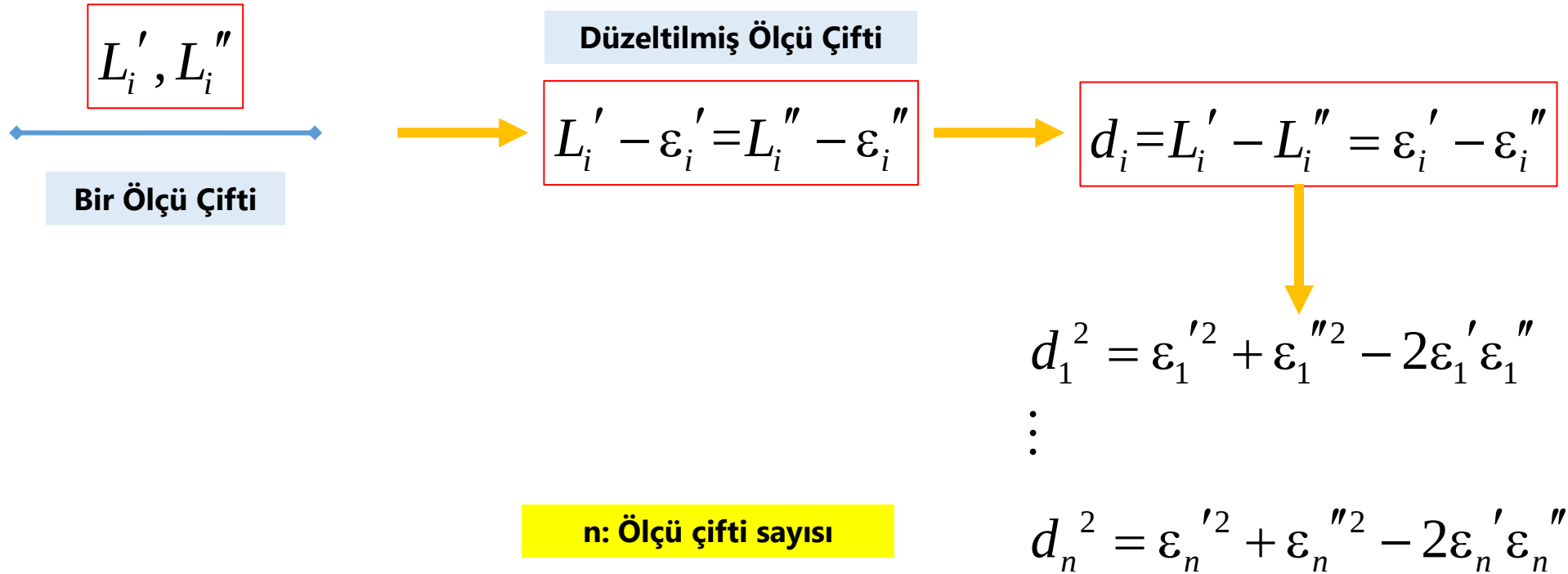


Poligon Geçkisi (kırılma açıları)



Bir ölçü çifti

Parametre Kestirimi: Ölçü Çiftleri Yardımıyla Standart Sapma Hesabı



$$[dd] = [\epsilon'\epsilon'] + [\epsilon''\epsilon''] - 2[\epsilon'\epsilon'']$$

Parametre Kestirimi: Ölçü Çiftleri Yardımıyla Standart Sapma Hesabı

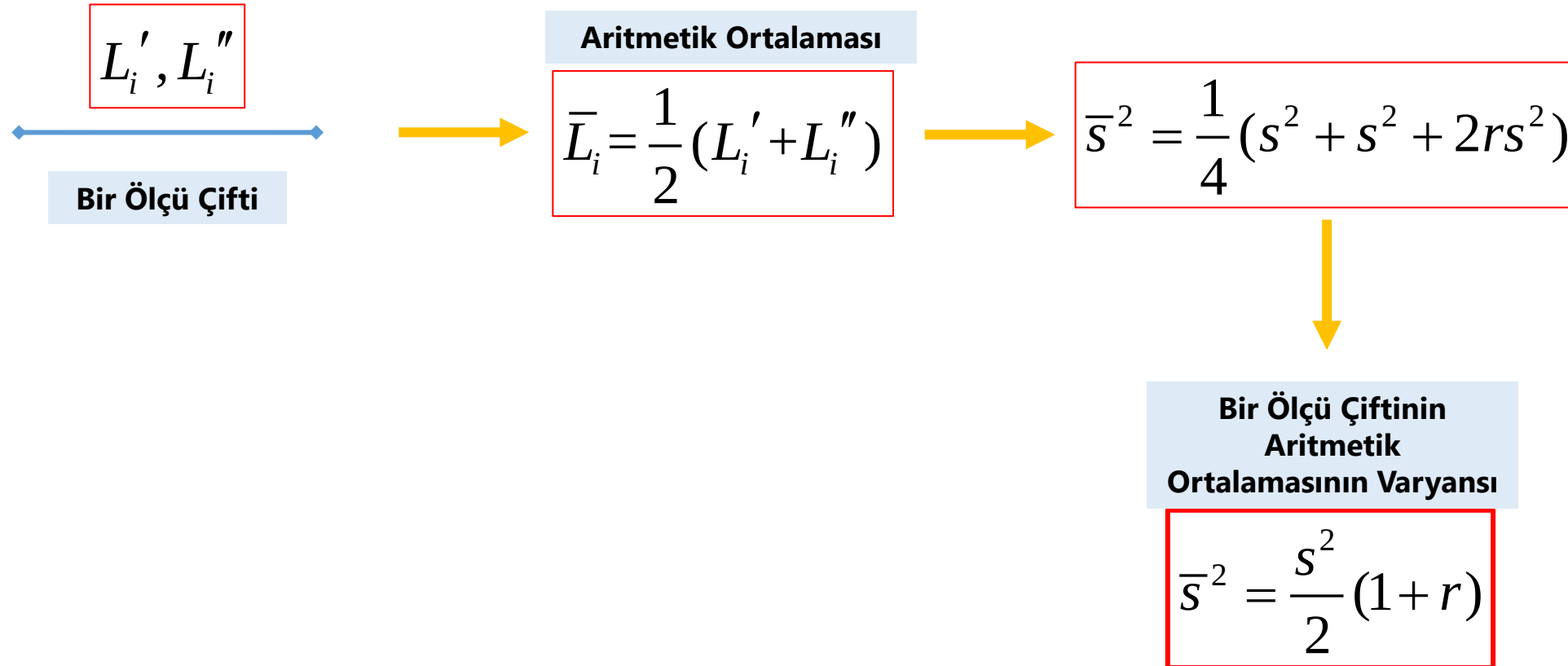
$$[dd] = [\varepsilon'\varepsilon'] + [\varepsilon''\varepsilon''] - 2[\varepsilon'\varepsilon''] \longrightarrow [dd] = ns^2 + ns^2 - 2rs^2$$

Bir Ölçünün Varyansı

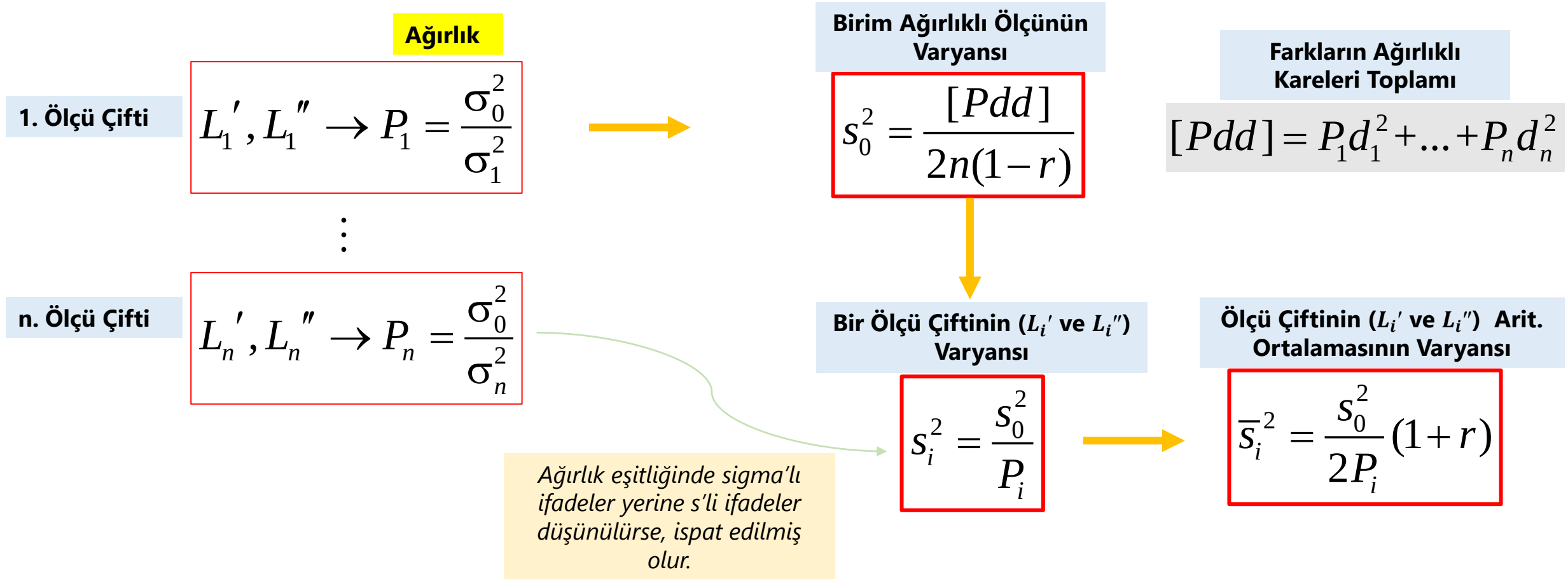
$$s^2 = \frac{[dd]}{2n(1-r)}$$

Ölçüler arasında
sabit korelasyon

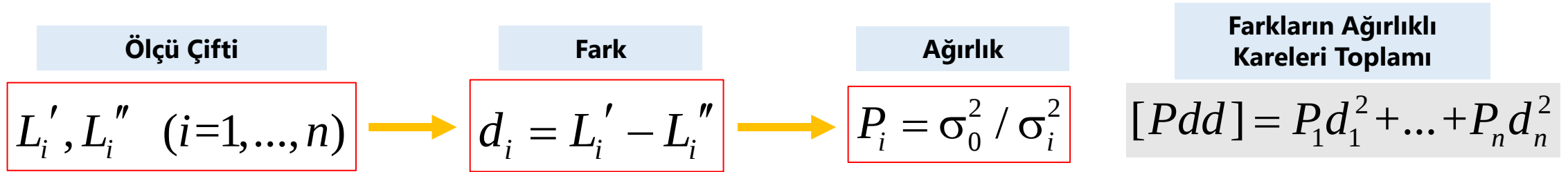
Parametre Kestirimi: Ölçü Çiftleri Yardımıyla Standart Sapma Hesabı



Parametre Kestirimi: Ölçü Çiftleri Yardımıyla Standart Sapma Hesabı (Ağırlıklı)



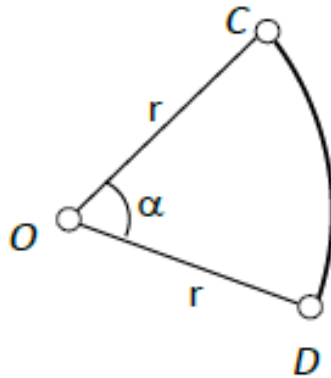
Parametre Kestirimi: Ölçü Çiftleri Yardımıyla Standart Sapma Hesabı (ÖZET)



	Korelasyon var (r)	Korelasyon yok ($r=0$)
Birim ağırlık ölçünün varyansı	$s_0^2 = \frac{[Pdd]}{2n(1-r)}$	$s_0^2 = \frac{[Pdd]}{2n}$
Bir ölçü çiftinin varyansı	$s_i^2 = \frac{s_0^2}{P_i}$	$s_i^2 = \frac{s_0^2}{P_i}$
Bir ölçü çiftinin aritmetik ortalamasının varyansı	$\bar{s}_i^2 = \frac{s_0^2}{2P_i} (1+r)$	$\bar{s}_i^2 = \frac{s_0^2}{2P_i}$

Örnek-1:

Şekildeki α merkez açısı değişmeyen koşullar altında 5 kez ölçülmüştür.



i	α (gon)
1	48,3998
2	48,3988
3	48,3983
4	48,3974
5	48,3990

r yarıçap uzunluğu 120 m, standart sapması 4 mm olduğuna göre CD yay parçasının en uygun uzunluğunu ve standart sapmasını belirleyiniz.



Örnek-1:

Çözüm:

CD yay parçasının en uygun uzunluğu :

$$CD = 2\pi r \frac{\bar{\alpha}}{400}$$

$\bar{\alpha}$ aritmetik ortalaması=48,39866 gon

En uygun değer

i	v_i (mgon)
1	-1,14
2	-0,14
3	0,36
4	1,26
5	-0,34
$[v]=$	0,00
$[vv]=$	3,1520 mgon ²

$$s^2 = \frac{[vv]}{5-1} = 0,7880 \text{ mgon}^2$$

Bir ölçünün varyansı

$$s_{\bar{\alpha}}^2 = \frac{s^2}{5} = 0,1576 \text{ mgon}^2$$

Aritmetik ortalama varyansı



Örnek-1:

Çözüm:

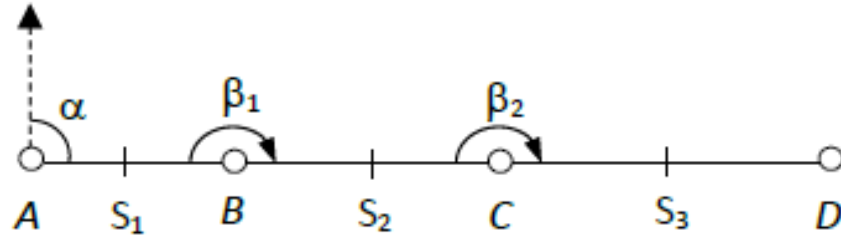
$$CD = 2\pi r \frac{\bar{\alpha}}{400} = 91,229 \text{ m}$$

$$dCD = \left(2\pi \frac{\bar{\alpha}}{400}\right) dr + \left(2\pi r \frac{1}{400} \frac{\pi}{200}\right) d\bar{\alpha} = (0,7602) dr + (0,0296) d\bar{\alpha} \quad \longrightarrow \quad \text{Gerçek hata yayılma kuralı}$$

$$s_{CD}^2 = (0,7602)^2 \sigma_r^2 + (0,0296)^2 s_{\bar{\alpha}}^2 = 9,2511 \text{ mm}^2 \rightarrow s_{CD} = 3,04 \text{ mm} \quad \checkmark$$

Varyans yayılma kuralı

Örnek-2:



Şekildeki poligon geçkisinde S kenar uzunlukları ikişer kez gözlenmiştir.

i	S_i' (m)	S_i'' (m)	σ_s
1	50,293	50,297	4+5ppm
2	150,314	150,323	4+5ppm
3	200,111	200,100	4+5ppm

α açıklık açısı ve β_1 kırılma açısı hatasız, β_2 ise hatalıdır:

$$\alpha = 98,2932 \text{ gon (hatasız); } \beta_1 = 198,3230 \text{ gon (hatasız); } \beta_2 = 200,0098 \text{ gon } (\sigma_{\beta_2} = 3 \text{ mgon})$$

A nokta koordinatları ($x_A=0$, $y_A=0$ m) hatasız olduğuna göre, D noktasının en uygun koordinatlarını ve konum hatasını belirleyiniz.



Örnek-2:

Çözüm:

$$\alpha_1 = \alpha + \beta_1 \pm 200 = 96,6162 \text{ gon}$$

$$\alpha_2 = \alpha_1 + \beta_2 \pm 200 = 96,6260 \text{ gon} \rightarrow \sigma_{\alpha_2} = \sigma_{\beta_2} = 3 \text{ mgon} \rightarrow \text{Açılar arasında yalnız } \beta_2 \text{ hatalıdır.}$$

$$x_D = x_A + \bar{S}_1 \cos \alpha + \bar{S}_2 \cos \alpha_1 + \bar{S}_3 \cos \alpha_2$$

$$y_D = y_A + \bar{S}_1 \sin \alpha + \bar{S}_2 \sin \alpha_1 + \bar{S}_3 \sin \alpha_2 \rightarrow \text{Rasgele değişken vektörü; } \mathbf{x} = [\bar{S}_1 \ \bar{S}_2 \ \bar{S}_3 \ \alpha_2]^T$$



Örnek-2:

Çözüm:

$$P_i = \frac{\sigma_0^2}{\sigma_{s_i}^2}$$

$$\bar{s}_i^2 = \frac{s_0^2}{2P_i}$$

$\bar{s}_1, \bar{s}_2, \bar{s}_3$ aritmetik ortalamaları ve varyansları ($\bar{s}_i^2$)

i	$\bar{s}_i$ (m)	d_i (mm)	σ_{s_i} (mm)	P_i	$P_i d_i d_i$	$\bar{s}_i^2$ (mm ²)
1	50,295	-4	4,2515	1,0000	16,000	14,0277
2	150,319	-9	4,7516	0,8006	64,8486	17,5214
3	200,106	11	5,0005	0,7229	87,4709	19,4047

$$\begin{aligned} [Pdd] &= 168,3195 \\ s_0^2 &= 28,0533 \text{ mm}^2 \end{aligned}$$



Örnek-2:

Çözüm:

D noktasının en uygun koordinatları:

$$x_D=19,9347 \text{ m} \quad \text{ve} \quad y_D=400,2087 \text{ m}$$

D noktasının konum hatası:

$$dx_D = \cos\alpha \, d\bar{S}_1 + \cos\alpha_1 \, d\bar{S}_2 + \cos\alpha_2 \, d\bar{S}_3 - \{(\bar{S}_3 \sin\alpha_2)/\rho\} d\alpha_2 \quad (\rho=200/\pi)$$

$$dy_D = \sin\alpha \, d\bar{S}_1 + \sin\alpha_1 \, d\bar{S}_2 + \sin\alpha_2 \, d\bar{S}_3 + \{(\bar{S}_3 \cos\alpha_2)/\rho\} d\alpha_2$$

$$dx_D = (0,0268 \, d\bar{S}_1 + 0,0531 \, d\bar{S}_2 + 0,0530 \, d\bar{S}_3 - 3,1388 \, d\alpha_2)$$

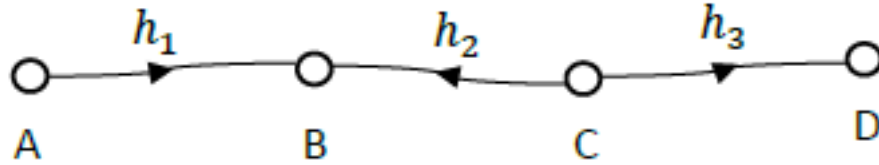
$$dy_D = (0,9996 \, d\bar{S}_1 + 0,9986 \, d\bar{S}_2 + 0,9986 \, d\bar{S}_3 - 0,1655 \, d\alpha_2)$$

$$\sigma_{XD,p} = \sqrt{\sigma_{XD}^2 + \sigma_{YD}^2} = \sqrt{\underbrace{\bar{S}_1^2 + \bar{S}_2^2 + \bar{S}_3^2}_{\text{Aritmetik ortalama varyansları}} + \bar{S}_3^2 \sigma_{\alpha_2}^2 / \rho^2} = 11,83 \text{ mm} = 1,18 \text{ cm}$$

**Aritmetik ortalama
varyansları (bir önceki tablo)**

Örnek-3:

Şekildeki yükseklik farkları geometrik nivelman yöntemiyle ikişer kez gözlenmiştir. Aşağıda ölçü çiftleri (h'_i, h''_i) ve nivelman yol uzunlukları (S_i) verilmektedir.



i	h'_i (m)	h''_i (m)	S_i (km)
1	1,999	2,004	1,2
2	2,806	2,798	0,5
3	1,084	1,077	2,5

($S_0 = 1$ km)

A noktasının yüksekliği 100,000 m (sabit) olduğuna göre, C ve D noktalarının en uygun yüksekliklerini, standart sapmalarını ve aralarındaki korelasyonu hesaplayınız.



Örnek-3:

Çözüm:

$S_0 \rightarrow$ Birim niv. yol uzunluğu

$$P_i = \frac{S_{0(km)}}{S_{i(km)}}$$

GEOMETRİK NİV.

$$P_i = \frac{S_{0(km^2)}^2}{S_{i(km^2)}^2}$$

TRİGNOMETRİK NİV.

i	$\bar{h}_i$ (m)	$d_i = h_i' - h_i''$ (mm)	$P_i = (1/S_i)$	$P_i d_i d_i$	$\bar{s}_i^2 = s_0^2 / 2P_i$ (mm ²)
1	2,0015	-5	0,8333	20,8250	16,8432
2	2,8020	8	2,0000	128,0000	7,0177
3	1,0805	7	0,4000	19,6000	35,0885

Aritmetik ortalama varyansı

$$[Pdd] = 168,425 \text{ mm}^2$$

Birim ağırlıklı ölçünün varyansı

$$s_0^2 = \frac{[Pdd]}{2n} = \frac{168,425}{6} = 28,0708 \text{ mm}^2$$



Örnek-3:

Çözüm:

$$\mathbf{x} = [h_1 \quad h_2 \quad h_3]^T$$

C ve D noktasının en uygun yükseklikleri:

$$H_C = H_A + h_1 - h_2 = 100,000 + 2,0015 - 2,8020 = 99,1995 \text{ m}$$

$$H_D = H_A + h_1 - h_2 + h_3 = 100,000 + 2,0015 - 2,8020 + 1,0805 = 100,2800 \text{ m}$$

$$\mathbf{F} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix}; \mathbf{C}_{xx} = \begin{bmatrix} 16,8432 & 0 & 0 \\ 0 & 7,0177 & 0 \\ 0 & 0 & 35,0885 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{C}_{H_C H_D} = \mathbf{F} \mathbf{C}_{xx} \mathbf{F}^T = \begin{bmatrix} 23,8609 & 23,8609 \\ 23,8609 & 58,9494 \end{bmatrix} \text{ mm}^2$$

$$s_{H_C} = \sqrt{23,8609} = 4,8848 \text{ mm}; s_{H_D} = \sqrt{58,9494} = 7,6779 \text{ mm};$$

$$\rho = \frac{s_{H_C H_D}}{s_{H_C} s_{H_D}} = \frac{23,8609}{4,8848 * 7,6779} = 0,6362$$



Ders duyuruları, soru ve görüşleriniz için:



Prof. Dr. Uğur DOĞAN

<https://avesis.yildiz.edu.tr/dogan>

dogan@yildiz.edu.tr



Prof. Dr. Cüneyt AYDIN

<https://avesis.yildiz.edu.tr/caydin>

caydin@yildiz.edu.tr; caydin78@gmail.com



Dr. Öğretim Üyesi Deniz ÖZ DEMİR

<https://avesis.yildiz.edu.tr/denizoz>

denizoz@yildiz.edu.tr

