



Parametre Kestirimi: Dengeleme Hesabı

Prof. Dr. U. DOĞAN , Prof. Dr. C. AYDIN, Dr. Öğr . Üyesi D. ÖZ DEMİR

YTÜ-Harita Mühendisliği Bölümü, Jeodezi Anabilim Dalı
İstanbul, Kasım 2020

Dengeleme Hesabı

- Bildiğimiz bir geometriyi (fiziki gerçekliği) ifade eden büyüklüklere ilişkin fazla sayıdaki ölçülerin o geometriyi en iyi açıklayacak biçimde düzeltilmesi, dolayısıyla, o geometrinin elimizdeki ölçülerle en uygun biçimde tanımlanabilmesi «**dengeleme hesabının**» konusudur.
- Parametre kestirim yöntemlerinden **En Küçük Kareler (EKK)** yöntemi kullanıldığından, söz konusu dengeleme işlemi, EKK dengelemesi olarak da adlandırılır.
- Dengeleme hesabı, nokta koordinatlarının ve yüksekliklerinin en uygun biçimde belirlenmesi ve bu büyüklüklerden başka kestirimlerin ve analizlerin yapılması için Harita Mühendisliğinde ve Jeodezide vazgeçilmez bir hesap işlem dizisidir (Söz konusu koordinatların elde edilmesi ve analizi **DENGELEME HESABI dersinin** ana konusudur).

Dengeleme Hesabı / *Modeller*

- Farklı amaçlarla kullanılan farklı «ölçü dengelemelerinden» söz etmek mümkündür:
- ✓ **Dolaysız ölçüler dengelemesi (Gauss-Markoff modeli)**
- ✓ **Dolaylı ölçüler dengelemesi (Gauss-Markoff modeli)**
- ✓ **Bilinmeyenleri arasında koşul denklemleri bulunan dolaylı ölçüler dengelemesi (Gauss-Markoff modeli+Lagrange Fonksiyonu)**
- ✓ **Koşullu ölçüler dengelemesi (Gauss-Helmert Modeli)**
- ✓ **Bilinmeyenli koşullu ölçüler dengelemesi (Gauss-Helmert Modeli)**

Dengeleme Hesabı/*Temel Aşamalar*

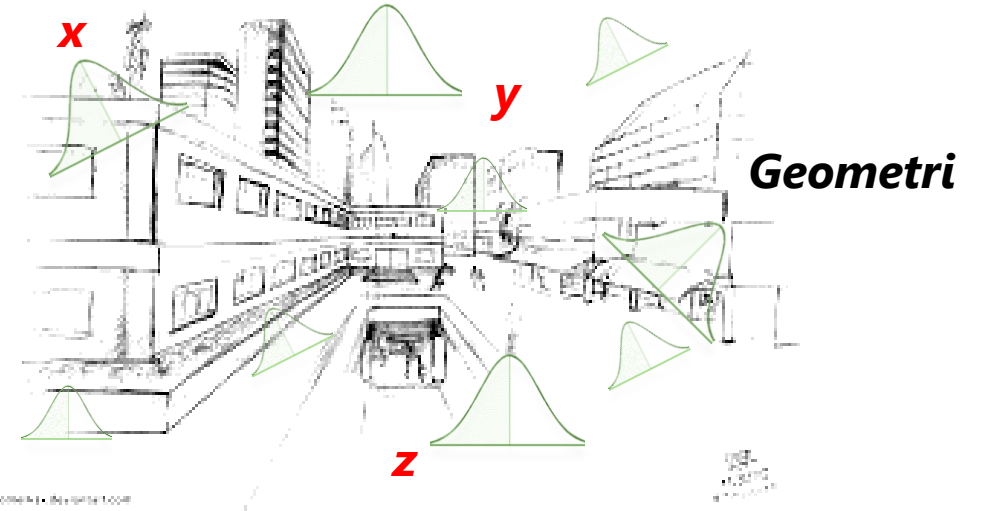
1. Dengeleme hesabında en önemli aşama «**TEMEL EŞİTLİKLER**» adı verilen eşitliklerin kurulmasıdır. «**Ölçü+Düzeltilmesi=Bilinmeyenlerin Fonksiyonu**» yapısındaki temel eşitlikler, ölçülerin bilinen geometriye nasıl uyması gerektiğini ifade eder.
2. Temel eşitliklerden «**DÜZELTME DENKLEMLERİ**» adı verilen denklem sistemine ulaşılır.
3. Düzeltme denklemlerinden « $[pvv] = \mathbf{v}^T \mathbf{P} \mathbf{v}$ » fonksiyonunu minimum yapan bilinmeyenlere ait **NORMAL DENKLEMLER** oluşturulur.
4. Normal denklemler çözülür.

Dengeleme Hesabı/Giriş/*Temel Eşitlikler*

Ölçüler
($L_i, i = 1, 2, \dots, n$)



$$L_i + v_i = f_i(x, y, z, \dots)$$



ÖLÇÜ+DÜZELTMESİ

=

BİLİNMEYENLERİN FONK.

$$L_i + v_i$$

$$f_i(x, y, z, \dots)$$

Dengeleme

Dengeleme Hesabı/Giriş/*Temel Eşitlikler*

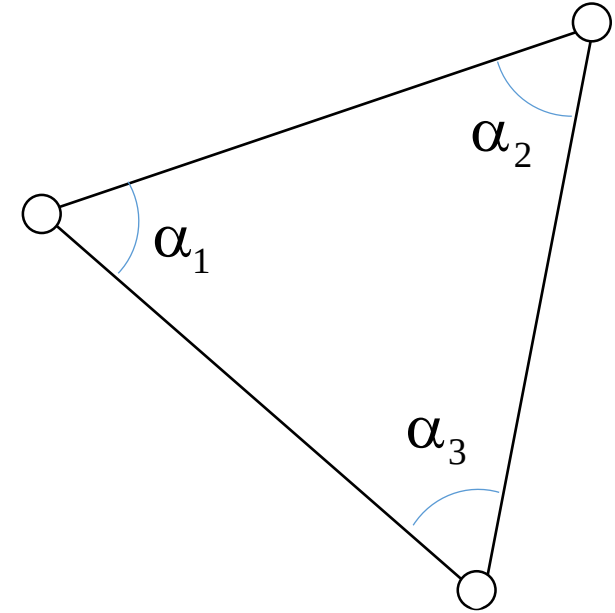
- Şekildeki **üçgende** gösterilen açı ölçüleri hatalı büyüklüklerdir. Bu nedenle kapanma, « $w=200-(\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3) = 0$ » **çıkamaz**. Bu sonuç, elimizdeki ölçülerin başka bir geometriyi (bu örnekte bir çokgeni) anlattığını gösterir ve «üçgen» geometrik ön bilgisi ile **çelişir**. Bu açılar bir üçgen özelliğini sağlayacak şekilde düzeltilmelidir. Bunun için aşağıdaki temel eşitlikler düşünülür:

$$\alpha_1 + v_1 = x$$

$$\alpha_2 + v_2 = y$$

$$\alpha_3 + v_3 = 200 - (x + y)$$

Üçüncü açının x ve y bilinmeyenlerine bağlı olarak böyle çıkması gerektiğini ifade eder.



Dengeleme Hesabı/Giriş/*Serbestlik Derecesi*

$$\alpha_1 + v_1 = x$$

$$\alpha_2 + v_2 = y$$

$$\alpha_3 + v_3 = 200 - (x + y)$$

- Bilinmeyen sayısı u ile gösterilir. (Bu örnekte $u=2$ 'dir).
- Ölçü sayısı n ile gösterilir (Bu örnekte $n=3$ 'tür).
- Dengeleme yapabilmek için fazla ölçü sayısı (***serbestlik derecesi***);

$$f = n - u > 0$$

olmalıdır.

Bilinmeyenlerin seçimi ve temel eşitliklerin oluşturulması «dolaylı ölçüler dengelemesinde» ayrıntısıyla ele alınmaktadır.

Dengeleme Hesabı/Giriş/*Düzeltilme Denklemleri*

- Temel eşitliklerde geçen bilinmeyenler iki parçaya ayrılır:

$$x = x_0 + \delta x$$

$$y = y_0 + \delta y$$

Yaklaşık Değer

Küçültülmüş Bilinmeyen

Düzeltilme Denklemleri

$$\alpha_1 + v_1 = x$$

$$\alpha_2 + v_2 = y$$

$$\alpha_3 + v_3 = 200 - (x + y)$$

$$v_1 = \delta x + (x_0 - \alpha_1)$$

$$v_2 = \delta y + (y_0 - \alpha_2)$$

$$v_3 = -\delta x - \delta y + (200 - x_0 - y_0 - \alpha_3)$$

Dengeleme Hesabı/Giriş/*Düzeltilme Denklemleri*

$$\begin{aligned}v_1 &= \delta x + (x_0 - \alpha_1) \\v_2 &= \delta y + (y_0 - \alpha_2) \\v_3 &= -\delta x - \delta y + (200 - x_0 - y_0 - \alpha_3)\end{aligned}$$

$$\begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \delta x \\ \delta y \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} (\alpha_1 - x_0) \\ (\alpha_2 - y_0) \\ (\alpha_3 - (200 - x_0 - y_0)) \end{bmatrix}$$

Düzeltilme vektörü

v

Katsayılar Matrisi

A

Küçültülmüş Bilinmeyenler Vektörü

x

Küçültülmüş Ölçüler Vektörü

l

Düzeltilme Denklemleri

$$\mathbf{v} = \mathbf{Ax} - \mathbf{l}$$

Dengeleme Hesabı/Giriş/*Dengelemenin Matematiksel Modeli*

Düzeltilme Denklemleri: **Fonksiyonel Model**

$$\mathbf{v} = \mathbf{Ax} - \mathbf{l}$$

Ölçülerin Ağırlık Matrisi: **Stokastik Model**

$$\mathbf{P} = \sigma_0^2 \mathbf{C}_{ll}^{-1}$$

Dengelemenin Matematiksel Modeli

Dengeleme Hesabı/Giriş/*Normal Denklemler*

EKK Temel İlkesi

$$\mathbf{v}^T \mathbf{P} \mathbf{v} \rightarrow \min.$$

(Minimum yapan $\mathbf{x}$ 'in bulunması problemi)

$$\frac{\partial \mathbf{v}^T \mathbf{P} \mathbf{v}}{\partial \mathbf{x}^T} = \mathbf{0}$$

Normal Denklemler

$$\mathbf{N} \mathbf{x} - \mathbf{n} = \mathbf{0}$$

Normal Denklemler Katsayılar Matrisi ($u \times u$)

$$\mathbf{N} = \mathbf{A}^T \mathbf{P} \mathbf{A}$$

Yalın Terim Vektörü ($u \times 1$)

$$\mathbf{n} = \mathbf{A}^T \mathbf{P} \mathbf{l}$$

Dengeleme Hesabı/Giriş/*Normal Denklemlerin Çözümü*

$$\mathbf{N}\mathbf{x} - \mathbf{n} = \mathbf{0}$$

$\mathbf{N}$ her zaman simetrik ve kare matristir; $\det(\mathbf{N}) \neq 0$

Normal Denklemlerin Çözümü

$$\mathbf{N}^{-1}\mathbf{N}\mathbf{x} = \mathbf{N}^{-1}\mathbf{n}$$

$$\mathbf{N}^{-1} = \mathbf{Q}_{xx}$$

$\mathbf{N}$ 'nin tersi, bilinmeyenlerin kofaktör matrisine eşittir.

(İspatı için bkz. →)

$$\mathbf{x} = \mathbf{Q}_{xx}\mathbf{n}$$

Küçültülmüş Bilinmeyenler Vektörü

Dengeleme Hesabı/Giriş/ Q_{xx} (İspat)

$$\boxed{\mathbf{N}\mathbf{x} - \mathbf{n} = \mathbf{0}} \rightarrow \mathbf{x} = \mathbf{N}^{-1}\mathbf{n} = \mathbf{N}^{-1}\mathbf{A}^T\mathbf{P}\mathbf{l}$$

Kofaktör yayılma kuralı

$$\mathbf{Q}_{xx} = (\mathbf{N}^{-1}\mathbf{A}^T\mathbf{P})\mathbf{Q}_{ll}(\mathbf{P}\mathbf{A}\mathbf{N}^{-1})$$

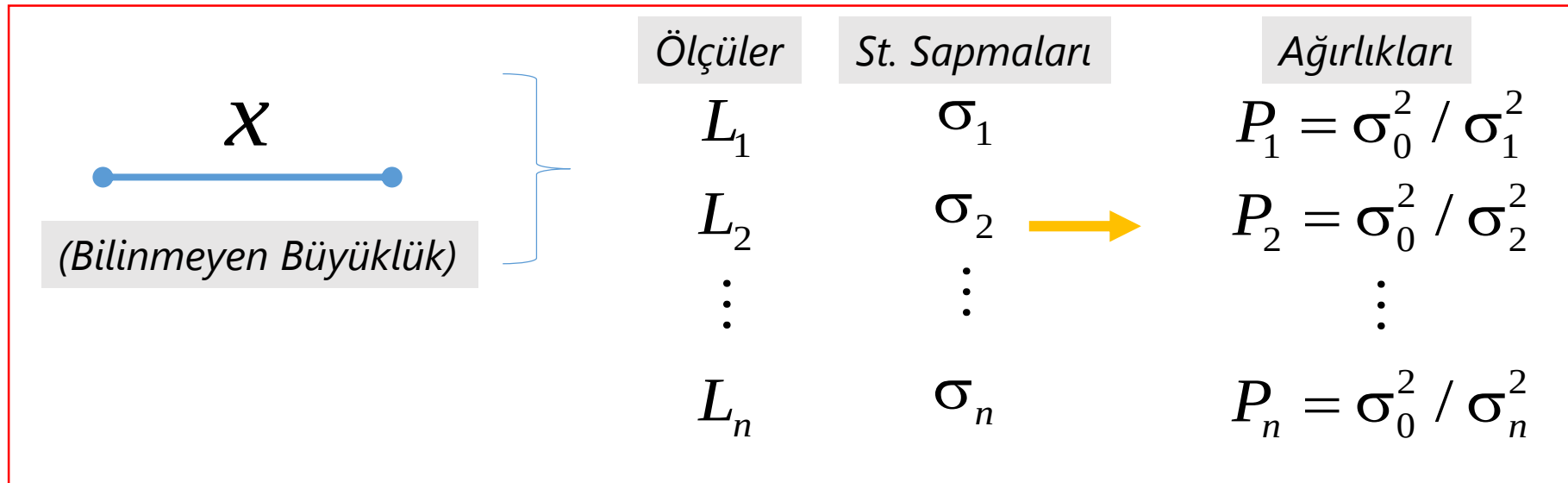
$$\mathbf{P} = \mathbf{Q}_{ll}^{-1} \rightarrow \mathbf{Q}_{ll} = \mathbf{P}^{-1}$$

$$\mathbf{Q}_{xx} = \mathbf{N}^{-1}\mathbf{A}^T\mathbf{P}\mathbf{A}\mathbf{N}^{-1} = \mathbf{N}^{-1}\mathbf{N}\mathbf{N}^{-1} = \mathbf{N}^{-1} \quad \checkmark$$

Dengeleme Hesabı/*Dolaysız Ölçüler Dengelemesi*

- Normal denklemleri -açık biçimde- oluşturmaksızın bilinmeyenlerin doğrudan elde edildiği dengeleme işlemine **dolaysız ölçüler dengelemesi** adı verilir.
- Dolaysız ölçüler dengelemesi belli problemler için uygulanabilir.
- Örneğin, bir büyüklüğün FARKLI KOŞULLARDA ölçülmesi sonucunda elde edilen ölçülerden o büyüklüğün en uygun değerinin bulunması **dolaysız ölçüler dengelemesi** ile gerçekleştirilebilir.

Dengeleme Hesabı/*Dolaysız Ölçüler Dengelemesi*



Temel Eşitlikler

$$L_1 + v_1 = X$$

$$L_2 + v_2 = X$$

$$\vdots$$

$$L_n + v_n = X$$

$$\longrightarrow X = X_0 + \delta X \longrightarrow$$

Genellikle, en küçük ölçü
(ya da bunun 1 hane yuvarlatılmış değeri)
yaklaşık değer olarak
alınır!

Düzeltilme Denklemleri

$$v_1 = \delta X - (L_1 - X_0)$$

$$v_2 = \delta X - (L_2 - X_0)$$

$$\vdots$$

$$v_n = \delta X - (L_n - X_0)$$

Dengeleme Hesabı/*Dolaysız Ölçüler Dengelemesi*

$$\begin{aligned} v_1 &= \delta x - (L_1 - x_0) \\ v_2 &= \delta x - (L_2 - x_0) \\ &\vdots \\ v_n &= \delta x - (L_n - x_0) \end{aligned} \quad \longrightarrow \quad \mathbf{v} = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_n \end{bmatrix}, \mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix}, \mathbf{l} = \begin{bmatrix} l_1 \\ l_2 \\ \vdots \\ l_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} L_1 - x_0 \\ L_2 - x_0 \\ \vdots \\ L_n - x_0 \end{bmatrix}$$

Dengelemenin Matematiksel Modeli

$$\mathbf{v} = \mathbf{A}\delta x - \mathbf{l}$$

$$\mathbf{P} = \text{diag}(P_1, P_2, \dots, P_n)$$

Dengeleme Hesabı/*Dolaysız Ölçüler Dengelemesi*

		$\mathbf{P} = \begin{bmatrix} P_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & P_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & P_n \end{bmatrix}$	$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix}$
$\mathbf{N} = \mathbf{A}^T \mathbf{P} \mathbf{A} \longrightarrow$	$\mathbf{A}^T = [1 \quad 1 \quad \cdots \quad 1]$	$\mathbf{A}^T \mathbf{P} = [P_1 \quad P_2 \quad \cdots \quad P_n]$	$\mathbf{A}^T \mathbf{P} \mathbf{A} = \left(\sum_{i=1}^n P_i \right) = [P] \quad \checkmark$
			$\mathbf{l} = \begin{bmatrix} l_1 \\ l_2 \\ \vdots \\ l_n \end{bmatrix}$
$\mathbf{n} = \mathbf{A}^T \mathbf{P} \mathbf{l} \longrightarrow$		$\mathbf{A}^T \mathbf{P} = [P_1 \quad P_2 \quad \cdots \quad P_n]$	$\mathbf{A}^T \mathbf{P} \mathbf{l} = \left(\sum_{i=1}^n P_i l_i \right) = [Pl] \quad \checkmark$

Dengeleme Hesabı/*Dolaysız Ölçüler Dengelemesi*

Normal Denklem

$$\mathbf{N}\delta x - \mathbf{n} = 0 \rightarrow [P]\delta x - [Pl] = 0$$



$$Q_{xx} = \mathbf{N}^{-1} = \frac{1}{[P]}$$

Bilinmeyen Ağırlık Katsayısı



$$\delta x = \frac{[Pl]}{[P]}$$

Küçültülmüş Bilinmeyen



$$x = x_0 + \delta x = x_0 + \frac{[Pl]}{[P]}$$

Bilinmeyen (=En uygun değer)



Bu en uygun değere, **GENEL ARİTMETİK ORTALAMA** adı da verilir; çünkü, ölçü ağırlıkları eşitse (P'ler 1 ise) söz konusu eşitlik aritmetik ortalamaya döner.

Bir büyüklüğe ilişkin ağırlıkları farklı olan ölçülerden en uygun değer, GENEL ARİTMETİK ORTALAMA biçiminde hesaplanır.

Dengeleme Hesabı/*Dolaysız Ölçüler Dengelemesi-Hata Hesabı*

δx hesaplandıktan sonra düzeltmeler hesaplanır:

$$v_i = \delta x - l_i \quad (i=1, 2, \dots, n)$$



Düzeltilmelerin Ağırlıklı Kareleri Toplamı

$$\mathbf{v}^T \mathbf{P} \mathbf{v} = [P_{vv}] = P_1 v_1^2 + \dots + P_n v_n^2$$



Birim Ağırlıklı Ölçünün Standart Sapması

$$s_0 = \sqrt{\frac{[P_{vv}]}{n-1}}$$

$$f = n - u = n - 1 \quad \text{Serbestlik Derecesi}$$

Hesap Kontrolü

$$[P_{vv}] = 0$$

$$[P_{vv}] = [Pl] - [Pl]\delta x$$

İspat:

$$\begin{aligned} \mathbf{v} &= \mathbf{A}\delta x - \mathbf{l} \rightarrow \\ (\mathbf{A}^T \mathbf{P}) \mathbf{v} &= (\mathbf{A}^T \mathbf{P}) \mathbf{A} \delta x - (\mathbf{A}^T \mathbf{P}) \mathbf{l} \\ [P_{vv}] &= 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathbf{v} &= \mathbf{A}\delta x - \mathbf{l} \rightarrow \mathbf{v}^T = \mathbf{A}^T \delta x - \mathbf{l}^T \\ \mathbf{v}^T \mathbf{P} \mathbf{v} &= (\mathbf{A}^T \mathbf{P} \delta x - \mathbf{l}^T \mathbf{P})(\mathbf{A} \delta x - \mathbf{l}) \\ [P_{vv}] &= \mathbf{l}^T \mathbf{P} \mathbf{l} - \mathbf{l}^T \mathbf{P} \mathbf{A} \delta x \\ &= [Pl] - [Pl]\delta x \end{aligned}$$

Dengeleme Hesabı/*Dolaysız Ölçüler Dengelemesi-Hata Hesabı*

Bilinmeyen (Genel Aritmetik Ortalamanın) Standart Sapması

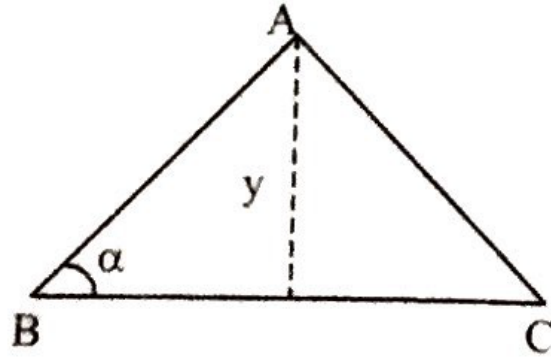
$$s_x = s_0 \sqrt{Q_{xx}} = \frac{s_0}{\sqrt{[P]}}$$

Ölçülerin ağırlıkları eşitse, $[P]=n$ olur. Bu durumda, s_0 , bir ölçünün standart sapmasına, s_x ise aritmetik ortalamanın standart sapmasına döner. Karşılaştırma için «sonlu ölçü dizileri yardımıyla standart sapma hesabı» bölümüne bakınız.



Örnek-1: *Dolaysız Ölçüler Dengelemesi (Demirel 2009)*

Örnek-1: Şekildeki üçgenin AB kenarı için üç ölçü değeri (L_i) ve standart sapmaları (σ_i) ile α açısı ve standart sapması (σ_α) aşağıda verilmektedir.



i	L_i (m)	σ_i (cm)
1	176.842	2.0
2	.866	2.5
3	.874	1.0

$$\alpha = 56.7248 \text{ gon} , \sigma_\alpha = 1.8 \text{ mgon}$$

y yüksekliğini ve standart sapmasını bulunuz.

Örnek-1: *Dolaysız Ölçüler Dengelemesi (Demirel 2009)*

Çözüm:

$$l_i = L_i - x_0$$

$$\sigma_0 = 2 \text{ cm}$$

$$v_i = \delta x - l_i$$

i	L_i (m)	l_i (cm)	P_i	v_i (cm)
1	176.842	0.2	1	2.54
2	.866	2.6	0.64	0.14
3	.874	3.4	4.00	-0.66
	Σ		5.64	

Genellikle, en küçük ölçü (ya da bunun 1 hane yuvarlatılmış değeri) yaklaşık değer olarak alınır!

$$x_0 = 176.840 \text{ m}, \quad \delta x = 15.46 / 5.64 = 2.74 \text{ cm} \quad \delta x = [Pl] / [P]$$

$$[Pv] = -0.01 \text{ cm}, \quad [Pvv] = 8.20 \quad [Pvv] = [Pll] - [Pl] \delta x = 50.61 - (15.46)(2.74) = 8.25 \text{ cm}^2$$

Hesap Kontrolü-1

Hesap Kontrolü-2

Örnek-1: *Dolaysız Ölçüler Dengelemesi (Demirel 2009)*

$$x = x_0 + \delta x = 176,867 \text{ m}$$

Bilinmeyen (=En uygun değer); genel aritmetik ortalama

$$s_0 = \sqrt{\frac{[Pvv]}{n-1}} = 2,02 \text{ cm}$$

Birim ağırlıklı ölçünün standart sapması

$$s_x = s_0 \sqrt{Q_{xx}} = \frac{s_0}{\sqrt{[P]}} = 0,85 \text{ cm}$$

Bilinmeyen standart sapması

Varyans yayılma kuralı:

$$y = x \sin \alpha = 137.553 \text{ m}, \quad s_y^2 = (\sin \alpha)^2 s_x^2 + (x \cos \alpha)^2 \frac{s_\alpha^2}{\rho^2} = 0.54 \text{ cm}^2, \quad s_y = 0.73 \text{ cm}$$



Örnek-2: *Dolaysız Ölçüler Dengelemesi (Demirel 2009)*

Örnek-2: A noktasının yüksekliğini belirlemek için h_1 ve h_2 yükseklik farkları geometrik nivelman ve h_3 yükseklik farkı trigonometrik nivelman yöntemiyle ölçülmüştür. Ölçüler ve nivelman yol uzunlukları (S_i) aşağıda verilmektedir:

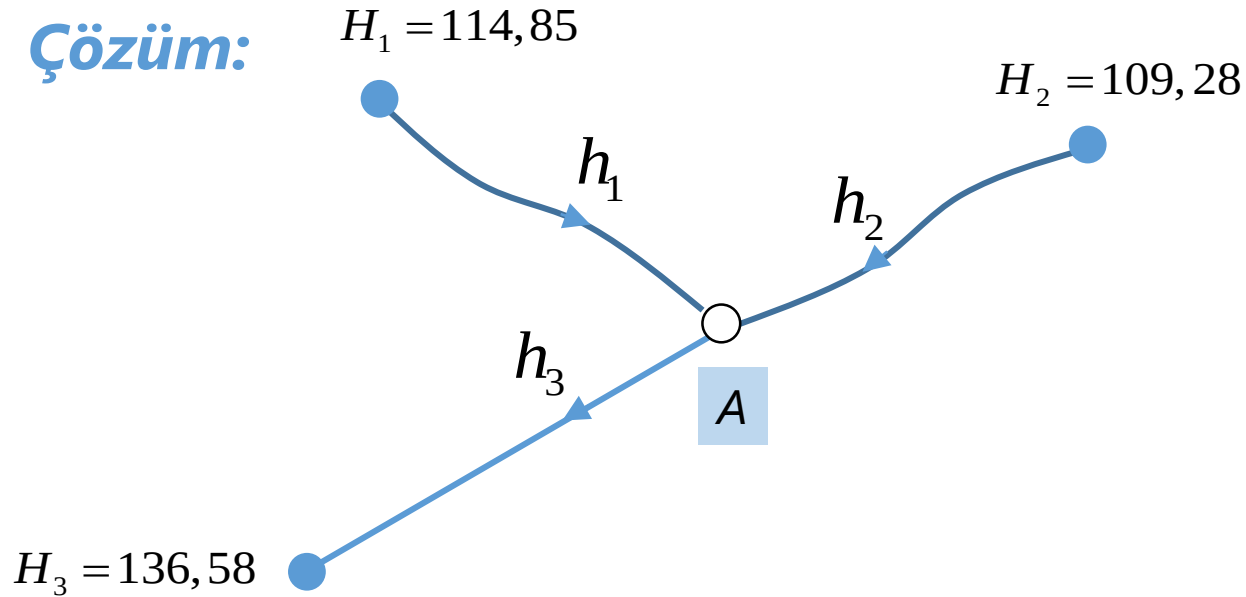
i	h_i (m)	S_i (km)
1	5.17	4.7
2	10.68	5.3
3	16.45	2.8

1 km'lik geometrik nivelman yolu için standart sapma 1 cm ve 1 km'lik trigonometrik nivelman uzaklığı için 2'cm dir. 1, 2 ve 3 noktalarının yükseklikleri; $H_1 = 114.85$ m, $H_2 = 109.28$ m, $H_3 = 136.58$ m hatasız verilmektedir.

A noktasının dengeli H_A yüksekliğini ve standart sapmasını bulunuz.

Örnek-2: *Dolaysız Ölçüler Dengelemesi (Demirel 2009)*

Çözüm:



$$H_{A,1} = H_1 + h_1 = 120,02 \text{ m}$$

$$H_{A,2} = H_2 + h_2 = 119,96 \text{ m}$$

$$H_{A,3} = H_3 - h_3 = 120,13 \text{ m}$$



Yükseklikler hatasız olduğu için

$$\frac{\sigma_0^2}{\sigma_i^2} = \frac{S_{0(km)}}{S_{i(km)}}$$

GEOMETRİK NİV.

$$\frac{\sigma_0^2}{\sigma_i^2} = \frac{S_{0(km^2)}}{S_{i(km^2)}^2}$$

TRİGONOMETRİK NİV.

$$\sigma_{A,1}^2 = \sigma_1^2 = (\sigma_0^2 / S_0) S_1 = (1 / 1) \times 4,7 = 4,7 \text{ cm}^2$$

$$\sigma_{A,2}^2 = \sigma_2^2 = (\sigma_0^2 / S_0) S_2 = (1 / 1) \times 5,3 = 5,3 \text{ cm}^2$$

$$\sigma_{A,3}^2 = \sigma_3^2 = (\sigma_0^2 / S_0^2) S_3^2 = (4 / 1) \times 2,8^2 = 31,36 \text{ cm}^2$$

Örnek-2: *Dolaysız Ölçüler Dengelemesi (Demirel 2009)*

Çözüm:

$$\sigma_0^2 = 4,7 \text{ cm}^2$$

$$l_i = H_{A,i} - x_0$$

$$v_i = \delta x - l_i$$

i	$H_{A,i}$ (m)	P_i	l_i (cm)	v_i (cm)
1	120.02	1	6	-1.81
2	119.96	0.89	0	4.19
3	120.13	0.15	17	-12.89
Σ		2.04		

$$x_0 = H_{A,2} = 119,96 \text{ m}$$

$$\delta x = \frac{[Pl]}{[P]} = \frac{8.55}{2.04} = 4.19 \text{ cm}$$

$$[Pv] = -0.01 \text{ cm}, [Pvv] = 43.82, [Pvv] = [Pll] - [Pl] \delta x = 79.35 - (8.55)(4.19) = 43.52 \text{ cm}^2$$

Örnek-2: *Dolaysız Ölçüler Dengelemesi (Demirel 2009)*

$$H_A = x = x_0 + \delta x = 120.002 \text{ m} , s_{H_A} = s_x = \sqrt{\frac{[P_{vv}]}{(n-1)[P]}} = \sqrt{\frac{43.82}{(3-1)(2.04)}} = 3.3 \text{ cm}$$

A noktasının en uygun yüksekliği
(dengeli yüksekliği)

Standart sapması

Ders duyuruları, soru ve görüşleriniz için:



Prof. Dr. Uğur DOĞAN

<https://avesis.yildiz.edu.tr/dogan>

dogan@yildiz.edu.tr



Prof. Dr. Cüneyt AYDIN

<https://avesis.yildiz.edu.tr/caydin>

caydin@yildiz.edu.tr; caydin78@gmail.com



Dr. Öğretim Üyesi Deniz ÖZ DEMİR

<https://avesis.yildiz.edu.tr/denizoz>

denizoz@yildiz.edu.tr

