



Dengeleme Hesabı-Uygulamalar

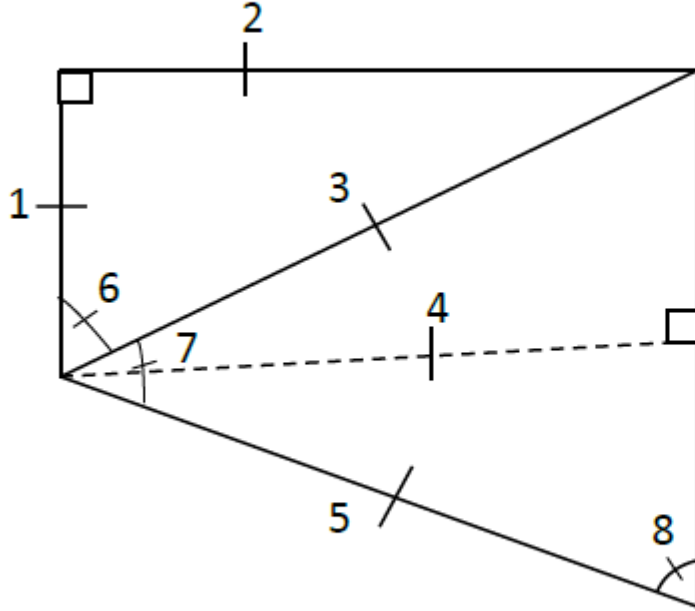
Prof. Dr. U. DOĞAN , Prof. Dr. C. AYDIN, Dr. Öğr . Üyesi D. ÖZ DEMİR

YTÜ-Harita Mühendisliği Bölümü, Jeodezi Anabilim Dalı
İstanbul, Kasım 2020

Uygulama-1: (2018-Sınav Sorusu)

Uygulama-1:

Şekildeki dörtgen, bir dik üçgen ile ona bitişik bir ikizkenar üçgenden oluşmaktadır. Ölçüler (L_i) ve standart sapmaları (σ_i) aşağıda verilmektedir.



i	L_i	σ_i
1	178,312 m	1,0 cm
2	226,980 m	1,4 cm
3	288,630 m	1,6 cm
4	242,765 m	1,4 cm
5	288,637 m	1,6 cm
6	57,6066 gon	1,8 mgon
7	72,7586 gon	1,6 mgon
8	63,6216 gon	2,0 mgon

$V=Ax-l$ düzeltme denklemlerini ve P ağırlık matrisini oluşturunuz ($\sigma_0 = 1,0$ cm)



Uygulama-1:

Çözüm: $n=8$; $u=3$; $f=n-u$; $f=8-3=5 > 0$ dengeleme vardır. ✓

$x \rightarrow L_3$; $y \rightarrow L_6$ ve $z \rightarrow L_8$ olsun.

$x_0 = 288,630$ m ; $y_0 = 57,6066$ gon ve $z_0 = 63,6216$ gon olsun.

$$L_1 + V_1 = x \cos y$$

$$L_2 + V_2 = x \sin y$$

$$L_3 + V_3 = x$$

$$L_4 + V_4 = x \sin z$$

$$L_5 + V_5 = x$$

$$L_6 + V_6 = y$$

$$L_7 + V_7 = 200 - 2z$$

$$L_8 + V_8 = z$$

$$V_1 = \cos y_0 \delta x - \frac{x_0 \sin y_0}{\rho} \delta y + (x_0 \cos y_0 - L_1)$$

$$V_2 = \sin y_0 \delta x + \frac{x_0 \cos y_0}{\rho} \delta y + (x_0 \sin y_0 - L_2)$$

$$V_3 = \delta x + (x_0 - L_3)$$

$$V_4 = \sin z_0 \delta x + \frac{x_0 \cos z_0}{\rho} \delta z + (x_0 \sin z_0 - L_4)$$

$$V_5 = \delta x$$

$$V_6 = + \delta y + (y_0 - L_6)$$

$$V_7 = -2 \delta z + (200 - 2z_0 - L_7)$$

$$V_8 = + \delta z + (z_0 - L_8)$$



Uygulama-1:

Çözüm:

Açılar $\rightarrow$ mgon ; Uzunluklar $\rightarrow$ cm ; $\rho=2000/\pi$ ve $\sigma_0^2 = 1 \text{ cm}^2$

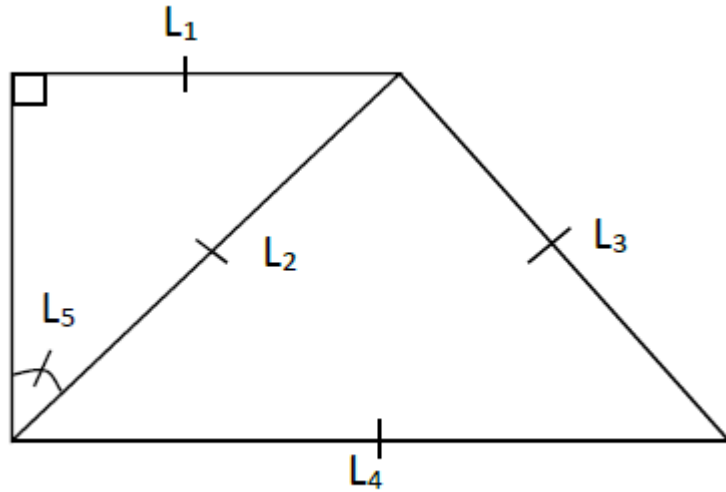
$$A = \begin{bmatrix} 0,6178 & -0,3565 & 0 \\ 0,7864 & 0,2801 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0,8411 & 0 & 0,2452 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} ; -I = \begin{bmatrix} -0,2709 \\ -1,5083 \\ 0 \\ 0,9813 \\ -0,7000 \\ 0 \\ -0,1800 \\ 0 \end{bmatrix} \text{ cm} ; x = \begin{bmatrix} \delta x \\ \delta y \\ \delta z \end{bmatrix}$$

$$P = \text{diag}(1 \ 0,5102 \ 0,3906 \ 0,5102 \ 0,3906 \ 0,3086 \ 0,3906 \ 0,2500)$$



Uygulama-2: (2018-Sınav Sorusu)

Uygulama-2: Bir dik üçgen ve bir eşkenar üçgenden oluşan şekilde işaretli elemanlar ölçülmüştür:



i	L_i	σ_{L_i}
1	210,240 m	1+10 ppm
2	740,218 m	1+10 ppm
3	740,231 m	1+10 ppm
4	740,210 m	1+10 ppm
5	18,3362 gon	8 cc

($\sigma_0^2 = \sigma_{L1}^2$ olarak alınacaktır.)

- Serbestlik derecesini belirleyiniz.
- Bilinmeyenleri ve standart sapmalarını bulunuz.
- Dengeli ölçüleri ve standart sapmalarını hesaplayınız.
- Dengelemenin denetimini yapınız.



Uygulama-2:

Çözüm:

a)

$n=5$; $u=2$; $f=n-u$; $f=5-2=3 > 0$ dengeleme vardır. ✓

b)

$x \rightarrow L_1$; $y \rightarrow L_2$ olsun.

$x_0 = 210,240$ m ve $y_0 = 740,218$ m

$\sigma_{L1}=3,1024$ mm, $\sigma_{L2}=8,4022$ mm, $\sigma_{L3}=8,4023$ mm, $\sigma_{L4}=8,4021$ mm, $\sigma_{L5}=8$ cc

Uzunluklar $\rightarrow$ mm, Açılar $\rightarrow$ cc

$\mathbf{x}=[x \ y]^T$ $\sigma_0^2 = \sigma_{L1}^2 = 3,1024 \text{ mm}^2$

$$L_1 + V_1 = x$$

$$L_2 + V_2 = y$$

$$L_3 + V_3 = y$$

$$L_4 + V_4 = y$$

$$L_5 + V_5 = \arcsin(x/y);$$

$$V_1 = \delta x + (x_0 - L_1)$$

$$V_2 = \delta y + (y_0 - L_2)$$

$$V_3 = \delta y + (y_0 - L_3)$$

$$V_4 = \delta y + (y_0 - L_4)$$

$$V_5 = \frac{1}{\sqrt{y_0^2 - x_0^2}} \rho \delta x - \frac{x_0}{y_0 \sqrt{y_0^2 - x_0^2}} \rho \delta y + (\arcsin \frac{x_0}{y_0} - L_5)$$



Uygulama-2:

Çözüm:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 1 \\ 0 & 1 \\ 0,8970 & -0,2548 \end{bmatrix}; l = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 13 \\ -8 \\ 22,6304 \end{bmatrix}; P = \text{diag}(1, 0,1363, 0,1363, 0,1363, 0,1504)$$

$$N = \begin{bmatrix} 1,1210 & -0,0344 \\ \text{sim.} & 0,4187 \end{bmatrix}; n = \begin{bmatrix} 3,0530 \\ -0,1857 \end{bmatrix}; Q_{xx} = \begin{bmatrix} 0,8943 & 0,0734 \\ \text{sim.} & 2,3946 \end{bmatrix}; x = \begin{bmatrix} 2,7167 \\ -0,2206 \end{bmatrix} \begin{matrix} \delta x \\ \delta y \end{matrix}$$

$$x = x_0 + \delta x / 1000 = 210,24272 \text{ m ve } y = y_0 + \delta y / 1000 = 740,21778 \text{ m}$$

$$v = [2,7167 \quad -0,2206 \quad -13,2206 \quad 7,7794 \quad -20,1373]^T; [PVV] = 100,4478 \text{ mm}^2$$

$$s_0 = \sqrt{\frac{[PVV]}{f}} = 5,7864 \text{ mm}; s_x = 5,4721 \text{ mm}; s_y = 8,9542 \text{ mm} \quad \checkmark$$



Uygulama-2:

Çözüm:

c) Dengeli ölçüler ve standart sapması

i	$\bar{L}_i$	$\bar{Q}_{l_i}$	σ_{Li}
1	210,24272 m	0,8943	5,4721 mm
2	740,21778 m	2,3946	8,9542 mm
3	740,21778 m	2,3946	8,9542 mm
4	740,21778 m	2,3946	8,9542 mm
5	18,334186 gon	0,8415	5,3081 cc



d) Dengelemenin ana denetimi

i	$\bar{L}_i (L_i + V_i)$	Bilinmeyenlerin fonk.		
1	210,24272 m	210,24272 m	→	(x)
2	740,21778 m	740,21778 m	→	(y)
3	740,21778 m	740,21778 m	→	(y)
4	740,21778 m	740,21778 m	→	(y)
5	18,334186 gon	18,334186 gon	→	arcsin(x/y)



Uygulama-3: (2019-Sınav Sorusu)

Uygulama-3:

Ölçü sayısı 14 olan bir dengeleme ödevine ilişkin normal denklemler aşağıda verilmektedir.

$$9,0000\delta x - 4,5000\delta y - 2,5000\delta z - 7,5000 = 0$$

$$-4,5000\delta x + 10,5000\delta y + 0,0000\delta z + 12,0000 = 0$$

$$-2,5000\delta x + 0,0000\delta y + 3,5000\delta z + 7,5000 = 0$$

$$[PII] = 46,5000 \text{ mm}^2$$

Bilinmeyenlerin standart sapmalarını bulunuz.



Uygulama-3:

Çözüm:

$$\mathbf{N} = \begin{bmatrix} 9 & -4,5 & -2,5 \\ -4,5 & 10,5 & 0 \\ -2,5 & 0 & 3,5 \end{bmatrix} \quad \mathbf{n} = \begin{bmatrix} 7,5000 \\ -12,000 \\ -7,5000 \end{bmatrix} \quad \mathbf{Q}_{xx} = \begin{bmatrix} 0,1892 & 0,0811 & 0,1351 \\ & 0,1300 & 0,0579 \\ \text{sim.} & & 0,3822 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} -0,5676 \\ -1,3861 \\ -2,5483 \end{bmatrix} \quad [\mathbf{PVV}] = [\mathbf{PII}] - \mathbf{n}^T \mathbf{x} = 46,500 - 31,4884 = 15,0116 \text{ mm}^2$$

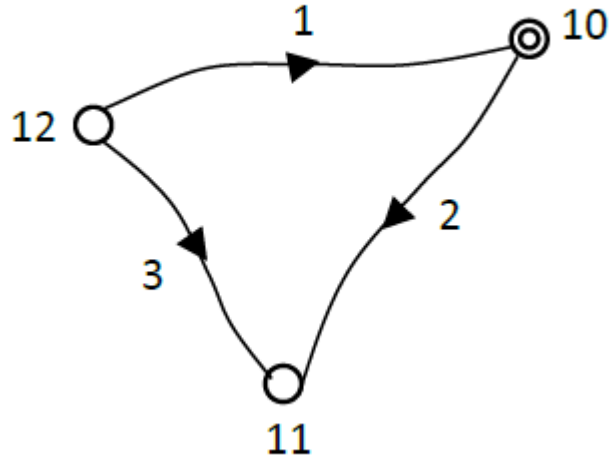
$$n = 14 \text{ ölçü } u = 3 \text{ bilinmeyen } f = n - u = 14 - 3 = 11$$

$$s_0 = \sqrt{\frac{\mathbf{PVV}}{f}} = 1,1682 \text{ mm} ; s_x = s_0^* \sqrt{\mathbf{Q}_{xx}(1,1)} = 0,5081 \text{ mm} \quad s_y = 0,4212 \text{ mm} \quad s_z = 0,7222 \text{ mm} \quad \checkmark$$

Uygulama-4: (2019-Sınav Sorusu)

Uygulama-4:

Şekildeki geometrik nivelman ağına ilişkin yükseklik farkı ölçüleri h_i ($i=1,2,3$) ve nivelman yol uzunlukları (S_i) aşağıda verilmektedir.



i	h_i (m)	S_i (m)
1	3,235	500
2	2,468	425
3	5,714	250

$H_{10} = 500,000$ m (Sabit)

$S_0 = 1$ km

- Bilinmeyen noktaların dengeli yüksekliklerini ve standart sapmalarını bulunuz.
- Dengelemenin denetimini yapınız.



Uygulama-4:

Çözüm:

a) $f = n - u = 3 - 2 = 1 > 0$ dengeleme vardır. ✓

Yaklaşık yükseklik hesabı :

$$h_2 = H_{11} - H_{10} \rightarrow H_{11,0} = H_{10} + h_2 = 500,000 + 2,468 = 502,468 \text{ m}$$

$$H_{11} = H_{11,0} + \delta H_{11}$$

$$h_1 = H_{10} - H_{12} \rightarrow H_{12,0} = H_{10} - h_1 = 500,000 - 3,235 = 496,765 \text{ m}$$

$$H_{12} = H_{12,0} + \delta H_{12}$$

Düzeltilme denklemlerinin oluşturulması :

$$h_1 + v_1 = H_{10} - H_{12}$$

$$h_2 + v_2 = H_{11} - H_{10}$$

$$h_3 + v_3 = H_{11} - H_{12}$$

$$v_1 = -\delta_{H12} + (H_{10} - H_{12,0} - h_1)$$

$$v_2 = \delta_{H11} + (H_{11,0} - H_{10} - h_2)$$

$$v_3 = \delta_{H11} - \delta_{H12} + (H_{11,0} - H_{12,0} - h_3)$$



Uygulama-4:

Çözüm: Ağırlık hesabı :

$$\begin{array}{l} P = S_0 / S_i \rightarrow P_1 = 1/0,5 = 2,0000 \\ P_2 = 1/0,425 = 2,3529 \\ P_3 = 1/0,250 = 4,0000 \end{array} \left. \vphantom{\begin{array}{l} P \\ P_2 \\ P_3 \end{array}} \right\} P = \text{diag} (2,0000 \ 2,3529 \ 4,0000)$$

$$A = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}; I = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 11 \end{bmatrix} \text{ mm}; N = \begin{bmatrix} 6,3529 & -4 \\ -4 & 6 \end{bmatrix}; n = \begin{bmatrix} 44 \\ -44 \end{bmatrix}; Q_{xx} = \begin{bmatrix} 0,2713 & 0,1809 \\ 0,1809 & 0,2872 \end{bmatrix}$$

$$x = \begin{bmatrix} 3,9788 \\ -4,6808 \end{bmatrix}; v^T = [4,6808 \ 3,9788 \ -2,3404]$$

$$[PVV] = 102,9781 \text{ mm}^2; [PVV]_{\text{kontrol}} = 102,9781 \text{ mm}^2; s_0 = \sqrt{\frac{102,9781}{1}} = 10,1478 \text{ mm}$$



Uygulama-4:

Çözüm: Dengeli yükseklikler ve standart sapmaları :

$$H_{11} = H_{11,0} + \delta H_{11} = 502,468 + (3,9788/1000) = 502,47197 \text{ m}$$

$$H_{12} = H_{12,0} + \delta H_{12} = 496,765 + (-4,6808/1000) = 496,76032 \text{ m}$$

$$S_{H11} = s_0 * \sqrt{0,2713} = 5,29 \text{ mm}$$

$$S_{H12} = s_0 * \sqrt{0,2872} = 5,44 \text{ mm} \quad \checkmark$$

b) Dengelemenin ana denetimi :

Ölçü + Düzeltmesi	Bilinmeyenlerin Fonksiyonu
$h_1 + v_1 = 3,235 + 4,6808/1000 = 3,23968$	$H_{10} - H_{12} = 500,000 - 496,76032 = 3,23968$
$h_2 + v_2 = 2,468 + 3,9788/1000 = 2,47198$	$H_{11} - H_{10} = 502,47197 - 500,000 = 2,47197$
$h_3 + v_3 = 5,714 - 2,3404/1000 = 5,71166$	$H_{11} - H_{12} = 502,47197 - 496,76032 = 5,71165$



Ders duyuruları, soru ve görüşleriniz için:



Prof. Dr. Uğur DOĞAN

<https://avesis.yildiz.edu.tr/dogan>

dogan@yildiz.edu.tr



Prof. Dr. Cüneyt AYDIN

<https://avesis.yildiz.edu.tr/caydin>

caydin@yildiz.edu.tr; caydin78@gmail.com



Dr. Öğretim Üyesi Deniz ÖZ DEMİR

<https://avesis.yildiz.edu.tr/denizoz>

denizoz@yildiz.edu.tr

