

Örnek: $x^2 y'' - 4xy' + 4y = 0$ Dif. Denkleminin
Çözümünü $y(2)=4$ ve $y'(2)=-1$ ise bulunuz.

Çözüm:

Örnek: $(3x+1)^2 y'' - 2(3x+1)y' + 6y = [\ln(3x+1)]^2$

Dif. Denklemini Çözünüz.

Çözüm:

Örnek:

$$y^{(5)} + 9y^{(3)} = x^2 + 3x + e^{-3x} + 7\cos 2x + \sin 3x + \sin 2x + 2e^x + 1$$

$$y^{(5)} + 9y^{(3)} = 0$$

$$r^5 + 9r^3 = 0$$

$$r^3(r^2 + 9) = 0 \quad r_{1,2,3} = 0, \quad r_{4,5} = \pm 3i$$

$$T = \{1, x, x^2, \cos 3x, \sin 3x\}$$

$$y_H = C_1 + C_2 x + C_3 x^2 + C_4 \cos 3x + C_5 \sin 3x$$

$$y_p = (a_1 x^2 + a_2 x + a_3) x^3 + b_1 e^{-3x} + b_2 e^x + d_1 \cos 2x + d_2 \sin 2x + (d_3 \cos 3x + d_4 \sin 3x) x$$

Örnek:

$$y^{(4)} - y^{(2)} = 2 + 7e^x + \sin x + e^{-2x} + (x+1)e^{3x}$$

$$y^{(4)} - y^{(2)} = 0$$

$$r^4 - r^2 = 0$$

$$r^2(r^2 - 1) = 0$$

$$r_{1,2} = 0, \quad r_3 = -1, \quad r_4 = 1$$

$$y_H = C_1 + C_2 x + C_3 e^{-x} + C_4 e^x$$

$$y_p = ax^2 + bxe^x + ce^{-2x} + d\cos x + e\sin x + (fx+g)x^2 e^{3x}$$

SABİTİN DEĞİŞİMİ YÖNTEMİ
(Parametrelerin Değişimi Yöntemi)

$$ay'' + by' + cy = f(x)$$

$ay'' + by' + cy = 0$ Homojen Dif. Denkleminin genel çözümünü bulunur.

$CK = \{y_1, y_2\}$ olsun. (Temel çözüm kümesi)

Homojen Dif. Denklemin genel çözümü :

$$\boxed{y = C_1 y_1 + C_2 y_2} \text{ olur. } \begin{aligned} C_1 &= C_1(x) = ? \\ C_2 &= C_2(x) = ? \end{aligned}$$

$$y' = \underbrace{C_1' y_1 + C_2' y_2}_{=0 \text{ (Kabul edilir)}} + C_1 y_1' + C_2 y_2'$$

$$y'' = C_1' y_1' + C_2' y_2' + C_1 y_1'' + C_2 y_2''$$

$$a[C_1' y_1' + C_2' y_2' + C_1 y_1'' + C_2 y_2''] + b[C_1 y_1' + C_2 y_2'] + c[C_1 y_1 + C_2 y_2] = f(x)$$

olur. Dörtlerirse ;

$$C_1' y_1' + C_2' y_2' = \frac{f(x)}{a}$$

olur.

$$\left. \begin{array}{l} (1) \quad C_1' y_1 + C_2' y_2 = 0 \\ (2) \quad C_1' y_1' + C_2' y_2' = \frac{f(x)}{a} \end{array} \right\} \text{Sistemi elde edilir.}$$

Bu sistem çözülerek C_1' ve C_2' bulunur.
Sonrada integral alınarak ;

$$C_1 = F(x) + K_1 \quad \text{ve} \quad C_2 = G(x) + K_2$$

şeklinde C_1 ve C_2 fonksiyonları bulunur.

Bulunan C_1 ve C_2 Homojen denklemin genel çözümünde yerine yerlerarak genel çözüm elde edilmiştir olur.

$$y = C_1 \cdot y_1 + C_2 \cdot y_2$$

$y = [F(x) + K_1] y_1 + [G(x) + K_2] y_2$

Genel Çözüm.

Örnekler :

1) $y'' - 6y' + 9y = \frac{e^{3x}}{x^2}$

$$2) \quad y'' + y = \sec^3 x \quad \text{Çözünüz.}$$

$$3) \quad y'' + 3y' + 2y = \frac{x-1}{x^2} e^{-x} \quad \text{Çözünüz.}$$

$$4) \quad y'' + y = \tan^4 x \quad \text{Çözünüz.}$$

Cauchy - Euler Dif. Denklemleri

$$a_n x^n y^{(n)} + a_{n-1} x^{n-1} y^{(n-1)} + \dots + a_1 x y' + a_0 y = f(x)$$

şeklindeki denkleme Euler Dif. Denklemleri denir.

$$a_n x^n \frac{d^n y}{dx^n} + a_{n-1} x^{n-1} \frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}} + \dots + a_1 x \frac{dy}{dx} + a_0 y = f(x)$$

$$(a_n x^n D^n + a_{n-1} x^{n-1} D^{n-1} + \dots + a_1 x D + a_0) y = f(x)$$

şeklinde gösterilir. Çözmek için;

$x = e^t$ dönüşümü yapılır.

$$y' = \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dt} \cdot e^{-t}$$

$$y'' = \left(\frac{d^2 y}{dt^2} e^{-t} - e^{-t} \cdot \frac{dy}{dt} \right) e^{-t} = \left(\frac{d^2 y}{dt^2} - \frac{dy}{dt} \right) e^{-2t}$$

$$y''' = \left[\left(\frac{d^3 y}{dt^3} - \frac{d^2 y}{dt^2} \right) e^{-2t} - 2e^{-2t} \left(\frac{d^2 y}{dt^2} - \frac{dy}{dt} \right) \right] e^{-t}$$

$$y''' = \left[\frac{d^3 y}{dt^3} - 3 \frac{d^2 y}{dt^2} + 2 \frac{dy}{dt} \right] e^{-3t}$$

⋮

Bu dönüşüm denklemlerde yerine yazılırsa, Euler Dif. Denklemleri Sabit katsayılı denklemlere dönüşür.

Örnek:

$$x^2 y'' + 4xy + 2y = \ln x \quad \text{Dif. Denkleminin}$$

Çözümünü.

Çözüm:

Örnek: $x^2 y'' - 3xy' + 4y = x + x^2 \ln x$ Dif. Denk-

lemi çözünüz.

Çözüm:

Örnek:

$$x^3 y'' + 4x^2 y' = -1 \quad \text{Dif. Denklemini}$$

Çözümler.

Çözüm:

örnek:

$$x \cdot y'' + 4y' = -1 \quad \text{Dif. Denklemini}$$

Çözümler.

Çözüm: