

KISMI DİFERANSİYEL DENKLEMLER

(KDD)

Konular.

- 1) Temel kavramlar ve tanımlar. Kısmi Diferansiyel Denklemin elde edilmesi.)
- 2) Birinci mertebeden KDD.
 - Tek bir değişkene göre Kısmi Türev içeren Denklemler.
 - İki değişkene göre Kısmi Türev içeren Denklemler (Lineer)
- 3) Yarı lineer KDD., Lagrange metodu
- 4) Verilen eğriden geçen Integral Yüzeyinin bulunması (Cauchy Problemi)
- 5) Lineer olmayan Kısmi Diferansiyel Denklemler (Lagrange-Charpit Metodu)
- 6) Değişkenlere ayırma metodu
- 7) İkinci mertebeden KDD.
İkinci mertebeden Lineer Sabit katsayılı Kısmi Dif. Denk.
- 8) İkinci mertebeden Hemen Hemen Lineer KDD'lerin sınıflandırılması, Kanonik forma indirilmesi

3) - Homojen Dalgı denkleminin özümü .

- Homojen 1sı denkleminin özümü

- Homojen Laplace denkleminin özümü

- Homojen Dalgı denklemini için Cauchy Problemi
(D'Alembert özümü)

(Dirichlet, Neuman, Robin Problemleri)

Kaynak : - KİSMİ TÜREVİLİ DENKLEMLER

Prof. Dr. Kerm Koca

- KİSMİ DİFERANSİYEL DENKLEMLER

Prof. Dr. Mehmet alıyan

Prof. Dr. Okay Çelebi

Tanım : içinde en az iki bağımsız ve en az bir bağımlı değişken ile bağımlı değişkenin bağımsız değişkenlere göre çeşitli mertebeden kısmi türevlerini içeren eşitliklere Kısmi Diferansiyel Denklem denir. u bağımlı x ve y bağımsız değişkenler olmak üzere bir KDD genel olarak,

$$F(x, y, u, u_x, u_y, u_{xx}, u_{xy}, u_{yy}, \dots) = 0 \text{ veya}$$

$$F(x, y, u, \frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}, \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}, \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}, \dots) = 0$$

şeklinde dir.

$$u_{xx} + u_{yy} = 0 \quad : \text{İki boyutlu Laplace Denklemi}$$

$$u_{xx} + u_{yy} + u_{zz} = c u_t \quad : \text{Üç boyutlu ısı Denklemi}$$

$$u_{xx} + u_{yy} + u_{zz} = c^2 u_{tt} \quad : \text{Üç boyutlu Dalgalar Denklemi}$$

$$a u_{xx} - u u_x = u_t \quad : \text{Burglar Denklemi}$$

$$u_{xx} - u_{tt} = 0 \quad : \text{Bir boyutlu Dalgalar Denklemi}$$

$$u_t - u_{xx} = 0 \quad : \text{Bir boyutlu ısı Denklemi}$$

$$u_x - \frac{1}{x} u = xy, \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = x + e^y$$

- Tanım 1 - Kısmi Diferansiyel Denklemin mertebesi kadar Keyfi fonksiyon içeren ve denklemi sağlayan bağıntılara KDD 'in genel çözümü denir.
- Kısmi Diferansiyel Denklemi sağlayan, keyfi fonksiyon veya ^(keyfi) parametre içermeyen bağıntılara (fonksiyona) denklemin özel çözümü denir.
 - Kısmi Diferansiyel Denklemi sağlayan ve keyfi parametre içeren bağıntılara (fonksiyona) Tam integral (Tam çözüm) denir.

Tanım 1 (Lineer Kısmi Diferansiyel Denklem)

Bir Kısmi Diferansiyel Denkleminde bağımlı değişken ve bu değişkenin tüm kısmi türevleri birinci mertebeden, katsayılar sadece bağımsız değişkenlerin fonksiyonları ise denklem lineer olarak adlandırılır. Aksi halde denklem lineer değildir. Birinci mertebeden iki bağımsız değişkenli bir KDD.

$$A(x,y)u_x + B(x,y)u_y + C(x,y)u = D(x,y)$$

şeklinde dir. İkinci mertebeden lineer KDD.

$$A(x,y)u_{xx} + B(x,y)u_{xy} + C(x,y)u_{yy} + D(x,y)u_x + E(x,y)u_y + F(x,y)u = G(x,y)$$

şeklinde dir.

Tanım 1 Yarı Lineer (Quasi Linear) KDD.

Bir KDD; z için en yüksek mertebeden türevine göre lineer ise yarı lineer olarak adlandırılır.

Böyle bir Kısmi Diferansiyel Denkleminde katsayılar bağımsız değişkenlerden başka, bağımlı değişken ve bağımlı değişkenin düşük mertebeden türevlerini içerebilir. Yarı lineer birinci mertebeden iki bağımsız değişkenli KDD;

$$A(x, y, z) z_x + B(x, y, z) z_y = C(x, y, z)$$

şeklinde dir. İkinci mertebeden yarı lineer KDD;

$$A(x, y, z, z_x, z_y) z_{xx} + B(x, y, z, z_x, z_y) z_{xy} + C(x, y, z, z_x, z_y) z_{yy} + D(x, y, z, z_x, z_y) = 0$$

şeklinde dir.

Lineer KDD, aynı zamanda yarı lineer dir.

Tanım 2 Hemen Hemen Lineer (Semi Linear) KDD.

Bir KDD; yarı lineer ve en yüksek mertebeden türevin katsayıları sadece bağımsız değişkenlerin fonksiyonu ise denklem Hemen Hemen Lineer olarak adlandırılır.

Birinci mertebeden Hemen Hemen Lineer KDD.

$$A(x,y)z_x + B(x,y)z_y = C(x,y,z)$$

seklindedir.

ikinci mertebeden Hemen Hemen Lineer KDD.

$$A(x,y)z_{xx} + B(x,y)z_{xy} + C(x,y)z_{yy} = D(x,y,z,z_x,z_y)$$

seklindedir.

Örneğin;

$$xz_x + yz_y = x^2 + z^2$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} + \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + xz = 0$$

$$x \cdot u_{xx} + (x + e^y) u_{xy} = u^3 \cdot u_x^2 + u + 1$$

Kısmi Diferansiyel Denklemlerin Çözüm Metodları

KDD çözümünü için çok sayıda metod vardır. Bunların en önemlileri KDD leri Adı Diferansiyel denklemlere dönüştüren metodlardır. Çözüm metodlarından bazıları şunlardır.

1) Değişkenlere ayırma metodu

n değişkenli KDD, n tane Adı Diferansiyel denkleme indirgenir.

2) İntegral Dönüşümler

n bağımsız değişkenli KDD, $(n-1)$ değişkenli denkleme indirgenir. Örneğin iki değişkenli bir KDD bir değişkenli bir KDD. dönüştürülebilir.

3) Pertürbasyon metodları

Lineer olmayan problemi, lineer problemlere bir diziye dönüştürür ve bu dizi lineer olmayan bir probleme yaklar.

4) İntegral Denklemler

Bu yöntemle KDD, integral Denkleme dönüştürülerek çözülür.

5) Varyasyonlar Hesabı

Burada KDD yeniden formüle edilerek bir minimizasyon problemine dönüştürülerek çözülür.

6) Öz Fonksiyon Analizi

Bu yöntemde çözüm, öz fonksiyonların bir toplamı olarak bulunur. Öz fonksiyonlar orijinal probleme karşılık gelen özdeğer probleminin çözümü elde edilerek bulunur.

7) Nümerik Metotlar

Bu metotta KDD, fark denklemlerinin bir sistemine dönüştürülür. Sonrada bu sistem iterasyon teknikler yardımıyla çözülür.

8) Koordinatların Döndürülmesi

Problemin koordinatları döndürülerek (eksen döndürülmesi, ötelenmesi) KDD, Adi Diferansiyel Denkleme veya daha basit KDD'e dönüştürülür.

9) Başınılı, dışıkan dörnüşümü

KDD daki' bñkmeçan fonksiyon, daha kolay
yani bir bñkmeçan fonksiyona dörnötürölür.

Birinci mertebeden Kısmi Diferansiyel Denklemler
elde edilir:

Birinci mertebeden KDD $F(x, y, z, P, Q) = 0$
şeklindeçdir. Burada $P = Z_x$, $Q = Z_y$ dir.

$f(x, y, z, a, b) = 0$, a, b : sabit ifadesmi çözümlüne
alalım. Bu eşitliğin x ve y 'ye göre türevlerini
alırsak,

$$\left. \begin{aligned} f_x + f_z \cdot Z_x &= 0 & : f_x + f_z \cdot P &= 0 \\ f_y + f_z \cdot Z_y &= 0 & : f_y + f_z \cdot Q &= 0 \\ f(x, y, z, a, b) &= 0 \end{aligned} \right\} \text{bu denklemlerden.}$$

a ve b yak edilerek $F(x, y, z, P, Q) = 0$ şeklinde
bir KDD elde edilir. Bu denklem verilen yüzey
ailesini çözüm kabul eden bir Kısmi Diferansiyel
Denklemdir.

Örnek : $2Z = (ax+y)^2 + b$ fonksiyonunun Kısmi Dif. Denklemini bulunuz.

Sonuç: $\boxed{Px - 2y^2 + 2y = 0}$

Örnek: $Z = xy + f(x^2 + y^2)$ fonksiyonunun çözüm kabul eden Kısmi Diferansiyel Denklemini bulunuz.

Sonuç: $\boxed{Py - 2x = y^2 - x^2}$

örnek: $F(x^2 + y^2 + z^2, z^2 - 2xy) = 0$ ~~fonksiyonunun~~ fonksiyonunun çözüm kabul eden KDD bulunuz

Sonuç: $\boxed{Z(P - 2) = y - x}$

örnek: $Z = \frac{f(x^2 + y^2)}{x}$ yüzey artlesinin KDD'ini bulunuz.

Sonuç: $\boxed{xyZ_x - x^2Z_y + yZ = 0}$