(1)

BİRİNCİ MERTEBEDEN ADİ DİFERANSİYEL DENKLEMLER

Tanım: f, xy-düzleminin bir D bölgesinde x ve y'nin sürekli bir fonksiyonu olmak üzere, birinci mertebeden

$$y'(x) = f(x, y) \tag{1.24}$$

diferansiyel denklemi göz önüne alalım. (x_0, y_0), D'nin bir noktası olsun. (1.24) ile ilgili başlangıç-değer problemi, x_0'ı içeren bir reel aralıkta tanımlı olan ve $\phi(x_0) = y_0$ başlangıç koşulunu sağlayan bir ϕ çözümü bulmaktır. Bu başlangıç-değer problemi

$$y'(x) = f(x, y), \; y(x_0) = y_0$$

olarak yazılabilir. Buna *Cauchy* problemi* de denir. x_0 ve y_0 değerlerine başlangıç değerleri veya Cauchy verileri adı verilir.

Teorem (Temel Varlık ve Teklik Teoremi): f fonksiyonu ve f_y kısmi türevi, xy düzleminin bir D bölgesinde sürekli ve (x_0, y_0), D'de bir nokta olmak üzere, $y' = f(x, y)$ diferansiyel denklemi verilsin. Diferansiyel denklemin, h yeterince küçük bir sayı olmak üzere $|x - x_0| \le h$ aralığında tanımlı $\phi(x_0) = y_0$ koşulunu sağlayan bir tek ϕ çözümü vardır.

Örnek $y' = x^2 + y^2$, $y(1) = 3$ başlangıç-değer problemini göz önüne alalım. Teoreme göre $f(x,y) = x^2 + y^2$, $f_y = 2y$'dir. Bu fonksiyonların her ikisi de, xy düzleminin her D bölgesinde süreklidirler. $y(1) = 3$ başlangıç koşulu, $x_0 = 1$ ve $y_0 = 3$ olduğunu ve $(1, 3)$ noktasının da böyle bir D bölgesinde olduğunu açıklar. Böylece hipotez gerçeklenir ve sonuç tutarlıdır. Yani, $y' = x^2 + y^2$ diferansiyel denkleminin, $x = 1$ civarında $|x-1| \leq h$ aralığında tanımlı, $\phi(1) = 3$ başlangıç koşulunu sağlayan bir tek ϕ çözümü vardır.

Örnek $y'(x) = y/\sqrt{x}$, $y(0) = 2$ başlangıç-değer problemini göz önüne alalım. Burada

$$f(x,y) = y/\sqrt{x}, \quad f_y = 1/\sqrt{x}, \quad x_0 = 0, \quad y_0 = 2$$

dir. (0, 2) noktasında hem f hem de f_y fonksiyonu sürekli değildir. Diğer bir deyişle, (0, 2) noktası hipotezin gerçekleştiği bir D bölgesinde içerilemez. Teoremden, problemin bir çözüme sahip olduğunu varsayamayız.

Örnek: $\frac{dy}{dx} = \frac{y}{\sqrt{x}}$, $y(1)=2$ Başlangıç değerini gözönüne alalım. Burada, $f(x,y) = \frac{y}{\sqrt{x}}$, $f_y = \frac{1}{\sqrt{x}}$ olur. Hem $f(x,y)$ hem de f_y fonksiyonları $x=0$ hariç her yerde (her D bölgesinde) sürekli fonksiyonlardır. O halde verilen Başlangıç De. problemin tek çözümü vardır.