

-1-

Özdeğerler ve Özevktörler

(Bir kare matrisin Özdeğerleri ve Özevktörleri)

A : $n \times n$ kare matris

X : $n \times 1$

λ : Sayı

$$\boxed{AX = \lambda X}$$

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix}, \quad X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$$

$$(A - \lambda I)X = 0$$

$$\left. \begin{array}{l} (a_{11} - \lambda)x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = 0 \\ a_{21}x_1 + (a_{22} - \lambda)x_2 + \dots + a_{2n}x_n = 0 \\ \vdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \dots + (a_{nn} - \lambda)x_n = 0 \end{array} \right\} \quad (*)$$

Lineer Homojen
denklemler sistemi.

Homojen sistemin sıfırdan farklı çözümünün olması için katsayılar matrisinin determinantı sıfıra eşit olmalıdır.

$$|A - \lambda I| = 0 \text{ olmalıdır.}$$

-2-

$P(\lambda) = |A - \lambda I|$: Karakteristik Polinom

$P(\lambda) = |A - \lambda I| = 0$: Karakteristik denklem

Karakteristik denklemin köklerine A kare matrisinin özdeğerleri denir. Özdeğerler $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ dir. Bu özdeğerlere karşılık gelen (*) sistemin sıfırdan farklı çözümlerine özvektörler denir. Özvektörler $X_1, X_2, \dots, X_n$ dir.

Özdeğerler ; $(|A - \lambda I| = 0 \text{ karakteristlik denklemin kökleri})$

- 1) $\lambda_i, i=1, 2, \dots, n$ ler birbirinden farklı reel olabilir.
- 2) $\lambda_i, i=1, 2, \dots, n$ kompleks olabilir.
- 3) $\lambda_i, i=1, 2, \dots, n$ katli kökler olabilir.
- 4) $\lambda_i, i=1, 2, \dots, n$ lerin bazıları farklı, bazıları kompleks, bazıları katli kökler olabilir.

Cebirsel katlılık

Bir özdeğerin katlılığına, α özdeğerin cebirsel katlılığı denir. $CK(\lambda_i)$ şeklinde gösterilir.

geometrik katlılık.

Bir özdeğere karşılık gelen lineer bağımsız öz vektör sayısına, geometrik katlılık denir. $GK(\lambda_i)$ şeklinde gösterilir.

Defective Matris

Bir A kare matrisin katlı özdeğerine karşılık gelen lineer bağımsız öz vektör sayısı $i < n$;

$CK(\lambda_i) < GK(\lambda_i)$ ise yani geometrik katlılık, cebirsel katlılıktan küçük ise A matrise Defective Matris denir.

Genelleştirilmiş Övektör:

Bir A kare matrisi için;

$\rho_K(\lambda_i) < \rho_K(\lambda_i)$ ise A kare

matrisinin genelleştirilmiş övektörü vardır.

⊙ Bir kare matrisin genelleştirilmiş övektörü varsa, o kare matrise Defective Matris denir.

⊙ Bir Defective Matris, Genelleştirilmiş övektöre Sahiptir.

Örnek:

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 2 & -4 \\ 0 & 4 & 2 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \text{ matrisinin}$$

öz değerlerini ve övektörlerini bulunuz.

Örnek: $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -2 \\ -1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}$ matrisinin özdeğerlerini ve özvektörlerini bulunuz.

(Öz değerler: $\lambda_1 = -1, \lambda_2 = 1, \lambda_3 = 2$)

Örnek: $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}$ $\lambda_1 = 2$
 $\lambda_{2,3} = -1$

Örnek: $A = \begin{bmatrix} 1 & -4 & -1 & -4 \\ 2 & 0 & 5 & -4 \\ -1 & 1 & -2 & 3 \\ -1 & 4 & -1 & 6 \end{bmatrix}$ $\lambda_1 = 2$
 $\lambda_{2,3,4} = 1$