

DALGA DENKLEMİ

$$u_{tt} = c^2 u_{xx}$$

ÖNEMLİ

Tanım: t zaman değişkeni ve u da aranan fonksiyonu göstermek üzere, $t=0$ için u ve u_t değerlerinin denklemlerle birlikte verilmesi halinde bu probleme Başlangıç değer problemi denir.

Tanım: Denklemlerle birlikte aranan fonksiyonun, tanımlı oklağa bölgenin sınırı üzerindeki değerinin önceden verilmesi halinde Sınır değer problemi denir.

Tanım: Denklemlerle birlikte başlangıç ve sınır değerlerinin önceden verilmesi halinde başlangıç ve sınır değer problemi denir.

Bunlara Cauchy problemi de denir.

Bir Boyutlu Homojen Dalgı Denklemleri için Başlangıç değer problemi :

$$u_{tt} = c^2 u_{xx}$$

$$-\infty < x < \infty, t > 0 \quad (4.3)$$

$$u(x, 0) = f(x)$$

$$-\infty < x < \infty$$

$$(4.4)$$

$$u_t(x, 0) = g(x)$$

$$(4.5)$$

şeklindeki Cauchy problemi inceleyelim. Burada $u(x, t)$, tanımlı x yer değişkenine göre dalganın konumunu; $f(x)$, dalganın $t=0$ anındaki başlangıç durumunu; $g(x)$ ise dalganın

(2)

başlangıç hızını göstermektedir. Ayrıca burada $f(x)$ 'in tanımlı olduğu yerde en az iki defa türevlenebilir ve ikinci mertebeden türevinin sürekli; $g(x)$ 'in ise en az birinci mertebeden türevine sahip ve bu türevinde sürekli olduğunu kabul edelim. Çözümlerin varlığı için bu hipotezler gereklidir.

$$u_{tt} = c^2 u_{xx}$$

$$\Delta = B^2 - 4AC$$

$$c^2 u_{xx} - u_{tt} = 0$$

$$\Delta = -4 \cdot (c^2) \cdot (-1) = 4c^2 > 0 \text{ Hiperbolik tip.}$$

$$\frac{dt}{dx} = \frac{B \pm \sqrt{\Delta}}{2A} = \frac{0 \pm 2c}{2c^2} = \pm \frac{1}{c}$$

$$\frac{dt}{dx} = \frac{1}{c} \quad \frac{dt}{dx} = -\frac{1}{c}$$

$$ct = x - C_1$$

$$ct = -x + C_2$$

$$C_1 = x - ct$$

$$C_2 = x + ct$$

$$\xi = x - ct$$

$$u_x = u_\xi + u_\eta$$

$$u_t = u_\xi (-c) + u_\eta \cdot c$$

$$\eta = x + ct$$

$$u_{xx} = u_{\xi\xi} + 2u_{\xi\eta} + u_{\eta\eta}$$

$$u_{tt} = u_{\xi\xi} c^2 - 2u_{\xi\eta} (-c^2) + u_{\eta\eta} \cdot c^2$$

$$\cancel{c^2} [u_{\xi\xi} - 2u_{\xi\eta} + u_{\eta\eta}] = \cancel{c^2} [u_{\xi\xi} + 2u_{\xi\eta} + u_{\eta\eta}]$$

$$4u_{\xi\eta} = 0 \Rightarrow \boxed{u_{\xi\eta} = 0} \text{ olur.}$$

(3)

$$u_{\xi\eta} = 0$$

$$u_{\xi} = f(\xi)$$

$$u = \underbrace{\int f(\xi) d\xi}_{F(\xi)} + G(\eta)$$

$$u = F(\xi) + G(\eta)$$

$$\boxed{u(x,t) = F(x-ct) + G(x+ct)} \quad F, G \in C^2[D] \quad (4.11)$$

olur. Burada F ve G keyfi fonksionlardır. (4.11) in çözümünü için (4.9) ve (4.10) koşulları kullanılırsa,

$$u(x,0) = f(x) = F(x) + G(x) \quad (4.12)$$

$$u_t(x,0) = g(x) = c[-F'(x) + G'(x)] \quad \text{olur.} \quad (4.13)$$

(4.13) ün integrali alınır,

$$\left. \begin{aligned} g(x) &= f(x) = F(x) + G(x) \\ \frac{1}{c} \int_{x_0}^x g(\tau) d\tau + K &= F(x) + G(x) \end{aligned} \right\} \quad (4.14)$$

$$G(x) = \frac{1}{2} f(x) + \frac{1}{2c} \int_{x_0}^x g(\tau) d\tau + \frac{K}{2} \quad (4.15)$$

$$F(x) = \frac{1}{2} f(x) - \frac{1}{2c} \int_{x_0}^x g(\tau) d\tau - \frac{K}{2} \quad (4.16)$$

olur. Böylece; (4.15) den;

(4)

$$G(x+ct) = \frac{1}{2}f(x+ct) + \frac{1}{2c} \int_{x_0}^{x+ct} g(z) dz + \frac{k}{2} \quad (4.17)$$

ve (4.16) den,

$$F(x-ct) = \frac{1}{2}f(x-ct) - \frac{1}{2c} \int_{x_0}^{x-ct} g(z) dz - \frac{k}{2} \quad (4.18)$$

ya da (4.17) ve (4.18) taraf tarafa toplanır,

$$U(x,t) = F(x-ct) + G(x+ct)$$

$$U(x,t) = \frac{1}{2}[f(x+ct) + f(x-ct)] + \frac{1}{2c} \left[\int_{x_0}^{x+ct} g(z) dz - \int_{x_0}^{x-ct} g(z) dz \right] \quad (4.19)$$

bulunur. Diğer taraftan (4.19) un sağındaki integrali (4.19) terimleri;

$$\int_{x_0}^{x+ct} g(z) dz - \int_{x_0}^{x-ct} g(z) dz = \int_{x_0}^{x+ct} g(z) dz + \int_{x-ct}^{x_0} g(z) dz = \int_{x-ct}^{x+ct} g(z) dz$$

şeklinde birleştirilebilir. Böylece (4.3) 1-boyutlu homojen dalgalar denkleminin (4.9) ve (4.10) başlangıç verilerini sağlayan çözümü;

$$U(x,t) = \frac{1}{2}[f(x+ct) + f(x-ct)] + \frac{1}{2c} \int_{x-ct}^{x+ct} g(z) dz \quad (4.20)$$

olarak bulunur. Bu çözüme 1-boyutlu dalgalar denklemini veren Cauchy probleminin D'Alembert çözümü denir.

(5)

Örnek:

$u_{tt} - c^2 u_{xx} = 0$, $u(x, 0) = \sin x$, $u_t(x, 0) = \cos x$
olarak verilen başlangıç değer problemi: çözümler.

Çözüm:

(4.20) formülünde $f(x) = \sin x$, $g(x) = \cos x$

yerine ;

$$u(x, t) = \frac{1}{2} [\sin(x+ct) + \sin(x-ct)] + \frac{1}{2c} \int_{x-ct}^{x+ct} \cos z \, dz$$

$$= \frac{1}{2} [\sin x \cos ct + \cancel{\cos x \sin ct} + \sin x \cos ct - \cancel{\cos x \sin ct}] + \frac{1}{2c} [\sin(x+ct) - \sin(x-ct)]$$

$$u(x, t) = \sin x \cos ct + \frac{1}{c} \sin ct \cos x$$

şeklinde istenilen görünüm elde edilir. Burada c dalga hızıdır.

1- Dalgı Denklemleri

$$u(x,t) = ?$$

$$u_{tt} = k u_{xx} \quad : \text{Hiperbolik tip}$$

2- Isı Denklemleri

$$u(x,t) = ?$$

$$u_t = c u_{xx} \quad : \text{Parabolik tip}$$

3- Laplace Denklemleri

$$u(x,y) = ?$$

$$\nabla^2 u = 0$$

$$u_{xx} + u_{yy} = 0 \quad : \text{Eliptik tip}$$

$$\nabla^2 u = f(x,y) \text{ ise Poisson Denklemleri}$$

Başlangıç koşulu : $u(x,0) = f(x)$

$u_t(x,0) = g(x)$

$\rightarrow$ Dalgı denklemleri

$\rightarrow$ Isı denklemleri

Sınır Koşulları

1) Dirichlet problemi

$$u(0,t) = g(t) \quad 0 \leq x \leq L$$

$$u(L,t) = h(t)$$

2) Neumann Problemi

$$\frac{\partial u(0,t)}{\partial x} = g(t)$$

$$0 \leq x \leq L$$

$$\frac{\partial u(L,t)}{\partial x} = h(t)$$

3) Robin Problemi

Karışık Sınır Koşulları

$$u(0,t) + \frac{\partial u(L,t)}{\partial x} = f(t) + c_p(t)$$

Laplace Denklemi için Dirichlet problemi

$$\nabla^2 u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$$

$$u(0,y) = 0, \quad u(L,y) = 0$$
$$u(x,0) = f(x), \quad u(x,H) = g(x)$$

$$0 \leq x \leq L, \quad 0 \leq y \leq H$$

Dirichlet problemi çözümleri.

Çözüm: Burada Denklem ve Sınır koşulları Homojen olduğundan değişkenlere ayırma yöntemini kullanabiliriz.

Bu durumda çözüm;

$$u(x,y) = X(x) \cdot Y(y)$$

$$\nabla^2 u = u_{xx} + u_{yy} = 0$$

$$X''Y + XY'' = 0$$

$$\frac{X''}{X} + \frac{Y''}{Y} = 0$$

$$\frac{X''}{X} = -\frac{Y''}{Y} = (\lambda)$$

ayırma sabiti

$$\frac{x''}{x} = \lambda \quad ; \quad -\frac{y''}{y} = \lambda$$

$$x'' - \lambda x = 0$$

$$y'' + \lambda y = 0 \quad \text{dur. Buradan;}$$

$$\boxed{x'' - \lambda x = 0} \quad \text{denklemini çözelim;}$$

1) $\lambda > 0$ olsun.

$$r^2 - \lambda = 0$$

$$r_{1,2} = \pm \sqrt{\lambda}$$

$$X = C_1 e^{-\sqrt{\lambda}x} + C_2 e^{\sqrt{\lambda}x}$$

$$X(0) = C_1 + C_2 = 0$$

$$X(L) = C_1 e^{-\sqrt{\lambda}L} + C_2 e^{\sqrt{\lambda}L} = 0$$

Sınır koşulları:

$$u(0,y) = 0, \quad u(L,y) = 0$$

$$u(x,y) = X(x) \cdot Y(y)$$

$$u(0,y) = X(0) \cdot Y(y) = 0 \Rightarrow$$

$$Y(y) \neq 0, \quad X(0) = 0 \quad \text{dur.}$$

$$u(L,y) = X(L) \cdot Y(y) = 0 \Rightarrow$$

$$Y(y) \neq 0, \quad X(L) = 0 \quad \text{dur.}$$

$$\left. \begin{array}{l} C_1 + C_2 = 0 \\ C_1 e^{-\sqrt{\lambda}L} + C_2 e^{\sqrt{\lambda}L} = 0 \end{array} \right\}$$

$$C_1 = 0, \quad C_2 = 0 \quad \text{dur.} \quad 0 \quad \text{halde} \quad \boxed{X=0}$$

(asıl çözüm) sıfır çözüm dur.

2) $\lambda = 0$ olsun.

$$r_{1,2} = 0 \quad ; \quad X = C_1 + C_2 x$$

$$X(0) = C_1 = 0$$

$$X(L) = C_1 + C_2 L = 0 \quad \left. \begin{array}{l} C_1 = 0 \\ C_2 = 0 \end{array} \right\} \quad \text{dur.}$$

$$\boxed{X=0} \quad \text{(asıl çözüm) sıfır çözüm dur.}$$

3) $\lambda < 0$ olsun. $\hat{r}_{12} = \mp i\sqrt{\lambda}$ olur.

$$X = C_1 \cos \sqrt{\lambda} x + C_2 \sin \sqrt{\lambda} x$$

$$X(0) = X(L) = 0$$

$$X(0) = C_1 = 0 \text{ olur.}$$

$$X(L) = C_1 \cos \sqrt{\lambda} L + C_2 \sin \sqrt{\lambda} L = 0$$

$$C_2 \sin \sqrt{\lambda} L = 0 \text{ olur.}$$

$$\sqrt{\lambda} L = n\pi ; n=1,2,\dots$$

$$\boxed{\lambda_n = \frac{n^2 \pi^2}{L^2} ; n=1,2,\dots} \text{ öz değerler.}$$

$$X = C_2 \sin \frac{n\pi x}{L} : \text{öz fonksiyonlar.}$$

$$\boxed{X_n = \sum_{n=1}^{\infty} C_n \cdot \sin \frac{n\pi x}{L}} \text{ olur.}$$

$\lambda < 0$ durumunda (Yanıt bu durumda)

$$Y'' + \lambda Y = 0 \Rightarrow r^2 + \lambda = 0 \quad \hat{r}_{12} = \mp i\sqrt{\lambda} \text{ olur.}$$

$$\boxed{Y = A_1 e^{-\sqrt{\lambda} y} + A_2 e^{\sqrt{\lambda} y}}$$

Sınır koşulları :

-5-

$$U(x,0) = f(x)$$

$$U(x,H) = g(x)$$

$$U(x,y) = X(x) \cdot Y(y)$$

$$U(x,0) = X(x) \cdot Y(0) = f(x)$$

$$U(x,H) = X(x) \cdot Y(H) = g(x) \text{ olur.}$$

$$U(x,y) = X(x) \cdot Y(y)$$

$$U(x,y) = \sum_{n=1}^{\infty} \sin \frac{n\pi x}{L} \left[A_n e^{-\sqrt{\lambda} y} + B_n e^{\sqrt{\lambda} y} \right]$$

$$\text{Burada : } A_n = A_1 \cdot C_n$$

$$B_n = A_2 \cdot C_n \text{ dir.}$$

$$\text{Buradaki: } A_n \text{ ve } B_n \text{ verilen } \left. \begin{array}{l} U(x,0) = f(x) \\ U(x,H) = g(x) \end{array} \right\}$$

Sınır koşullarını sağlayacak şekilde bulunacak.

$$1) U(x,0) = f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} (A_n + B_n) \sin \frac{n\pi x}{L}$$

$$2) U(x,H) = g(x) = \sum_{n=1}^{\infty} (A_n e^{-\sqrt{\lambda} H} + B_n e^{\sqrt{\lambda} H}) \sin \frac{n\pi x}{L}$$

6-

(1) 'in her iki tarafını $\sin \frac{m\pi x}{L}$ ile çarpıp 0 dan L ye kadar integral alalım.

$$\int_0^L f(x) \cdot \sin \frac{m\pi x}{L} dx = \sum_{n=1}^{\infty} (A_n + B_n) \int_0^L \sin \frac{n\pi x}{L} \sin \frac{m\pi x}{L} dx$$

$m \neq n$ ise $\int_0^L \sin \frac{n\pi x}{L} \cdot \sin \frac{m\pi x}{L} dx = 0$ dir. (Ortogonalite)

$m = n$ ise $\int_0^L \sin^2 \frac{n\pi x}{L} dx = \int_0^L \frac{1 - \cos \frac{2n\pi x}{L}}{2} dx$

$$= \frac{1}{2} \left[x - \frac{L}{2n\pi} \sin \frac{2n\pi x}{L} \right]_0^L = \frac{L}{2} \text{ olur.}$$

0. bulalım;

$$\left. \begin{aligned} E_1 = A_n + B_n &= \frac{2}{L} \int_0^L f(x) \cdot \sin \frac{n\pi x}{L} dx \\ E_2 = A_n e^{-\sqrt{\lambda} H} + B_n e^{\sqrt{\lambda} H} &= \frac{2}{L} \int_0^L f(x) \cdot \sin \frac{n\pi x}{L} dx \end{aligned} \right\}$$

$$\left. \begin{aligned} A_n + B_n &= E_1 \\ e^{-\sqrt{\lambda} H} A_n + e^{\sqrt{\lambda} H} B_n &= E_2 \end{aligned} \right\} \begin{aligned} A_n &= \frac{e^{\sqrt{\lambda} H} E_1 - E_2}{e^{\sqrt{\lambda} H} - e^{-\sqrt{\lambda} H}} \\ B_n &= \frac{E_2 - E_1 \cdot e^{-\sqrt{\lambda} H}}{e^{\sqrt{\lambda} H} - e^{-\sqrt{\lambda} H}} \end{aligned} \text{ bulunur.}$$

-7-

Bulduğumuz A_n ve B_n değerleri;

$$u(x,y) = \sum_{n=1}^{\infty} \sin \frac{n\pi x}{L} \left[A_n e^{-\sqrt{\lambda} y} + B_n e^{\sqrt{\lambda} y} \right] \quad \text{de}$$

?

Yerine yararlanarak sonucu elde etmiş oluruz.

Ödevi $\nabla^2 u = 0$

$$u_x(0,y) = 0, \quad u_x(L,y) = 0 \quad ; \quad 0 \leq y \leq L$$

$$u_y(x,0) = f(x), \quad u_y(L,H) = g(x) \quad ; \quad 0 \leq x \leq H$$

Neumann Problemi! Çözül.