Belirli İntegralin Özellikleri

f(x) fonksiyonu [a,b] de sürekli ise;

1. $\int_a^b f(x)dx = F(x)\Big|_a^b = F(b)-F(a)$ dır.
"İntegral Hesabın Temel Teoremi"

2. $\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx$

3. $\int_a^a f(x)dx = 0$

4. $\int_a^b cf(x)dx = c\int_a^b f(x)dx$

5. $\int_a^b (f(x)+g(x))dx = \int_a^b f(x)dx + \int_a^b g(x)dx$

6. $\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$

$c \in (a,b)$

Örnek: $\int_0^4 f(x)dx = 9$, $\int_3^4 f(x)dx = 4$ ise $\int_0^3 f(x)dx = ?$

$\int_0^4 f(x)dx = \int_0^3 f(x)dx + \int_3^4 f(x)dx \Rightarrow \int_0^3 f(x)dx = 5$ olur.

CamScanner ile tarandı

Örnek: $\int_{-1}^{1} |x|\,dx = ?$

$$\int_{-1}^{1} |x|\,dx = \int_{-1}^{0} |x|\,dx + \int_{0}^{1} |x|\,dx$$

$$= \int_{-1}^{0} (-x)\,dx + \int_{0}^{1} x\,dx$$

$$= \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1$$

---

7. (İntegralleri Karşılaştırma)

1. $a \le x \le b$ için $f(x) \ge 0$ ise $\int_a^b f(x)\,dx \ge 0$ dır.
2. $a \le x \le b$ için $f(x) \le g(x)$ ise $\int_a^b f(x)\,dx \le \int_a^b g(x)\,dx$
3. $\left|\int_a^b f(x)\,dx\right| \le \int_a^b |f(x)|\,dx$
4. $a \le x \le b$ için m ve M $f(x)$ in $[a,b]$ aralığında minimum ve maksimum değerleri ise $m(b-a) \le \int_a^b f(x)\,dx \le M(b-a)$ dır.

CamScanner ile tarandı

Örnek: $\int_0^1 \sqrt{x+3}\,dx$ integralının değerinin $\sqrt{3}$ ile 2 arasında olduğunu gösteriniz.

Çözüm: $f(x) = \sqrt{x+3}$

$m = \sqrt{3}$, $M = 2$

$$m(b-a) \leq \int_0^1 \sqrt{x+3}\,dx \leq M(b-a)$$

$$\sqrt{3} \leq \int_0^1 \sqrt{x+3}\,dx \leq 2 \quad \text{olur.}$$

Örnek: $\int_0^1 \sin x^2\,dx$ integralının 1 den büyük olmadığını gösteriniz.

$$-1 \leq \sin x^2 \leq 1 \Rightarrow \int_0^1 \sin x^2\,dx \leq M.(b-a)$$

$$\int_0^1 \sin x^2\,dx \leq 1.(1-0)$$

$$\int_0^1 \sin x^2\,dx \leq 1 \text{ olur.}$$

CamScanner ile tarandı

Örnek: $\int_0^1 e^{-x^2}dx$ integralının değeri hangi aralıktadır.

$f(x)=e^{-x^2}$ $[0,1]$

$f(0)=1=M$, $f(1)=\frac{1}{e}=m$

$f(x)$ fonk. $[\frac{1}{e}, 1]$ aralığında değerler alır.

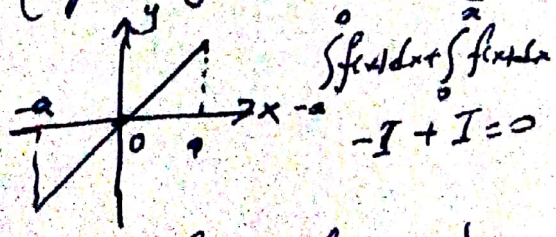
$m(b-a) \le \int_0^1 e^{-x^2}dx \le M(b-a)$

$\frac{1}{e} < \int_0^1 e^{-x^2}dx \le 1$ olacaktır.

---

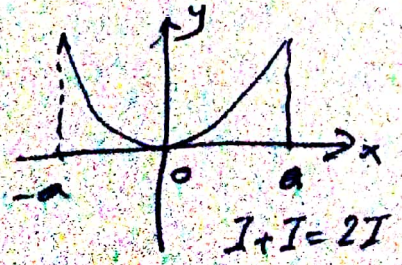
8. $f(x)$ tek fonksiyon ise (yani $f(-x)=-f(x)$ ise)

$\int_{-a}^{a} f(x)dx = 0$



9. $f(x)$ çift fonksiyon ise (yani $f(-x)=f(x)$ ise)

$\int_{-a}^{a} f(x)dx = 2\int_0^a f(x)dx$

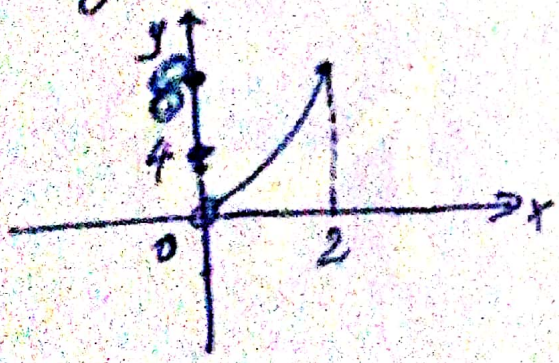


CamScanner ile tarandı

İntegrallenebilirlik

1) Eğer $f(x)$ fonksiyonu $[a,b]$ aralığında sürekli ise integrallenebilirdir.

2) Eğer $f(x)$ fonksiyonu $[a,b]$ aralığında sonlu sayıda sıçramalı süreksizliği varsa integrallenebilirdir.



$$f(x)=\begin{cases}4, & x=0\\ x^3, & 0<x\le 2\end{cases}$$

İntegrallenemez olanlar

$f(x)$ fonksiyonu $[a,b]$ aralığında sonsuz sayıda sıçramalı süreksizliği varsa integrallenemez.

Örnek: $f(x)=\begin{cases}0, & x=0\\ \frac{1}{x}, & 0<x\le 2\end{cases}$

$\lim_{x\to 0^+}\frac{1}{x}=\infty$ dur. O halde $f(x)$ fonksiyonu $[0,2]$ aralığında integrallenemez.

CamScanner ile tarandı

Örnek: $I=\int_0^{\pi/2}\cos^5 x\,dx = ?$

$f(x)=\cos^5 x$ fonksiyonu $[0,\frac{\pi}{2}]$ aralığında süreklidir.

$$I=\int_0^{\pi/2}\cos^5 x\,dx=\int_0^{\pi/2}(1-\sin^2 x)^2\cos x\,dx$$

$\sin x=t$ dersek

$\cos x\,dx=dt$ olur

Sınırları:

$x=0$ için $t=0$

$x=\frac{\pi}{2}$ için $t=1$ olur.

$$I=\int_0^1(1-t^2)^2\,dt$$

$$I=t-\frac{2}{3}t^3+\frac{1}{5}t^5\Big|_0^1$$

$$I=1-\frac{2}{3}+\frac{1}{5}-(0)$$

$I=\frac{8}{15}$ bulunur.

Örnek: $I=\int_0^1 \arcsin(1-x)\,dx = ?$

$-1\le 1-x\le 1$

$-2\le -x\le 0$

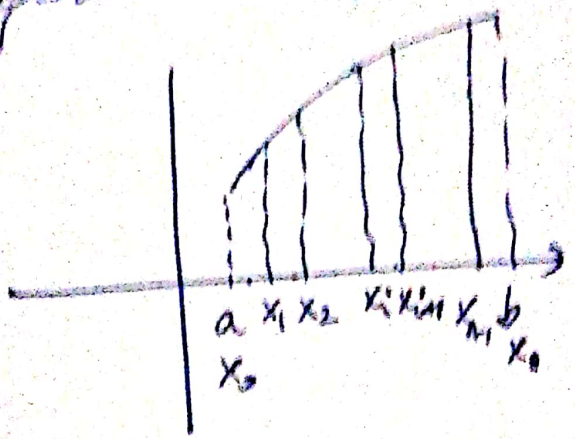
$2\ge x\ge 0$

Örnek: $I=\int_1^2 \frac{\sqrt{x^2-1}}{x}\,dx$

CamScanner ile tarandı

Ortalama Değer Teoremi

$f(x)$, $[a,b]$ aralığında verilsin. $[a,b]$ aralığını n tane eşit aralığa bölelim. Her bir aralıkta x_i^* noktasında $f(x_i^*)$ değerlerini hesaplayalım.



$$f_{ort} = \frac{f(x_1^*) + f(x_2^*) + \dots + f(x_n^*)}{n}$$

$$f_{ort} = \lim_{n\to\infty} \frac{\sum_{i=1}^{n} f(x_i^*)}{n}$$

$$\Delta x = \frac{b-a}{n}$$

$$n = \frac{b-a}{\Delta x}$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{\sum_{i=1}^{n} f(x_i^*)}{\frac{b-a}{\Delta x}} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{b-a} \cdot \sum_{i=1}^{n} f(x_i)\cdot\Delta x$$

$$\boxed{f_{ort} = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx}$$ ortalama değer teoremi

$f(x)$, $[a,b]$ aralığında sürekli ise

$f_{ort} = f(c) = \frac{1}{b-c}\cdot\int_a^b f(x)dx$ eşitliğini sağlayan en az bir $c\in(a,b)$ sayısı vardır.

CamScanner ile tarandı

Her $x \in [a,b]$ için $f(x)$'in maksimum değeri M, minimum değeri m olsun. Bu durumda

$$m \leq f(x) \leq M \text{ olur.}$$

$$\int_a^b m\,dx \leq \int_a^b f(x)\,dx \leq \int_a^b M\,dx$$

$$m(b-a) \leq \int_a^b f(x)\,dx \leq M(b-a)$$

$$m \leq \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx \leq M$$

olur. Ara değer teoreminden;

$$f(c) = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx$$

olacak şekilde en az bir $c \in (a,b)$ sayısı vardır.

CamScanner ile tarandı

Örnek: $y=f(x)=x+4$ doğrusunun $[-2,0]$ aralığı üzerinde ortalama değerini bulunuz. Ortalama değeri sağlayan $c\in(-2,0)$ sayısını belirleyiniz.

Çözüm:

$$f_{ort}=\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx=f(c)$$

$$=\frac{1}{0-(-2)}\int_{-2}^{0}(x+4)\,dx$$

$$f_{ort}=\frac{1}{2}\left[\frac{x^2}{2}+4x\right]_{-2}^{0}=3$$

$$\boxed{f(c)=3}\qquad\boxed{f_{ort}=3}$$

$$c+4=3 \Rightarrow \boxed{c=-1\in(-2,0)}$$ bulunur.

Ödev: $f(x)=\sqrt{4-x^2}$ fonksiyonunun $[0,2]$ aralığında integraller için ortalama değer teoremini sağlayan c sayısını bulunuz. Sonuç: $c=\frac{\sqrt{16-\pi^2}}{2}\in(0,2)$

CamScanner ile tarandı

Teorem: (İntegral Hesabın Temel Teoremi)

f, $[a,b]$ aralığında tanımlanmış sürekli bir fonksiyon olsun. Eğer F, $[a,b]$ aralığında f'nin herhangi bir ters türevi ise, $\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a)$ olur.

Teorem: (Diferansiyel Hesabın Temel Teoremi)

f, $[a,b]$ aralığında sürekli bir fonksiyon ve her $x \in [a,b]$ için

$$F(x) = \int_a^x f(t)\,dt$$

olsun. Bu durumda F, (a,b) aralığında türevlenebilir ve her $x \in (a,b)$ için $F'(x) = f(x)$ dir.

$$\frac{d}{dx}\left(\int_{\alpha(x)}^{\beta(x)} f(t)\,dt\right) = f(\beta(x))\frac{d\beta}{dx} - f(\alpha(x))\frac{d\alpha}{dx}$$

Örnek: $F(x) = \int_{\cos x}^{\sin x} \sqrt{1-t^2}\,dt$ ise $F'(x) = ?(1)$

CamScanner ile tarandı

Örnek: $F(x) = \frac{1}{x}\int_1^x [2t - F'(t)]\,dt$ ise $F'(1) = ?$

1. Yol

$$F(x) = \frac{1}{x}\left[t^2 - F(t)\right]_1^x$$

$$= \frac{1}{x}\left[x^2 - F(x) - 1 + F(1)\right]$$

$F(1) = 0$ olur. $F(x) = \dfrac{x^2 - F(x) - 1}{x}$

$$xF(x) + F(x) = x^2 - 1$$

$$F(x) = x - 1$$

$$F'(x) = 1$$

$$\boxed{F'(1) = 1} \text{ olur.}$$

2. Yol $F'(x) = -\frac{1}{x^2}\int_1^x [2t - F'(t)]\,dt + \frac{1}{x}[2x - F'(x)]$

$F'(1) = [2 - F'(1)] \Rightarrow 2F'(1) = 2$

$\boxed{F'(1) = 1}$ bulunur.

CamScanner ile tarandı