

Sabit katsayılı Denklemlerin Genelleştirilmesi

L operatörünün m . mertebeden olduğunu ve $L = L_1 \cdot L_2 \cdots L_m$ şeklinde çarpımlara ayrılabilirliğini varsayalım. O zaman sabit katsayılı L operatörü

$$L = (\alpha_1 D_x - \beta_1 D_y - \gamma_1)(\alpha_2 D_x - \beta_2 D_y - \gamma_2) \cdots (\alpha_m D_x - \beta_m D_y - \gamma_m)$$

şeklinde yazılabilir. Burada $\alpha_i, \beta_i, \gamma_i \in \mathbb{R}$ $i=1,2,\dots,m$ dir.

$$L_i z = (\alpha_i D_x - \beta_i D_y - \gamma_i) z = 0$$

Denklemin genel çözümünü;

$$1) \alpha_i \neq 0 \text{ ise } z_i = e^{\frac{\gamma_i}{\alpha_i} x} f_i(\beta_i x + \alpha_i y)$$

$$2) \beta_i \neq 0 \text{ ise } z_i = e^{-\frac{\gamma_i}{\beta_i} y} f_i(\beta_i x + \alpha_i y)$$

dir. Eğer $\alpha_i \neq 0, \beta_i \neq 0$ ise bunlardan herhangi biri genel çözüm olarak alınır. Böylece,

$$Lz = (\alpha_1 D_x - \beta_1 D_y - \gamma_1)(\alpha_2 D_x - \beta_2 D_y - \gamma_2) \cdots (\alpha_m D_x - \beta_m D_y - \gamma_m) z = 0$$

denklemin genel çözümünü;

$$z = z_1 + z_2 + \cdots + z_m$$

Yap

Örnek: $(D_x^2 D_y + D_x D_y^2 - 2D_x^2 - 3D_x D_y + 2D_x)z = 0$
 Denklemin genel çözümünü bulunuz.

Çözüm: Bu üçüncü mertebeden bir denklem olup $\mathcal{L}$ operatörü ;

$$\mathcal{L} = D_x^2 D_y + D_x D_y^2 - 2D_x^2 - 3D_x D_y + 2D_x = D_x(D_x + D_y - 1)(D_y - 2)$$

şeklinde olur.

$$L_1 = D_x, \quad L_2 = D_x + D_y - 1, \quad L_3 = D_y - 2 \quad \text{ölsün.}$$

$$L_1 z = D_x z = 0 \quad \text{için} \quad z_1 = f_1(y)$$

$$L_2 z = (D_x + D_y - 1)z = 0 \quad \text{için} \quad z_2 = e^x f_2(y-x)$$

$$L_3 z = (D_y - 2)z = 0 \quad \text{için} \quad z_3 = e^{2y} f_3(x) \quad f_1, f_2, f_3 \in C^1$$

şeklinde her bir denklemin genel çözümünü bulunuz.

Eğer $f_1, f_2, f_3 \in C^3[I]$ ise 0 zaman ;

$$z = z_1 + z_2 + z_3 = f_1(y) + e^x f_2(y-x) + e^{2y} f_3(x)$$

verilen denklemin genel çözümüdür.

Not: L operatörünün ;

$$L = (\alpha D_x - \beta D_y - \gamma)^m, m \in \mathbb{N}$$

şeklinde olduğunu varsayalım. Böylece ;

$L_1 = L_2 = \dots = L_m$ dir. Bu durumda,

1) $\alpha \neq 0$ ise

$$z = e^{\frac{\gamma}{\alpha} x} \left[f_1(\beta x + \alpha y) + x f_2(\beta x + \alpha y) + x^2 f_3(\beta x + \alpha y) + \dots + x^{m-1} f_m(\beta x + \alpha y) \right]$$

2) $\beta \neq 0$ ise

$$z = e^{-\frac{\gamma}{\beta} y} \left[f_1(\beta x + \alpha y) + y f_2(\beta x + \alpha y) + y^2 f_3(\beta x + \alpha y) + \dots + y^{m-1} f_m(\beta x + \alpha y) \right]$$

ifadelerinden birisi

$$Lz = (\alpha D_x - \beta D_y - \gamma)^m z = 0$$

denklemin genel çözümü olarak alınabilir.

Örnek: $(D_x^3 D_y^2 + 6D_x^3 D_y + 9D_x^3)z = 0$
Denkleminin genel çözümünü bulun.

Çözüm: Verilen denklem;

$$D_x^3 (D_y + 3)^2 z = 0$$

şeklinde yazılabilir. $L = L_1^3 L_2^2$ olduğundan,

$L_1^3 z = D_x^3 z = 0$ denkleminin genel çözümü;

$$z_1 = f_1(y) + x \cdot f_2(y) + x^2 f_3(y)$$

$L_2^2 z = (D_y + 3)^2 z = 0$ denkleminin genel çözümü

$$z_2 = e^{-3y} [f_4(x) + y f_5(x)]$$

dur. Böylece verilen denklemin genel çözümü

$$z = z_1 + z_2$$

$$z = f_1(y) + x f_2(y) + x^2 f_3(y) + e^{-3y} [f_4(x) + y f_5(x)]$$

dur. Burada $f_i \in C^0[D]$ dir. $i=1,2,3,4,5$

İndirgenemeyen Denklemler (üstel tipten çözümler)

Genel olarak P iki değişkenli bir polinom olmak üzere L operatörü

$$L = P(D_x, D_y)$$

şeklinde yazılabilir. Örneğin,

$$Lz = (D_x^2 - D_x D_y - D_x + D_y)z = 0$$

denklemini için

$$L = P(D_x, D_y) = D_x^2 - D_x D_y - D_x + D_y$$

dir. Eğer $P(D_x, D_y)$ indirgenemez bir polinom ise o zaman $P(D_x, D_y) = 0$ denkleminin

$z = e^{ax+by}$ yapısında çözümü aranır.

Bu durumda $j, k = 0, 1, 2, \dots$ için

$$D_x^j D_y^k e^{ax+by} = a^j \cdot b^k \cdot e^{ax+by}$$

olacağından

-16-

Bu ise ; $P(a,b)=0$ olmasıyla mümkündür.

Buradan ; $(a_1, b_1), (a_2, b_2), \dots, (a_n, b_n) \in \mathbb{N}$
ise bu durumda çözüm ;

$$z = c_1 e^{a_1 x + b_1 y} + c_2 e^{a_2 x + b_2 y} + \dots + c_n e^{a_n x + b_n y}$$

şeklinde olacaktır.

Örnek 4 : $(2D_x^2 D_y - D_y^2)z = 0$ denklemini

çözümlü.

Çözüm : $P(D_x, D_y) = 2D_x^2 D_y - D_y^2 = D_y (2D_x^2 - D_y) = L_1 L_2$

olup $L_2 = 2D_x^2 - D_y$ operatörü indirgenemezdir.

$L_1 z = D_y z = 0$ denkleminin genel çözümü ;

$$z_1 = f(x), \quad f \in C^1[0]$$

dir. Diğer taraftan ;

$$L_2 z = (2D_x^2 - D_y)z = 0$$

denkleminin $z = e^{ax+by}$ formunda çözümünü arayalım.

O zaman ; $(2D_x^2 - D_y)z = (2D_x^2 - D_y) \cdot e^{ax+by} = (2a^2 - b) e^{ax+by} = 0$

olup buradan $2a^2 - b = 0$ olur. Buradan,
 $b = 2a^2$ elde edilir. Böylece çözüm;

$$z_2 = C_1 e^{a_1 x + 2a_1^2 y} + C_2 e^{a_2 x + 2a_2^2 y} + \dots + C_n e^{a_n x + 2a_n^2 y}$$

şeklinde dir. Burada, $C_i, a_i \in \mathbb{R}$ $i=1, 2, \dots, n$ dir.
 Bu durumda verilen denklemin çözümü;

$$z = z_1 + z_2$$

$$z = f(x) + C_1 e^{a_1 x + 2a_1^2 y} + C_2 e^{a_2 x + 2a_2^2 y} + \dots + C_n e^{a_n x + 2a_n^2 y}$$

olur.

Ödev 1

1) $(D_x^4 + D_y^2)z = 0$ denkleminin çözümü.

Çözüm: $z = C e^{ax} \cos(a^2 y)$

2) $(D_x^2 D_y^2 - D_x^3 - D_y^3 + D_x D_y)z = 0$ denkleminin çözümü

Çözüm: $z_1 = \sum_{k=1}^n C_k e^{b_k^2 x + b_k y}$, $z_2 = \sum_{i=1}^m A_i e^{a_i x + a_i^2 y}$

$z = z_1 + z_2$

$C_i, a_i, A_i, b_i \in \mathbb{R}$