Örnek:

$$F(s) = \ln \frac{s^2}{a^2+s^2} \Rightarrow f(t) = ?$$

$$\mathcal{L}\{t^n f(t)\} = (-1)^n \frac{d^n}{ds^n} F(s)$$

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{(-1)^n \frac{d^n}{ds^n} F(s)\right\} = t^n f(t)$$

$$\frac{dF(s)}{ds} = \frac{2}{s} - \frac{2s}{a^2+s^2}$$

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{dF(s)}{ds}\right\} = (-1)\, f(t)$$

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{2}{s} - \frac{2s}{a^2+s^2}\right\} = -t f(t)$$

$$2 - 2\cos 2t = -t f(t)$$

$$f(t) = \frac{2\cos 2t - 2}{t}$$

# Laplace Dönüşümü

**Tanım:** $f$, $[0,\infty)$ aralığında tanımlı bir fonksiyon olsun. Eğer $\int_0^\infty e^{-st} f(t)\,dt$ integrali mevcut (veya yakınsak) ise, $s$'nin bir fonksiyonu olan

$$F(s) = \int_0^\infty e^{-st} f(t)\,dt \qquad (1)$$

ye $f$ nin Laplace dönüşümü denir.

$f$ fonksiyonunun Laplace dönüşümü;

$$L\{f(t)\} = F(s)$$

şeklinde gösterilir. Burada $s$ reel veya kompleks bir değişkendir. Genellikle reel olduğu dikkate alınır. (1) integrali improper integraldir.

$$\lim_{K\to\infty} \int_0^K e^{-st} f(t)\,dt$$

limiti mevcut ise (1) integrali mevcuttur. (veya yakınsaktır) $F(s)$ in tanım kümesi (1) integralinin mevcut olduğu $s$ değerlerinden ibarettir.

**Örnek:** $f(t)=1$ fonksiyonunun Laplace dönüşümünü bulunuz.

**Çözüm:**

$$L[1]=\int_0^{\infty} e^{-st}\cdot 1\cdot dt=\lim_{k\to\infty}\int_0^{k} e^{-st}dt$$

$$=\lim_{k\to\infty}-\frac{1}{s}e^{-st}\Big|_0^{k}=\lim_{k\to\infty}\left[\frac{1}{s}-\frac{e^{-sk}}{s}\right]=\frac{1}{s}\ ;\ s>0$$

olur. Yani; $L\{1\}=\frac{1}{s}\ ;\ s>0$ olur.

**Örnek:** $f(t)=t\quad t\geq 0$ fonksiyonunun Laplace dönüşümünü bulunuz.

**Çözüm:**

$$L\{t\}=\int_0^{\infty} e^{-st}\cdot t\cdot dt=\lim_{k\to\infty}\int_0^{k} e^{-st}\cdot t\,dt$$

$$=\lim_{k\to\infty}\left[-\frac{te^{-st}}{s}-\frac{e^{-st}}{s^2}\right]_0^{k}=\lim_{k\to\infty}\left[-\frac{e^{-st}}{s^2}(st+1)\right]_0^{k}$$

$$=\lim_{k\to\infty}\left[\frac{1}{s^2}-\frac{e^{-sk}}{s^2}(sk+1)\right]$$ Buradan görüldüğü gibi,

$s>0$ için $\lim_{k\to\infty}\frac{e^{-sk}}{s^2}(sk+1)=0$ ve

$s\leq 0$ için $\lim_{k\to\infty}\frac{e^{-sk}}{s^2}(sk+1)\to\infty$

olur. Böylece; $L\{t\}=\frac{1}{s^2}\ ;\ s>0$ bulunur.

## Önemli fonksiyonların Laplace dönüşümler.

$f(t)=e^{at}\quad (t\geq 0)\qquad L\{e^{at}\}=\frac{1}{s-a}\ ;\ s>a$

$f(t)=\cos at\quad (t\geq 0)\qquad L\{\cos at\}=\frac{s}{s^2+a^2}\ ;\ s>0$

$f(t)=\sin at\quad (t\geq 0)\qquad L\{\sin at\}=\frac{a}{s^2+a^2}\ ;\ s>0$

## Özellikler

1) Laplace dönüşümü lineerdir. Yani $c_1, c_2$ keyfi sabitler ve $f_1, f_2$ de Laplace dönüşümü mevcut iki fonksiyon ise, $L\{c_1f_1+c_2f_2\}=c_1L\{f_1\}+c_2L\{f_2\}$ dir.

2) $L\{f(t)\}=F(s)$ ise $L\{e^{at}\cdot f(t)\}=F(s-a)$ dir.

3) $L\{f(t)\}=F(s)$ ise $L\{f(at)\}=\frac{1}{a}F\left(\frac{s}{a}\right)$ dir.

4) $L\{f(t)\}=F(s)$ ise $L\{(-1)^n\cdot t^n\cdot f(t)\}=\frac{d^nF(s)}{ds^n}$ dir.

**Örnek:** $f(t)=5+e^t+3\cos t$ ise $L\{f(t)\}=?$

$L\{5+e^t+3\cos t\}=L\{5\}+L\{e^t\}+L\{3\cos t\}$

$=\frac{5}{s}+\frac{1}{s-1}+\frac{3s}{s^2+1}$ olur.

Örnek: $\mathcal{L}\{t^n\}$ $n \geq 0$

$f(t) = 1 \Rightarrow F(s) = \frac{1}{s}$ $s > 0$

$\mathcal{L}\{(-1)^n \cdot t^n\} = \frac{d^n}{ds^n} \cdot \frac{1}{s}$

$\mathcal{L}\{t^n\} = \frac{1}{(-1)^n} \frac{d^n}{ds^n} \frac{1}{s} = (-1)^n (-1)^n \frac{n!}{s^{n+1}} = \frac{n!}{s^{n+1}}$ $s > 0$

olur.

Örnek: $f(t) = e^{at} \cdot \sin bt$ $t \geq 0$ $\mathcal{L}\{\sin bt\} = \frac{b}{s^2+b^2}$ $s > 0$

$\mathcal{L}\{e^{at} \cdot \sin bt\} = \frac{b}{(s-a)^2+b^2}$ ; $s > 0$ olur.

$\mathcal{L}\{e^{at} \cdot \cos bt\} = \frac{s-a}{(s-a)^2+b^2}$ ; $s > a$ olur.

---

| $f(t)$ | $F(s) = \mathcal{L}\{f(t)\}$ |
|---|---|
| $1$ | $\frac{1}{s}$ , $s > 0$ |
| $e^{at}$ | $\frac{1}{s-a}$ , $s > a$ |
| $t^n$, $n = 1, 2, \cdots$ | $\frac{n!}{s^{n+1}}$ , $s > 0$ |
| $\sin bt$ | $\frac{b}{s^2+b^2}$ , $s > 0$ |
| $\cos bt$ | $\frac{s}{s^2+b^2}$ , $s > 0$ |
| $e^{at} \sin bt$ | $\frac{b}{(s-a)^2+b^2}$ , $s > 0$ |
| $e^{at} \cdot \cos bt$ | $\frac{s-a}{(s-a)^2+b^2}$ , $s > 0$ |

# 65 - EK - 1

## Ters Laplace Dönüşümü

$L\{f(t)\} = F(s)$ olacak şekilde bir $f(t)$ fonksiyonu var ise, $f(t)$ ye $F(s)$ in Ters Laplace dönüşümü denir.

$$f(t) = L^{-1}\{F(s)\}$$

şeklinde gösterilir.

**Örnek:** $L^{-1}\left\{\frac{4s+12}{s^2+8s+16}\right\} = ?$

$$= L^{-1}\left\{\frac{4(s+4)-4}{(s+4)^2}\right\} = L^{-1}\left\{\frac{4}{s+4}\right\} - L^{-1}\left\{\frac{4}{(s+4)^2}\right\}$$

$$= 4 \cdot L^{-1}\left\{\frac{1}{s+4}\right\} - 4L^{-1}\left\{\frac{1}{(s+4)^2}\right\}$$

$$= 4e^{-4t} - 4t \cdot e^{-4t} = 4e^{-4t}(1-t) \text{ olur.}$$

**Örnek:** $L^{-1}\left\{\frac{2s+4}{(s-2)(s^2+4s+3)}\right\} = ?$ $L^{-1}\left\{\frac{s+1}{s^2+2s+5}\right\} = ?$

$e^{-t} \cdot \cos 2t$

Basit kesirlere ayrılarak çözülür.

$$\frac{2s+4}{(s-2)(\underbrace{s^2+4s+3}_{(s+1)(s+3)})} = \frac{A}{s-2} + \frac{B}{s+1} + \frac{C}{s+3}$$

$A = 8/15$, $B = -1/3$, $C = -1/5$ bulunur.

# 65- EK- 2

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s-2}\right\} = e^{2t}, \quad \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s+1}\right\} = e^{-t}, \quad \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s+3}\right\} = e^{-3t}$$

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{2s+4}{(s-2)(s^2+4s+3)}\right\} = \frac{8}{15}e^{2t} - \frac{1}{3}e^{-t} - \frac{1}{5}e^{-3t}$$

bulunur.

**Örnek:** $\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{(s^2+4)(s^2+1)}\right\} = ?$

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{(s^2+4)(s^2+1)}\right\} = -\frac{1}{3}\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s^2+4}\right\} + \frac{1}{3}\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s^2+1}\right\}$$

$$= -\frac{1}{6}\sin 2t + \frac{1}{3}\sin t \quad \text{bulunur.}$$

## Türevin Laplace Dönüşümü

$$\mathcal{L}\{y^{(n)}\} = s^n\mathcal{L}\{y\} - s^{n-1}\cdot y(0) - \cdots - y^{(n-1)}(0)$$

dir. Laplace dönüşümü özellikle sabit katsayılı lineer diferansiyel denklemler için başlangıç değer problemlerinin çözümlerinin elde edilmesinde kullanılır. Böyle bir denklemin her iki tarafına Laplace dönüşümü uygulanırsa, denklem, $y$'nin Laplace dönüşümüne göre bir cebirsel denkleme indirgenir.

Örneğin ikinci mertebeden sabit katsayılı lineer denklemin Başlangıç değer problemini çözümüne alalım.

$$ay'' + by' + cy = f(x)$$

$$y(0) = y_0 \,,\quad y'(0) = y_0'$$

$$a\mathcal{L}\{y''\} + b\mathcal{L}\{y'\} + c\mathcal{L}\{y\} = \mathcal{L}\{f(x)\}$$

$$a\left[s^2\mathcal{L}\{y\} - sy_0 - y_0'\right] + b\left[s\mathcal{L}\{y\} - y_0\right] + c\mathcal{L}\{y\} = \mathcal{L}\{f(x)\}$$

$\mathcal{L}\{y\} = Y(s)$ olsun.

$$(as^2 + bs + c)\,Y(s) + a(-sy_0 - y_0') - by_0 = \mathcal{L}\{f(x)\}$$

$$\boxed{Y(s) = \frac{a(sy_0 + y_0') + by_0 + \mathcal{L}\{f(x)\}}{as^2 + bs + c}} \text{ olur.}$$

Burun ters Laplace dönüşümü alınırsa,

$$y(x) = \mathcal{L}^{-1}\{Y(s)\}$$

olur. Buda Başlangıç değer problemin çözümü

dür.

# 65- Ek-4

**Örnek:** $y'+y=x$ , $y(0)=1$ Başlangıç değer problemini çözünüz.

**Çözüm:** $\mathcal{L}\{y'+y\}=\mathcal{L}\{x\}$

$$\mathcal{L}\{y'\}+\mathcal{L}\{y\}=\frac{1}{s^2}$$

$$s\mathcal{L}\{y\}-1+\mathcal{L}\{y\}=\frac{1}{s^2}$$

$$(s+1)\underbrace{\mathcal{L}\{y\}}_{Y(s)}=\frac{1}{s^2}+1$$

$$\boxed{Y(s)=\frac{s^2+1}{s^2(s+1)}}$$ $Y(s)=-\frac{1}{s}+\frac{1}{s^2}+\frac{2}{s+1}$ olur.

$$y=\mathcal{L}^{-1}\{Y(s)\}=\mathcal{L}^{-1}\left\{-\frac{1}{s}+\frac{1}{s^2}+\frac{2}{s+1}\right\}$$

$$\boxed{y=-1+x+2e^{-x}}$$ bulunur.

**Örnek:** $y'''-y''+y'-y=0$ $y(0)=1, y'(0)=0, y''(0)=0$ Başlangıç değer problemini çözünüz.

**Çözüm:** $\mathcal{L}\{y'''\}-\mathcal{L}\{y''\}+\mathcal{L}\{y'\}-\mathcal{L}\{y\}=\mathcal{L}\{0\}$

$$s^3\mathcal{L}\{y\}-s^2y(0)-sy'(0)-y''(0)-s^2\mathcal{L}\{y\}+sy(0)+y'(0)+s\mathcal{L}\{y\}-y(0)-\mathcal{L}\{y\}=0$$

$$(s^3-s^2+s-1)\underbrace{\mathcal{L}\{y\}}_{Y(s)}=s^2-s+1 \Rightarrow \boxed{Y(s)=\frac{s^2-s+1}{s^3-s^2+s-1}}$$ olur.

$$y=\mathcal{L}^{-1}\{Y(s)\}=\frac{1}{2(s-1)}+\frac{s-1}{2(s^2+1)}$$

$$\boxed{y=\frac{1}{2}e^x+\frac{1}{2}(\cos x-\sin x)}$$ bulunur.

$$\mathcal{L}^{-1}\{F(s)\} = f(t) \text{ ise } \mathcal{L}^{-1}\{F^{(n)}(s)\} = (-1)^n \cdot t^n f(t) \text{ dir.}$$

Örnek: $\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s-1}\right\} = e^t$

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{d}{ds}\frac{1}{s-1}\right\} = (-1)^1 \cdot t^1 \cdot e^t = -te^t$$

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{d}{ds}\frac{1}{s-1}\right\} = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{-1}{(s-1)^2}\right\} = -te^t$$

## Konvolüsyon Teoremi:

$\mathcal{L}\{f(t)\} = F(s)$, $\mathcal{L}\{g(t)\} = G(s)$ ise

$$\mathcal{L}\left\{\int_0^t f(\tau)\cdot g(t-\tau)\,d\tau\right\} = F(s)\cdot G(s) \quad \text{dir.}$$

$$\mathcal{L}^{-1}\{F(s)\cdot G(s)\} = \int_0^t f(\tau)\cdot g(t-\tau)\,d\tau$$

$$\mathcal{L}\left\{\int_0^t f(\tau)\cdot g(t-\tau)\,d\tau\right\} = \int_0^\infty e^{-st}\left\{\int_0^t f(\tau)\cdot g(t-\tau)\,d\tau\right\}dt$$

$$= \int_0^\infty f(\tau)\cdot\left\{\int_{t=\tau}^\infty e^{-st}\cdot g(t-\tau)\,dt\right\}d\tau$$

$t-\tau = v$ dersek

$$= \int_0^\infty f(\tau)\cdot\left\{\int_0^\infty e^{-s(\tau+v)}\cdot g(v)\,dv\right\}d\tau = \int_0^\infty e^{-s\tau} f(\tau)\,d\tau \int_{v=0}^\infty e^{-sv} g(v)\,dv$$

Ek-2 $\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{3}{s^2(s^2+9)}\right\}=?$

**Örnek:** Konvolüsyon teoremini kullanarak,

$f(t)=\sin 3t$ , $g(t)=t$

$$\mathcal{L}\left\{\int_0^t (t-\tau)\sin 3\tau\, d\tau\right\}=\frac{1}{s^2}\cdot\frac{3}{s^2+3^2}$$

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s^2}\cdot\frac{3}{s^2+3^2}\right\}=\int_0^t (t-\tau)\sin(3\tau)\,d\tau$$

$t-\tau=u$ $\quad \sin 3\tau\, d\tau=dv$

$-d\tau=du$ $\quad -\frac{1}{3}\cos 3\tau=v$

$$=-\frac{1}{3}(t-\tau)\cos 3\tau\Big|_0^t-\frac{1}{3}\int_0^t \cos 3\tau\, d\tau$$

$$=+\frac{1}{3}t-\frac{1}{9}\sin 3\tau\Big|_0^t=+\frac{1}{3}t-\frac{1}{9}\sin 3t$$

$$\mathcal{L}\left\{\frac{1}{3}t-\frac{1}{9}\sin 3t\right\}=\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{s^2}-\frac{1}{9}\cdot\frac{3}{s^2+9}$$

$$=\frac{3(s^2+9)-3s^2}{9s^2(s^2+9)}=\frac{3}{s^2(s^2+9)}$$ bulunur.

# Ek-3

Örnek: $L^{-1}\left\{\frac{1}{s(s^2+4)}\right\}$

$F(s)=\frac{1}{s}$ $\quad G(s)=\frac{1}{s^2+4}$

$L^{-1}\left\{\frac{1}{s}\right\}=1$ $\quad L^{-1}\left\{\frac{1}{s^2+4}\right\}=\frac{1}{2}\sin 2t$

$$f(t)=\int_0^t f(t-\tau)\cdot g(\tau)\,d\tau$$

$$=\int_0^t 1\cdot\frac{1}{2}\sin 2\tau\,d\tau=-\frac{1}{4}\cos 2\tau\Big|_0^t=-\frac{1}{4}\cos 2t+\dots$$

$$\boxed{f(t)=\frac{1}{4}(1-\cos 2t)}$$

Örnek: $L^{-1}\left\{\frac{1}{(s-1)^2}\right\}=?$ $\quad t\cdot e^t$

Örnek: $L^{-1}\left\{\frac{s}{(s^2+a^2)^2}\right\}=?$ $\quad \frac{t\cdot\sin at}{2a}$

# EK-4

Örnek: $y(0)=y'(0)=y''(0)=y'''(0)=0$

$y^{(4)}(t)-2y''(t)+y(t)=\sin t$ Başlangıç değer problemini

çözünüz.

Çözüm: $\mathcal{L}\{y^{(4)}-2y''+y\}=\mathcal{L}\{\sin t\}$

$$s^4Y(s)-2s^2Y(s)+Y(s)=\frac{1}{s^2+1}$$

$$Y(s)=\frac{1}{(s^2+1)(s^4-2s^2+1)}$$

$$Y(s)=\frac{1}{(s^2+1)(s^2-1)^2}=\frac{As+B}{s^2+1}+\frac{C}{s-1}+\frac{D}{(s-1)^2}+\frac{E}{s+1}+\frac{F}{(s+1)^2}$$

$$\mathcal{L}^{-1}\{Y(s)\}=\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{4}\frac{1}{s^2+1}-\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{s-1}+\frac{1}{8}\frac{1}{(s-1)^2}\div\frac{1}{4}\frac{1}{s+1}+\frac{1}{8}\frac{1}{(s+1)^2}\right.$$

$$y(t)=\frac{1}{4}\sin t-\frac{1}{4}e^t+\frac{1}{8}\cdot t\cdot e^t-\frac{1}{4}e^{-t}+\frac{1}{8}te^{-t}$$

$$=\frac{1}{8}\left[2\sin t-2e^t-2e^{-t}+te^t+te^{-t}\right]$$

$$=\frac{1}{8}\left[e^t(t-2)+e^{-t}(t+2)\right]$$