

✓ Birinci mertebeden lineer olmayan denklemler.

$P=Z_x$, $Q=Z_y$ olsun örne,

$$F(x,y,z,P,Q)=0 \quad (1)$$

şeklinde birinci mertebeden genel KDD inceleyeceğiz.

Burada F 'nin P ve Q ya göre lineer olması gerekmemektedir.

✓ Tanım: $G(x,y,z,a,b)=0 \quad (2)$

İki parametrelili bir yüzey ailesi, birinci mertebeden (1) denklemini sağlarsa bu yüzey ailesine (1)'in tam integrali denir.

Birinci mertebeden lineer olmayan denklemler genelde doğrudan çözülmeyebilir. Bunun için aynı ortak çözüme sahip iki ayrı denklem ele alacağız. Lineer olmayan

$F(x,y,z,P,Q)=0$ denklemini verildiğinde aynı çözüme sahip ikinci denklemini kendimiz bulacağız.

✓ Bağımsız Sistemler

Birinci mertebeden ;

$$F(x,y,z,P,Q)=0, \quad G(x,y,z,P,Q)=0 \quad (3)$$

denklemleri gözönüne alalım.

$F(x,y,z,P,Q)=0$ denkleminin her çözümünü aynı zamanda $G(x,y,z,P,Q)=0$ denkleminde çözümünü oluyorsa, bu iki

denkleme bağıdırabilirler denir.

$F(x,y,z,p,q)=0$ ve $G(x,y,z,p,q)=0$ denklemlerinden
 $p=f(x,y,z)$, $q=g(x,y,z)$ bağıntıları elde edilebiliyorsa
 o zaman,

$\boxed{dz = p dx + q dy}$ veya $dz = f(x,y,z)dx + g(x,y,z)dy$
 ifadesi tam diferansiyel olur. Bu durumda,

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial g}{\partial x} \quad (4)$$

olur. Buna bağıdırabilirlik koşulu denir. ~~Bazen~~ (3) sisteminden p ve q değerlerini x,y,z cinsinden görmeden de denklemin bağıdırabilir olup olmadığını görebiliriz. Bunun için x,y,z bağımsız değişkenler gibi değerlendirilerek (3) den $p=f(x,y,z)$, $q=g(x,y,z)$ fonksiyonlarının elde edilebilir olduğunu kabul edelim. (3) sistemindeki her bir denklemin x' e göre türevlerini, kapalı fonksiyonların türevleri özelliğini kullanarak,

$$\left. \begin{aligned} (1) \quad \frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial p} \cdot \frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial q} \cdot \frac{\partial q}{\partial x} &= 0 \\ (2) \quad \frac{\partial G}{\partial x} + \frac{\partial G}{\partial p} \cdot \frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\partial G}{\partial q} \cdot \frac{\partial q}{\partial x} &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (5)$$

şeklinde yazabiliriz. (5) deki birinci denklemin $\frac{\partial G}{\partial p}$ ile ikinci denklemin $-\frac{\partial F}{\partial p}$ ile çarpıp taraf tarafa toplayalım.

$$\frac{\partial(F,G)}{\partial(p,q)} \cdot \left(\frac{\partial q}{\partial x} \right) + \frac{\partial(F,G)}{\partial(p,x)} = 0 \quad (6)$$

dur. Benzer şekilde (3) sistemindeki her bir denklemin y ve z ye göre türevlerini de alırsak,

$$\frac{\partial(F,G)}{\partial(p,q)} \left(\frac{\partial p}{\partial y} \right) + \frac{\partial(F,G)}{\partial(y,q)} = 0, \quad \frac{\partial(F,G)}{\partial(p,q)} \left(\frac{\partial p}{\partial z} \right) + \frac{\partial(F,G)}{\partial(z,q)} = 0$$

$$\frac{\partial(F,G)}{\partial(p,q)} \left(\frac{\partial q}{\partial z} \right) + \frac{\partial(F,G)}{\partial(p,z)} = 0 \quad (7)$$

esitlikleri elde edilir. (2) bağıdazabilirlik koşulunu;

$$\frac{\partial p}{\partial y} + \frac{\partial p}{\partial z} \left(\frac{\partial z}{\partial y} \right) = \frac{\partial q}{\partial x} + \frac{\partial q}{\partial z} \left(\frac{\partial z}{\partial x} \right) \quad (8)$$

şeklinde yazabiliriz. (6) ve (7) eşitliklerinden

$\frac{\partial p}{\partial y}, \frac{\partial p}{\partial z}, \frac{\partial q}{\partial x}, \frac{\partial q}{\partial z}$ türevleri bulunur.

$$\frac{\partial p}{\partial y} = - \frac{\frac{\partial(F,G)}{\partial(y,q)}}{\frac{\partial(F,G)}{\partial(p,q)}}, \quad \frac{\partial p}{\partial z} = - \frac{\frac{\partial(F,G)}{\partial(z,q)}}{\frac{\partial(F,G)}{\partial(p,q)}}$$

$$\frac{\partial q}{\partial x} = \quad \frac{\partial q}{\partial z} =$$

dur. Bu türevleri (8) bağıdazabilirlik koşulunda yerine yazarsak;

$$\frac{\partial F}{\partial p} \left(\frac{\partial q}{\partial x} + p \frac{\partial q}{\partial z} \right) + \frac{\partial F}{\partial q} \left(\frac{\partial q}{\partial y} + q \frac{\partial q}{\partial z} \right) - \frac{\partial G}{\partial p} \left(\frac{\partial q}{\partial x} + p \frac{\partial q}{\partial z} \right) - \frac{\partial G}{\partial q} \left(\frac{\partial q}{\partial y} + q \frac{\partial q}{\partial z} \right) = 0 \quad (9)$$

elde edilir. (Bağıdazabilirlik Koşulu)

Not: Bir sistem için bağdasabilme koşulu bazen sistemler çözülebilirlik koşulu olarak da adlandırılır.

✓ Lagrange-Charpit Yöntemi

$F(x, y, z, p, q) = 0$ şeklinde birinci mertebeden lineer olmayan KDD çözümüne alalım. Bununla bağdasabilen bir başka denklem

$$G(x, y, z, p, q) = a \quad (a: \text{sabit})$$

olsun. Bu durumda iki denklemde aynı çözüme sahiptir. ^{Bu denklemlerden} Bu denklemler için (9) bağdasabilme koşulunu kullanırsak,

$$\frac{\partial F}{\partial p} \left(\frac{\partial G}{\partial x} \right) + \frac{\partial F}{\partial q} \left(\frac{\partial G}{\partial y} \right) + \left(p \frac{\partial F}{\partial p} + q \frac{\partial F}{\partial q} \right) \left(\frac{\partial G}{\partial z} \right) - \left(\frac{\partial F}{\partial x} + p \frac{\partial F}{\partial z} \right) \left(\frac{\partial G}{\partial p} \right) - \left(\frac{\partial F}{\partial y} + q \frac{\partial F}{\partial z} \right) \left(\frac{\partial G}{\partial q} \right) = 0$$

beş bağımsız değişkenli G ye göre lineer, homojen dif. denklemi elde edilir. Bu denklemin Lagrange yardımcı sistemini yazarız,

$$\frac{dx}{F_p} = \frac{dy}{F_q} = \frac{dz}{pF_p + qF_q} = \frac{-dp}{F_x + pF_z} = \frac{-dq}{F_y + qF_z} = \frac{dG}{0} \quad (10)$$

olur. Son denkbenden; $G = a$ (a : sabit) olduğu anktır.

(10) sisteminden $G(x, y, z, p, q) = a$ ara integrali bildiğimiz yöntemle bulunur.

Bu ora integralle $F(x,y,z,p,q)=0$ denklemi arasında $p=f(x,y,z)$, $q=g(x,y,z)$ şeklinde p ve q değerleri çözümlenir ;

$$dz = p dx + q dy$$

tam diferansiyel denkleme yerne yazılır. ve burada integrallenmesiyle ;

$$H(x,y,z,a,b)=0 \quad (11)$$

iki parametrelili bir tam integral (tam çözüm) elde edilir. Burada $\frac{\partial(F,G)}{\partial(p,q)} \neq 0$ olmalıdır.

(10) Sistemine Lagrange-Charpit Sistemi denir.

Not: (11) yüzey ailesi (1) in genel çözümünü olmayıp tam integral (tam çözüm) yüzeyin bir alt ailesidir. Çünkü (11) tam integrali keyfi fonksiyon içermemektedir.

Örnek: Ödev (sonra) Top $xp^2 + yq^2 = z$ denkleminin tam integralini bulunuz.

Çözüm: $F(x,y,z,p,q) = xp^2 + yq^2 - z = 0$

$$\frac{dx}{F_p} = \frac{dy}{F_q} = \frac{dz}{pF_p + qF_q} = \frac{-dp}{F_x + pF_z} = \frac{-dq}{F_y + qF_z}$$