

Birinci mertebeden yarı lineer Kısmi Dif. Denklemler (Lagrange Metodu)

$P(x,y,z)$, $Q(x,y,z)$, $R(x,y,z)$ fonksiyonları xyz uzayının bir D bölgesinde tanımlı, bağımsız değişkenlere göre birinci mertebeden sürekli türetilenebilir fonksiyonlar olmak üzere,

$$P(x,y,z)z_x + Q(x,y,z)z_y = R(x,y,z) \quad (1)$$

denklemin yarı lineer KDD. denir.
(Birinci mertebeden)

(1) denkleminin çözümünün $z=f(x,y)$ şeklinde bir yüzey arası; olduğunu kabul edelim.
 $\vec{N} = (z_x, z_y, -1) = (P, Q, -1)$ vektörü bu yüzey arasıma dik olan Normal vektördür. (Yüzeyin Normali)
(Gradient vektördür)

$\vec{M} = (P, Q, R)$ vektörü, $z=f(x,y)$ yüzey arasıma teğet bir vektör olur. $\vec{N}, \vec{M}$ dik olur.

$$\vec{N} \cdot \vec{M} = 0 \text{ olduğundan,}$$

$$P \cdot z_x + Q \cdot z_y = R \text{ olur. Yani (1) denklemi olur.}$$

$\vec{M} = (P, Q, R)$ vektörü, $\vec{N} = (P, Q, -1)$ vektörüne dik olmasına göre bu vektör yüzey üzerindeki bir Γ eğrisinin teğet vektörüne paralel olacaktır. Γ eğrisi xyz uzayında $\vec{V} = (x, y, z)$ vektörleri denklemi ile verilirse Γ 'nin teğet vektörleri $\vec{T}_n = (dx, dy, dz)$ şeklindedir. Bu durumda $\vec{M} = (P, Q, R)$ vektörü $\vec{T}_n = (dx, dy, dz)$ vektörüne paraleldir. Bu durumda;

$$\frac{dx}{P} = \frac{dy}{Q} = \frac{dz}{R} \quad (2)$$

olur. (2) eşitliğine (bağıntısına) (1) yarı lineer denklemi içeren Lagrange Yardımcı Sistemi denir. (2) yardımcı sisteminden iki tane lineer bağımsız adı dif. denklem elde edilir. (2) yardımcı sistemden lineer bağımsız çözümleri:

$$u(x, y, z) = C_1, \quad v(x, y, z) = C_2$$

şeklinde dir. Bunlara karakteristik adı verilir.

Burada $\text{grad } u \times \text{grad } v \neq 0$ dir.

Birinci mertebeden yarı lineer KOD 'ın genel çözümünü ;

$$F(u, v) = 0 \text{ şeklinde olacaktır.}$$

Burada F keyfi fonksiyondur. ($F(C_1, C_2) = 0$)

Lagrange Yardımcı Sisteminde ;

$$\frac{dx}{P} = \frac{dy}{Q} = \frac{dz}{R} = \frac{\lambda dx + \mu dy + \kappa dz}{\lambda P + \mu Q + \kappa R} = \frac{\lambda dx + \kappa dz}{\lambda P + \kappa R} \dots$$

şeklinde orantı kurallarının ihtiyacı duyulur.

Örnek: $xz_x + yz_y = xy(z^2 + 1)$ KOD 'nın genel çözümünü bulunuz.

Çözüm: $\frac{dx}{x} = \frac{dy}{y} = \frac{dz}{xy(z^2 + 1)}$

(1) $\frac{dx}{x} = \frac{dy}{y} \Rightarrow \int \frac{dx}{x} = \int \frac{dy}{y} \quad \ln x = \ln y + \ln C_1$

$$\left(\frac{x}{y} \right)_u = C_1$$

$$\boxed{u = \frac{x}{y} = C_1}$$

$$\boxed{x = C_1 y}$$

$$\frac{dy}{y} = \frac{dz}{xy(z^2+1)}$$

$$dy = \frac{dz}{x(z^2+1)}, \quad x = C_1 y \text{ olduğundan,}$$

$$dy = \frac{dz}{C_1 y (z^2+1)}$$

$$\int C_1 y dy = \int \frac{dz}{z^2+1} \Rightarrow C_1 \frac{y^2}{2} = \arctan z + C_2$$

$\downarrow$
 $C_1 = \frac{x}{y} \text{ olduğundan}$

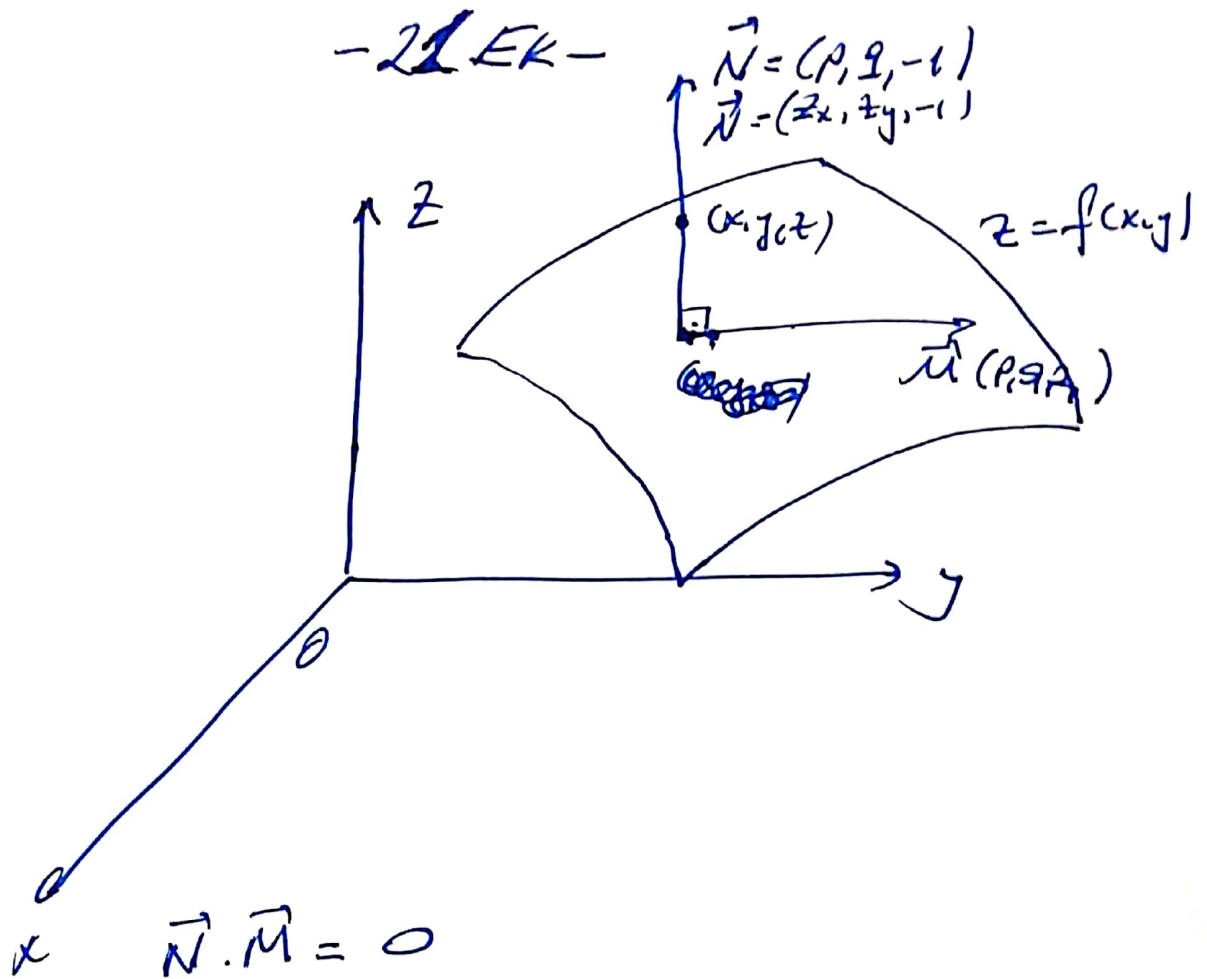
$$v = \frac{1}{2} xy - \arctan z = C_2 \text{ olur.}$$

burada $\text{grad } u \times \text{grad } v \neq 0$ dir.

$$F(u, v) = 0$$

$$F\left(\frac{x}{y}, \frac{1}{2} xy - \arctan z\right) = 0 \text{ şeklinde}$$

genel çözüm bulunmuş olur.



$$P(x, y, z) \cdot z_x + Q(x, y, z) \cdot z_y = R(x, y, z) \quad (1)$$

$$\frac{dx}{P} = \frac{dy}{Q} = \frac{dz}{R} \quad (2)$$

(Lagrange Yardımcı Sistemleri)