EK-1

$$\boxed{L^{-1}\left\{\frac{F(s)}{s}\right\} = \int_0^t f(u)\,du}$$

$$\boxed{\lim_{t\to 0^+}\frac{f(t)}{t} \text{ var. ve sonlu ise } \quad L\left\{\frac{f(t)}{t}\right\} = \int_s^\infty F(u)\,du}$$

Örnek: $L^{-1}\left\{\underbrace{\arctan\left(\frac{1}{s}\right)}\right\} = ?\quad L^{-1}\left\{\underset{?}{F(s)}\right\}$

$$L\left\{t f(t)\right\} = -\frac{dF(s)}{ds} \qquad \frac{dF}{ds} = \frac{-\frac{1}{s^2}}{1+\frac{1}{s^2}} = -\frac{1}{1+s^2}$$

$$t f(t) = -L^{-1}\left\{\frac{dF}{ds}\right\}$$

$$= -L^{-1}\left\{-\frac{1}{1+s^2}\right\} = \sin t$$

$$\boxed{f(t) = \frac{\sin t}{t}}$$ bulunur.

Örnek: $L\left\{\frac{f(t)}{t}\right\} = \int_s^\infty F(u)\,du \qquad \lim_{t\to 0^+}\frac{f(t)}{t}$ var ve sonlu ise

$$L\left\{\frac{\sin t}{t}\right\} = \int_s^\infty \frac{du}{1+u^2} = \arctan u \Big|_s^\infty$$

$$\boxed{= \frac{\pi}{2} - \arctan s.}$$

Örnek: $L^{-1}\left\{\frac{1}{s(s^2+1)}\right\} = ?\quad L^{-1}\left\{\frac{\frac{1}{s^2+1}}{s}\right\} = \int_0^t \sin u\,du.$

$$= -\cos u\Big|_0^t = 1 - \cos t$$

EK-2

Örnek: $F(s) = \ln \dfrac{s-2}{s+2}$ $\qquad \mathcal{L}^{-1}\{F(s)\} = ?$

$$F(s) = \ln(s-2) - \ln(s+2)$$

$$F'(s) = \frac{1}{s-2} - \frac{1}{s+2}$$

$$\mathcal{L}^{-1}\{F'(s)\} = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s-2} - \frac{1}{s+2}\right\} = (-1)^1 \cdot t \cdot f(t)$$

$$= e^{2t} - e^{-2t} = -t\,f(t)$$

$$f(t) = -\frac{e^{2t} - e^{-2t}}{t} = \boxed{-\frac{2\sinh(2t)}{t}}$$ bulunur

Örnek: $\boxed{\mathcal{L}^{-1}\left\{\dfrac{F(s)}{s}\right\} = \displaystyle\int_0^t f(u)\,du}$ $\quad \lim_{t \to 0^+} \dfrac{f(t)}{t}$ var ve Sonlu $\quad \mathcal{L}\left\{\dfrac{f(t)}{t}\right\} = \displaystyle\int_s^\infty F(u)\,du$

$$\mathcal{L}\left\{\frac{-2\sinh(2t)}{t}\right\} = \int_s^\infty -\frac{4}{u^2-4}\,du = -4 \cdot \frac{1}{4} \ln \frac{u-2}{u+2}\Bigg|_s^\infty$$

$$f(t) = -2\sinh(2t)$$

$$\mathcal{L}\{-2\sinh(2t)\} = -2 \cdot \frac{2}{s^2-4} = -\frac{4}{s^2-4}$$

$$= -\left(0 - \ln \frac{s-2}{s+2}\right)$$

$$= \boxed{\ln \frac{s-2}{s+2}}$$

EK-3

Örnek: $\mathcal{L}\left\{\frac{f(t)}{t}\right\} = \int_s^{\infty} F(u)\,du$

$$\mathcal{L}\left\{\frac{e^t \sin t}{t}\right\} = ?$$

$\mathcal{L}\{e^t \sin t\} = \frac{1}{(s-1)^2+1}$ dır.

$$\mathcal{L}\left\{\frac{e^t \sin t}{t}\right\} = \int_s^{\infty} \frac{du}{(u-1)^2+1} = \arctan(u-1)\Big|_s^{\infty}$$

$$= \frac{\pi}{2} - \arctan(s-1)$$

Örnek: $\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{\pi}{2} - \arctan(s-1)\right\} = ?$

$F(s) = \frac{\pi}{2} - \arctan(s-1) \Rightarrow F'(s) = \frac{dF}{ds} = -\frac{1}{(s-1)^2+1}$

$\mathcal{L}\{t \cdot f(t)\} = -F'(s)$

$$-tf(t) = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{-1}{(s-1)^2+1}\right\} = e^t \cdot \sin t$$

$\boxed{f(t) = \frac{e^t \sin t}{t}}$ bulunur

EK-4

Ödev: 1) $F(s) = \ln \frac{s^2+1}{s^2+4}$ 2) $F(s) = \frac{s^2+1}{(s+2)(s-3)}$

3) $F(s) = \ln\left(1+\frac{1}{s^2}\right)$ 4) $F(s) = \arctan \frac{s}{s+2}$

5) $F(s) = \frac{s}{(s^2+1)^3}$ $f(t) = ?$

$f(t) = \mathcal{L}^{-1}\{F(s)\}$

Laplace Dönüşümü

Tanım: $f(t)$, $[0,\infty)$ üzerinde tanımlanan bir fonksiyon olsun. f'nin Laplace dönüşümü

$$F(s) = L\{f(t)\} = \int_0^\infty e^{-st} \cdot f(t)\,dt \qquad (1)$$

integrali mevcut ise (sonlu ise) $F(s)$ fonksiyonudur. $F(s)$ nin tanım kümesi (1) integralinin mevcut olduğu bütün s değerlerinin kümesidir.

(1) integrali bir genelleştirilmiş integraldir.
(1. tip improper integralidir)

$$\int_0^\infty e^{-st} f(t)\,dt = \lim_{b\to\infty} \int_0^b e^{-st} f(t)\,dt \text{ dir.}$$

Örnek: $f(t) = \begin{cases} 2, & 0<t<5 \\ 0, & 5<t<10 \\ e^{4t}, & 10<t \end{cases}$

ise $L\{f(t)\} = ?$ (fonksiyonun Laplace Dönüşümünü bulunuz).

$s>4$ için;

$$F(s) = \int_0^\infty e^{-st} f(t)\,dt$$

$$= \int_0^5 e^{-st} \cdot 2\,dt + \int_5^{10} e^{-st} \cdot 0\,dt + \int_{10}^\infty e^{-st} \cdot e^{4t}\,dt$$

$$= 2\int_0^5 e^{-st}\,dt + \lim_{b\to\infty} \int_{10}^b e^{-(s-4)t}\,dt$$

$$= -\frac{2}{s}\left(e^{-5s} - 1\right) + \lim_{b\to\infty} -\frac{1}{s-4}\left[e^{-(s-4)b} - e^{-(s-4)10}\right]$$

$$F(s) = \frac{2}{s} - \frac{2e^{-5s}}{2} + \frac{e^{-10(s-4)}}{s-4}$$ olur. $s>4$ için

---

Laplace Dönüşümünün Varlığı

$[a,b]$ aralığında tanımlı bir $f(t)$ fonksiyonu bir t_0 noktasında süreksiz fakat tek taraflı limitleri

yani, $\lim_{t\to t_0^-} f(t)$ ve $\lim_{t\to t_0^+} f(t)$ var ve

sonlu sayılar ise $f(y)$ ye $t_0 \in (a,b)$ de sıçramalı süreksizliğe sahiptir denir.

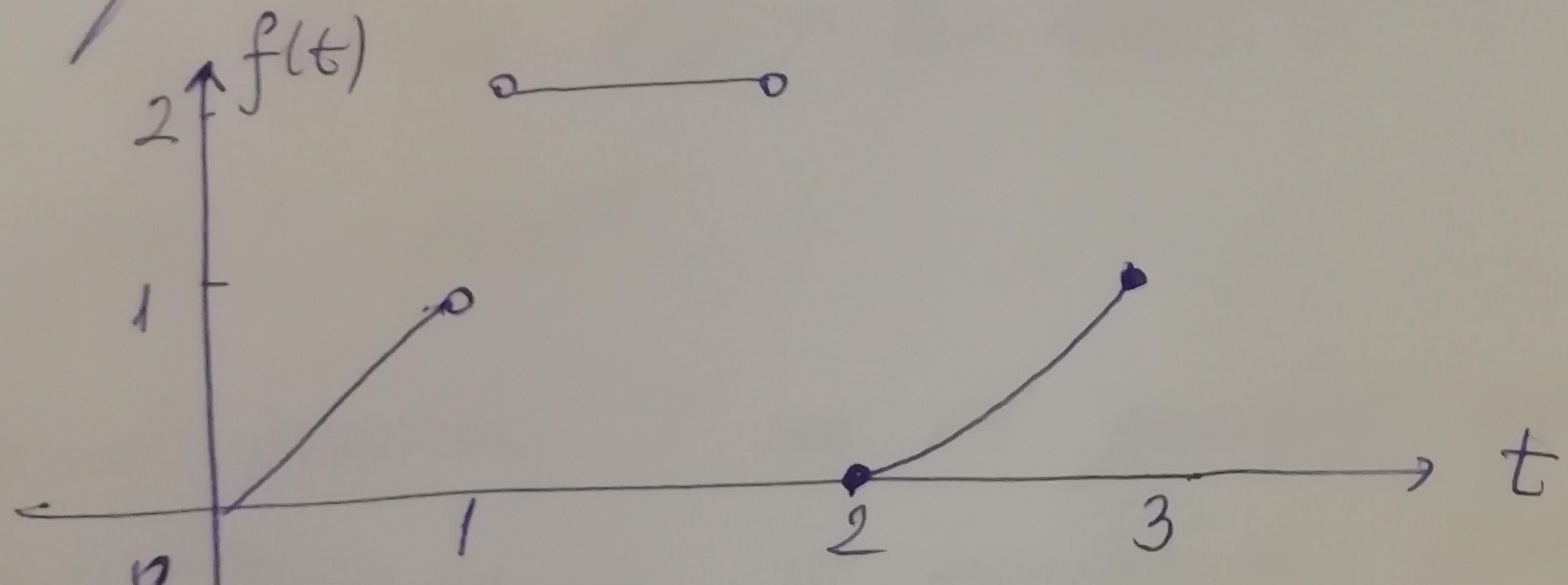
Parçalı Süreklilik

Eğer $f(t)$ sıçramalı süreksizliğe sahip olduğu sonlu sayıdaki nokta haricinde $[a,b]$'nin her noktasında sürekli ise $f(t)$ $[a,b]$ aralığında parçalı süreklidir denir.

Örnek:

$$f(t) = \begin{cases} t, & 0<t<1 \\ 2, & 1<t<2 \\ (t-2)^2, & 2\leq t\leq 3 \end{cases}$$

fonksiyonu $[0,3]$ aralığında parçalı süreklidir.



$f(t)$ fonksiyonunun $(0,1), (1,2), (2,3]$ aralıklarında sürekli olduğu görülmektedir. Ayrıca sonlu sayıda tek taraflı limitin mevcut olmasından dolayı $t=0,1,2$ noktalarında fonksiyon sıçrama süreksizliğine sahiptir. $t=1$ de sol limit 1, sağ limit 2 dir. Dolayısıyla $f(t)$, $[0,3]$ üzerinde parçalı süreklidir.

Not: Bir fonksiyonun sonlu bir aralıkta parçalı sürekli olması onun integrallenebilir olmasını gerektirir. Tersine $[0,\infty)$ üzerinde parçalı süreklilik, bu aralık üzerindeki genelleştirilmiş integralin varlığını garanti etmez. Bu durumda büyük t ler için de integralin durumunu incelemek gerekmektedir.

α mertebeden üstel

Eğer, bütün $t \geq T$ ler için

$$|f(t)| \leq Me^{\alpha t}$$

olacak şekilde T ve M pozitif sabitleri varsa $f(t)$ fonksiyonuna α mertebeden üsteldir denir.

Örnek: $f(t) = e^{5t}\sin 2t$ fonksiyonu $\alpha = 5$ mertebeden üsteldir. Çünkü $M = 1$ ve herhangi bir $T > 0$ pozitif sabiti için;

$$|e^{5t}\cdot\sin 2t| \leq e^{5t} \text{ dir.}$$

Bu ise $f(t)$ fonksiyonunun $Me^{\alpha t}$ fonksiyonundan daha hızlı büyüyemeyeceğini ifade eder.

Örneğin e^{t^2} fonksiyonu üstel mertebeden değildir.
Herhangi bir α için

$$\lim_{t\to\infty} \frac{e^{t^2}}{e^{\alpha t}} = \lim_{t\to\infty} e^{t(t-\alpha)} = \infty \text{ olur.}$$

O halde e^{t^2} herhangi bir α için $e^{\alpha t}$ den daha hızlı bir şekilde büyür.

Not: Sabit katsayılı lineer diferansiyel denklemlerin çözümlerinde karşılaşılan fonksiyonlardan, polinomlar, üstel fonksiyonlar, sinüs ve kosinüs fonksiyonları üstel mertebeden parçalı sürekli fonksiyonlardır.

Tanım: Eğer $f(t)$, $[0,\infty)$ üzerinde parçalı sürekli ve α mertebeden üstel ise $s>\alpha$ için $L\{f(t)\}$ mevcuttur.

$$\boxed{\mathcal{L}\{f(t)\} = \int_0^\infty e^{-st} \cdot f(t)\,dt}$$

Örnekler

1) $f(t) = \begin{cases} 0, & 0<t<2 \\ t, & 2<t \end{cases}$ ise $\mathcal{L}\{f(t)\} = ?$

$$\mathcal{L}\{f(t)\} = \int_0^2 e^{-st} \cdot 0\,dt + \int_2^\infty e^{-st} \cdot t\,dt$$

$$= -\frac{1}{s} e^{-st} \cdot t \Big|_2^\infty + \frac{1}{s}\int_2^\infty e^{-st}\,dt$$

$$= \frac{2}{s} e^{-2s} + \frac{1}{s}\left(\frac{-1}{s}\right) e^{-st} \Big|_2^\infty$$

$$= \frac{2}{s} e^{-2s} + \frac{1}{s^2} e^{-2s} = \left(\frac{2}{s} + \frac{1}{s^2}\right) e^{-2s} \checkmark$$

Ödev: 1) $f(t) = \begin{cases} \sin t, & 0<t<\pi \\ 0, & \pi<t \end{cases}$

2) $f(t) = \begin{cases} e^{2t}, & 0<t<3 \\ 1, & 3<t \end{cases}$

3) $f(t) = \begin{cases} 1-t, & 0<t<1 \\ 0, & 1<t \end{cases}$

$$\mathcal{L}\{f(t)\} = ?$$

$$\boxed{\int_0^t f(\tau)d\tau = \frac{F(s)}{s}}$$

Formula Sheet for Laplace Transform $L\{f(t)\} = \int_0^\infty e^{-st} f(t)dt$

1) $L\{1\} = \dfrac{1}{s}$ $\qquad L\{t^n\} = \dfrac{n!}{s^{n+1}}$, **n is a positive integer**

2) $L\{\sin kt\} = \dfrac{k}{s^2+k^2}$ $\qquad L\{\cos kt\} = \dfrac{s}{s^2+k^2}$

3) $L\{e^{at}\} = \dfrac{1}{s-a}$

4) $L\{e^{at} f(t)\} = F(s)\big|_{s\to s-a}$ $\qquad L^{-1}\{F(s)\big|_{s\to s-a}\} = e^{at} f(t)$

5) $L\{g(t)U(t-a)\} = e^{-as} L\{g(t+a)\}$ $\qquad L^{-1}\{e^{-as} F(s)\} = f(t-a)U(t-a)$

6) $L\{U(t-a)\} = \dfrac{e^{-as}}{s}$ $\qquad L^{-1}\{\dfrac{e^{-as}}{s}\} = U(t-a)$

7) $L\{f^{(n)}(t)\} = s^n F(s) - s^{n-1} f(0) - s^{n-2} f'(0) - \dots - f^{(n-1)}(0)$

8) $L\{t^n f(t)\}(s) = (-1)^n \dfrac{d^n F(s)}{ds^n}$ $\qquad L^{-1}\{\dfrac{d^n F(s)}{ds^n}\} = (-1)^n t^n f(t)$

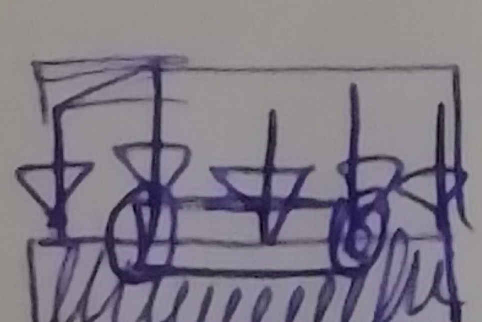
9) $L\{f(t) * g(t)\} = F(s).G(s)$ $\qquad f(t) * g(t) = \int_0^t f(\tau) g(t-\tau)d\tau$

10) $L\{\int_0^t f(\tau)d\tau\} = \dfrac{F(s)}{s}$ $\qquad L^{-1}\{F(s).G(s)\} = f(t) * g(t)$

11) $L\{\delta(t)\} = 1$ $\qquad L\{\delta(t-t_0)\} = e^{-st_0}$

---

12) **If** $f(t)$ **is periodic with period** T **then** $L\{f(t)\} = \dfrac{1}{1-e^{-Ts}} \int_0^T e^{-st} f(t)dt$.



$$L\{\int_0^t f(\tau)d\tau\} = \frac{F(s)}{s}$$

Laplace-1
" -2.

$L^{-1}\{$

TEMEL LAPLACE DÖNÜŞÜMLERİ

$$f(t) = \mathcal{L}^{-1}\{F(s)\} \quad \Longrightarrow \quad F(s) = \mathcal{L}\{f(t)\}$$

1. $f(t) = 1 \implies \mathcal{L}\{1\} = \dfrac{1}{s} \quad (s > 0)$
2. $f(t) = t \implies \mathcal{L}\{t\} = \dfrac{1}{s^2} \quad (s > 0)$
3. $f(t) = t^n \quad (n = 1, 2, \ldots) \implies \mathcal{L}\{t^n\} = \dfrac{(n)!}{s^{n+1}} \quad (s > 0)$
4. $f(t) = t^p \quad (p > -1) \implies \mathcal{L}\{t^p\} = \dfrac{\Gamma(p+1)}{s^{p+1}} \quad (s > 0)$
5. $f(t) = e^{at} \implies \mathcal{L}\{e^{at}\} = \dfrac{1}{s-a} \quad (s > a)$
6. $f(t) = \sin at \implies \mathcal{L}\{\sin at\} = \dfrac{a}{s^2 + a^2} \quad (s > 0)$
7. $f(t) = \cos at \implies \mathcal{L}\{\cos at\} = \dfrac{s}{s^2 + a^2} \quad (s > 0)$
8. $f(t) = \sinh at \implies \mathcal{L}\{\sinh at\} = \dfrac{a}{s^2 - a^2} \quad (s > |a|)$
9. $f(t) = \cosh at \implies \mathcal{L}\{\cosh at\} = \dfrac{s}{s^2 - a^2} \quad (s > |a|)$
10. $f(t) = e^{at} \sin bt \implies \mathcal{L}\{e^{at} \sin bt\} = \dfrac{b}{(s-a)^2 + b^2} \quad (s > a)$
11. $f(t) = e^{at} \cos bt \implies \mathcal{L}\{e^{at} \cos bt\} = \dfrac{s-a}{(s-a)^2 + b^2} \quad (s > a)$
12. $f(t) = t^n e^{at} \quad (n = 1, 2, \ldots) \implies \mathcal{L}\{t^n e^{at}\} = \dfrac{n!}{(s-a)^{n+1}} \quad (s > a)$
13. $f(t) = u_c(t) \implies \mathcal{L}\{u_c(t)\} = \dfrac{e^{-cs}}{s} \quad (s > 0)$
14. $h(t) = u_c(t) f(t-c) \implies \mathcal{L}\{u_c(t) f(t-c)\} = e^{-cs} F(s)$
15. $h(t) = e^{ct} f(t) \implies \mathcal{L}\{e^{ct} f(t)\} = F(s-c)$
16. $h(t) = f(ct) \implies \mathcal{L}\{f(ct)\} = \dfrac{1}{c} F\left(\dfrac{s}{c}\right) \quad (c > 0)$
17. $h(t) = \displaystyle\int_0^t f(t-\tau) g(\tau)\, d\tau \implies \mathcal{L}\{\int_0^t f(t-\tau) g(\tau)\, d\tau\} = F(s)G(s)$
18. $f(t) = \delta(t-c) \implies \mathcal{L}\{\delta(t-c)\} = e^{-cs}$

19. $h(t) = f^{(n)}(t) \Rightarrow$

$\mathcal{L}\{f^{(n)}(t)\} = s^n F(s) - s^{n-1} f(0) - \dots - f^{(n-1)}(0)$

20. $h(t) = (-1)^n t^n f(t) \Rightarrow \mathcal{L}\{(-1)^n t^n f(t)\} = F^{(n)}(s)$

$L\{f(t)\} = F(s)$ ise

$L\{(-1)^n t^n f(t)\} = F^{(n)}(s)$ dir.

$\lim_{t \to 0} \frac{f(t)}{t}$ için $L\left\{\frac{f(t)}{t}\right\} = \int_s^\infty F(s)\,ds$

$L\left\{\int_0^t f(z)\,dz\right\} = \frac{F(s)}{s}$