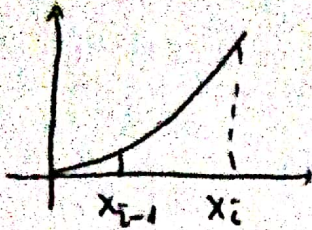


(17)

- RIEMANN TOPLAMLARI -

 $y = x^2$; $[0, 4]$ için $n=4$ olarak $L(f, P_4) = ?$ $U(f, P_4) = ?$ 

$$\Delta x_i = \Delta x = \frac{b-a}{n} = \frac{4-0}{4} = 1$$

$$x_i = x_0 + i \cdot \Delta x = 0 + i \cdot 1$$

$$x_i = i$$

$$x_{i-1} = i-1$$

Verilen fonksiyon artan olduğundan

$$c_i = x_{i-1} = i-1$$

$$u_i = x_i = i \text{ olarak}$$

$$L(f, P_4) = \sum_{i=1}^n f(c_i) \cdot \Delta x_i = \sum_{i=1}^4 f(i-1) \cdot 1 = \sum_{i=1}^4 (i-1)^2 = \sum_{j=0}^3 j^2$$

$$= \frac{3 \cdot (3+1) \cdot (2 \cdot 3 + 1)}{6} = 14$$

$$U(f, P_4) = \sum_{i=1}^n f(u_i) \cdot \Delta x_i = \sum_{i=1}^4 f(i) \cdot 1 = \sum_{i=1}^4 i^2$$

$$= \frac{4 \cdot (4+1) \cdot (2 \cdot 4 + 1)}{6}$$

$$= 30$$

Yrd. Doç. Dr. Müslüm Özşık

MATEMATİK I - UYGULAMA
TOPLAM SEMBOLÜ / RIEMANN TOPLAMLARI - INTEGRAL - ALAN HESABI

18) $y = e^x : [-2, 2]$ için $n=4$ alt aral Riemann toplamlarını bulunuz.

Fonksiyon verilen aralıktaki artan fonksiyondur. Dolayısıyla

$$c_i = x_{i-1}$$

$$u_i = x_i \text{ dir.}$$

$$\Delta x = \frac{b-a}{n} = \frac{2-(-2)}{4} = 1$$

$$x_i = x_0 + i \cdot \Delta x = -2 + i \cdot 1$$

$$x_i = i - 2$$

$$x_{i-1} = (i-1) - 2 = i - 3$$

olarak $c_i = x_{i-1} = i - 3$

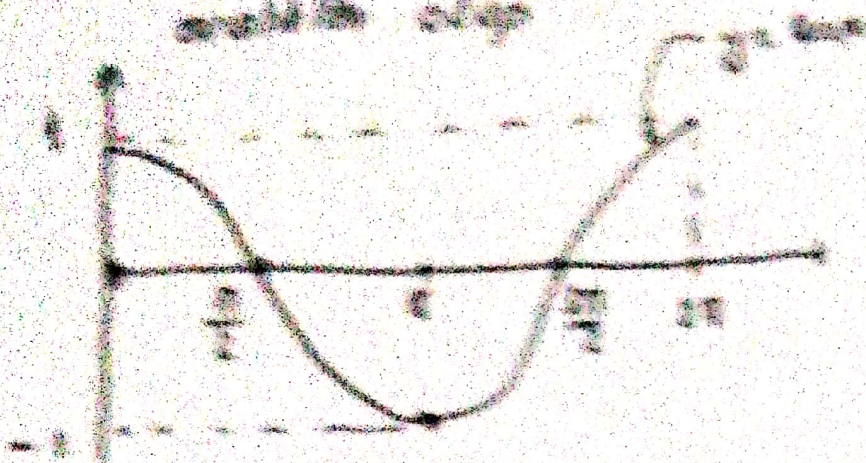
$$u_i = x_i = i - 2$$

$$\begin{aligned} L(f, P_4) &= \sum_{i=1}^n f(c_i) \Delta x_i = \sum_{i=1}^4 f(i-3) \cdot 1 = \sum_{i=1}^4 e^{i-3} = e^{-2} + e^{-1} + e^0 + e^1 \\ &= \frac{1}{e^2} + \frac{1}{e} + 1 + e \\ &= \frac{e^3 + e^2 + e + 1}{e^2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} U(f, P_4) &= \sum_{i=1}^n f(u_i) \cdot \Delta x_i \\ &= \sum_{i=1}^4 f(i-2) \cdot 1 = \sum_{i=1}^4 e^{i-2} = e^{-1} + 1 + e + e^2 \\ &= \frac{e^3 + e^2 + e + 1}{e} \end{aligned}$$

$y=f(x)=\cos x$; $[0, 2\pi]$ için $n=4$ alt bölge Riemann
çakırlarını bulunuz.

$[0, 2\pi]$ için $y=f(x)$ in aralık ve nodal noktaları
aşağıdaki gibidir.



$$\Delta x = \frac{b-a}{n} = \frac{2\pi-0}{4} = \frac{\pi}{2}$$

Riemann Toplamları için;

$$L(f, P_n) = \sum_{i=1}^n f(x_i) \Delta x_i = \sum_{i=1}^n f(x_i) \frac{\pi}{2}$$

$$= \frac{\pi}{2} [\cos \frac{\pi}{2} + \cos \pi + \cos \frac{3\pi}{2} + \cos 2\pi]$$

$$= \frac{\pi}{2} [0 - 1 - 1 + 1]$$

$$= -\pi$$

$$U(f, P_n) = \sum_{i=1}^n f(x_i) \Delta x_i = \sum_{i=1}^n f(x_i) \frac{\pi}{2}$$

$$= \frac{\pi}{2} [\cos 0 + \cos \frac{\pi}{2} + \cos \pi + \cos \frac{3\pi}{2}]$$

$$= \frac{\pi}{2} [1 + 0 - 1 + 0]$$

$$= 0$$

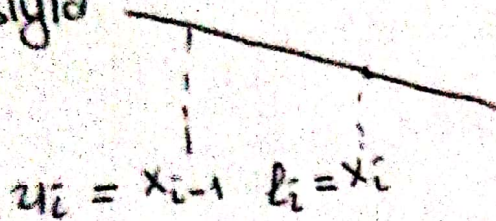
MATEMATİK I - UYGULAMA

TOPLAM SEMBOLÜ / RIEMANN TOPLAMLARI - INTEGRAL - ALAN HESABI

20

$y = f(x) = 1 - x$ fonksiyonunun $[0, 2]$ -deki
 $\lim_{n \rightarrow \infty} L(f, P_n) = ?$: $\lim_{n \rightarrow \infty} U(f, P_n) = ?$

Fonksiyon $[0, 2]$ de azalan fonksiyondur.
 Delaysıyla



$$\Delta x_i = \Delta x = \frac{2-0}{n} = \frac{2}{n}$$

$$x_i = a + i \cdot \Delta x = 0 + i \cdot \frac{2}{n}$$

$$x_i = \frac{2i}{n} = c_i$$

$$x_{i-1} = \frac{2(i-1)}{n} = c_{i-1}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} L(f, P_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n f(c_i) \Delta x_i = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n f\left(\frac{2i}{n}\right) \cdot \frac{2}{n}$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2}{n} \sum_{i=1}^n \left(1 - \frac{2i}{n}\right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2}{n} \left[\sum_{i=1}^n 1 - \sum_{i=1}^n \frac{2i}{n} \right]$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2}{n} \left[n - \frac{2}{n} \cdot \frac{n(n+1)}{2} \right] = \lim_{n \rightarrow \infty} 2 \left[1 - \frac{n(n+1)}{n^2} \right]$$

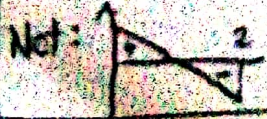
$$= 2[1 - 1] = 0 \text{ dir.}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} U(f, P_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n f(c_{i-1}) \Delta x_i = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n f\left(\frac{2(i-1)}{n}\right) \cdot \frac{2}{n}$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2}{n} \sum_{i=1}^n \left(1 - \frac{2(i-1)}{n}\right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2}{n} \left[\sum_{i=1}^n 1 - \frac{2}{n} \sum_{i=1}^n (i-1) \right]$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2}{n} \left[n - \frac{2}{n} \left[\frac{n(n+1)}{2} - n \right] \right] = \lim_{n \rightarrow \infty} 2 \left[1 - \frac{n(n+1)}{n^2} + \frac{2}{n} \right]$$

$$= 2[1 - 1 + 0] = 0 \text{ dir.}$$



Not: $\int_0^2 (1-x) dx = 0$ dir. Zaten $\lim_{n \rightarrow \infty} L(f, P_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} U(f, P_n)$ alan belirtir.

$$\int_0^2 (1-x) dx = \left[x - \frac{x^2}{2} \right]_0^2 = 2 - 2 = 0$$

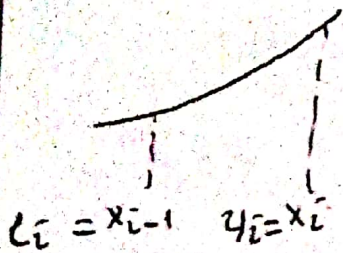
Yrd. Doç. Dr. Müslüm Özışık

61

MATEMATİK I - UYGULAMA
TOPLAM SEMBOLÜ / RIEMANN TOPLAMLARI - INTEGRAL - ALAN HESABI

(21)

$y=f(x)=e^x$ fonksiyonunun $[0,3]$ için $\lim_{n \rightarrow \infty} L(f, P_n) = ?$
 $\lim_{n \rightarrow \infty} U(f, P_n) = ?$
 e^x artan fonksiyon olup verilen aralık için



$$\Delta x_i = \Delta x = \frac{3-0}{n} = \frac{3}{n}$$

$$x_i = a + i \cdot \Delta x = 0 + i \cdot \frac{3}{n}$$

$$x_i = \frac{3i}{n} = u_i$$

$$x_{i-1} = \frac{3(i-1)}{n} = t_i$$

$$\sum_{i=1}^n r^{i-1} = \frac{r^n - 1}{r - 1}$$

$$L(f, P_n) = \sum_{i=1}^n f(t_i) \cdot \Delta x_i$$

$$= \sum_{i=1}^n f\left(\frac{3(i-1)}{n}\right) \cdot \frac{3}{n} = \frac{3}{n} \sum_{i=1}^n e^{\frac{3(i-1)}{n}}$$

; $e^{\frac{3}{n}} = r$ gibi alınırsa

$$= \frac{3}{n} \frac{e^{\left(\frac{3}{n}\right) \cdot n} - 1}{e^{\frac{3}{n}} - 1} = \frac{3 \cdot e^3 - 1}{n(e^{\frac{3}{n}} - 1)} \text{ olarak}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} L(f, P_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3 \cdot (e^3 - 1)}{n(e^{\frac{3}{n}} - 1)} ; \lim_{n \rightarrow \infty} n \cdot (e^{\frac{3}{n}} - 1) = \infty \cdot 0 = \text{Belirsizlik}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n \cdot (e^{\frac{3}{n}} - 1) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{e^{\frac{3}{n}} - 1}{\left(\frac{1}{n}\right)} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{e^{\frac{3}{n}} \cdot \left(-\frac{3}{n^2}\right)}{\left(-\frac{1}{n^2}\right)} = 3 \text{ olarak}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} L(f, P_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3 \cdot (e^3 - 1)}{3} = e^3 - 1 \text{ olur.}$$

Benzer işlemlerle $U(f, P_n) = \sum_{i=1}^n f(u_i) \cdot \Delta x_i = \sum_{i=1}^n e^{\frac{3i}{n}} \cdot \left(\frac{3}{n}\right)$ de $e^3 - 1$ bulur.

Ayrıca $\int_0^3 e^x dx = e^x \Big|_0^3 = e^3 - e^0 = e^3 - 1$ olarak sonuç doğrulanır.

Yrd. Doç. Dr. Müslüm Özışık

22) $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n \frac{1}{n} \sqrt{\frac{i}{n}}$ ifadesini belirli integral olarak yazınız.

Verilen toplam ifadesi olan

$\sum_{i=1}^n \frac{1}{n} \sqrt{\frac{i}{n}}$ Riemann (Alt veya Üst) Toplamı olacaktır. Dolayısıyla $\sum_{i=1}^n f(\xi_i) \cdot \Delta x_i$ veya $\sum_{i=1}^n f(\eta_i) \cdot \Delta x_i$ dir.

Dolayısıyla şekli iliki kurularak;

$$\sum_{i=1}^n \underbrace{\frac{1}{n}}_{\Delta x_i} \cdot \underbrace{\sqrt{\frac{i}{n}}}_{f(\xi_i)}$$

$\Delta x_i = \frac{1}{n} = \frac{1-0}{n}$ olup $[0,1]$ aralığı söz konusu olabilir.

Bu durumda

$$\left. \begin{array}{l} x_i = 0 + i \cdot \Delta x = \frac{i}{n} \\ x_{i-1} = \frac{i-1}{n} \end{array} \right\} \text{olacağından } \sqrt{\frac{i}{n}} = \sqrt{x_i} \text{ dir.}$$

Dolayısıyla $f(x) = \sqrt{x}$ dir.

Bu durumda $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n f(\xi_i) \cdot \Delta x_i = \int_0^1 f(x) dx$ olarak

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n \frac{1}{n} \sqrt{\frac{i}{n}} = \int_0^1 \sqrt{x} dx \text{ dir.}$$

Ayrıca $\sqrt{x}$ fonksiyonu artan ve verilen ifade x_i için yazıldığından $\sum_{i=1}^n \frac{1}{n} \sqrt{\frac{i}{n}} \rightarrow$ üst Riemann toplamıdır.

MATEMATİK I - UYGULAMA
TOPLAM SEMBOLÜ / RIEMANN TOPLAMLARI - INTEGRAL - ALAN HESABI

Değeriyle;

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \underbrace{\sum_{i=1}^n \frac{1}{n} \sqrt{\frac{i}{n}}}_{U(f, P_n)} = \int_0^1 \sqrt{x} dx$$

Not:

$n \rightarrow \infty$ için

$\lim_{n \rightarrow \infty} L(f, P_n)$ ve $\lim_{n \rightarrow \infty} U(f, P_n)$ alan belirtmekte

olup

$$\lim_{n \rightarrow \infty} L(f, P_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} U(f, P_n) \text{ dir.}$$

Bu limitler de belirli integrale dönüşeceğinden

$$A = \lim_{n \rightarrow \infty} L(f, P_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} U(f, P_n) = \int_a^b f(x) dx$$

MATEMATİK I - UYGULAMA

TOPLAM SEMBOLÜ / RIEMANN TOPLAMLARI - İNTEGRAL - ALAN HESABI

23) $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n \frac{1}{n} \sqrt{\frac{i-1}{n}}$ toplamını belirli integral olarak yazınız.

Benzer olarak;

$$\Delta x_i = \Delta x = \frac{1}{n} = \frac{1-0}{n} \quad \text{olup } [a, b] = [0, 1]$$

$$x_i = 0 + i \cdot \Delta x = \frac{i}{n} \quad \left. \begin{array}{l} y = \sqrt{x} \text{ artan olduğundan} \\ \sqrt{\frac{i-1}{n}} = \sqrt{x_{i-1}} \text{ dir.} \end{array} \right\}$$

$$x_{i-1} = \frac{i-1}{n} \quad \left. \begin{array}{l} x_{i-1} = c_i \\ x_i = u_i \end{array} \right\}$$

olarak yukarıda verilen $L(f, P_n)$ dir.

Delaysızla

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n \frac{1}{n} \sqrt{\frac{i-1}{n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} L(f, P_n) = \int_0^1 \sqrt{x} \cdot dx$$

Not:

Verilen soru veya benzeri sorularda Δx_i için aralığın bir ucunu 0 olarak almak kolaylık sağlar. Ancak mutlaka 0 (sıfır) almak zorunlu değildir. Bu durumda fonksiyon değişik çıkar görünmeyle beraber sonuç değişmez. Şöyle ki:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n \frac{1}{n} \sqrt{\frac{i-1}{n}} \quad \text{soruyu için}$$

$$\Delta x = \frac{1}{n} = \frac{2-1}{n} = \frac{1}{n} \quad \text{alalım. Bu durumda } [a, b] = [1, 2] \text{ ol}$$

$$\left. \begin{array}{l} x_i = a + i \cdot \Delta x = 1 + \frac{i}{n} \\ x_{i-1} = 1 + \frac{(i-1)}{n} \end{array} \right\} \text{ olarak } f(x) = \sqrt{x-1} \text{ alınırsa } \sqrt{x_i-1} = \sqrt{1 + \frac{i}{n} - 1}$$

MATEMATİK 1 - UYGULAMA

TOPLAM SEMBOLÜ / RIEMANN TOPLAMLARI - INTEGRAL - ALAN HESABI

$$= \sqrt{\frac{i-1}{n}} \text{ olur. } x_{i-1} = 1 + \frac{i-1}{n} \text{ için } \sqrt{x-1} = \sqrt{1 + \frac{i-1}{n} - 1}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n \frac{1}{n} \sqrt{\frac{i-1}{n}} \text{ toplamı ekde edilir. } = \sqrt{\frac{i-1}{n}} \text{ obrak}$$

Bu durumda

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \underbrace{\sum_{i=1}^n \frac{1}{n} \sqrt{\frac{i-1}{n}}}_{L(f, P_n)} = \int_1^2 \sqrt{x-1} dx \text{ olur.}$$

Ancak bu integralin $\int_0^1 \sqrt{x} dx$ integralinden farkı yoktur. Söyle ki:

$$\frac{1. \text{ yol}}{\int_1^2 \sqrt{x-1} dx}$$

$u = x-1$ olsun.

$$u = x-1 \begin{cases} x=1 \Rightarrow u=0 \\ x=2 \Rightarrow u=1 \end{cases}$$

$$du = dx$$

olarak

$$\int_1^2 \sqrt{x-1} dx = \int_0^1 \sqrt{u} \cdot du$$

olur ki bu integral

$$\int_0^1 \sqrt{x} dx \text{ ile aynıdır.}$$

Sadece x yerine u vardır.

$\frac{2. \text{ yol}}{\text{Belirli integraler hesaplanırsa}}$

$$\int_0^1 \sqrt{x} dx = \int_0^1 x^{1/2} dx = \frac{2}{3} x^{3/2} \Big|_0^1$$

$$= \frac{2}{3} (1-0) = \frac{2}{3}$$

$$\int_1^2 \sqrt{x-1} dx = \int_1^2 (x-1)^{1/2} dx$$

$$= \frac{2}{3} (x-1)^{3/2} \Big|_1^2$$

$$= \frac{2}{3} [(2-1)^{3/2} - (1-1)^{3/2}]$$

$$= \frac{2}{3}$$

olarak aynı sonuç (ALAN) elde edilir.

Dolayısıyla;

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n f(\xi_i) \cdot \Delta x_i = \lim_{n \rightarrow \infty} L(f, P_n)$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n f(\eta_i) \cdot \Delta x_i = \lim_{n \rightarrow \infty} U(f, P_n)$$

Alan ifade etmekte olup aynı ALAN'ı ifade ederler ve eşittirler. Bu ifadelerin karılığı $n \rightarrow \infty$ limitinde BELİRLİ İNTEGRAL olup;

1.) $\lim_{n \rightarrow \infty} L(f, P_n)$ veya $\lim_{n \rightarrow \infty} U(f, P_n)$

ifadeleri Belirli integral olarak yazılırken Δx_i istenildiği şekilde seçilebilir. (Aralığın bir ucunun sıfır olarak alınması işlemi kolaylığı sağlamakta olup zorunluluk değildir.)

2.) Bu doğrultuda olabilecek olan ξ_i ve η_i için $f(x)$ fonksiyonunu $f(ax+tb)$ şeklinde değişik şekillerde oluşturmak mümkündür.

3.) Elde edilen integrallerin hepsi aynı sonucu verecek olup sadece basit bir değişken dönüşümü ile aynı formda yazılabilir.

Not: $\Delta x = \frac{b-a}{n}$ seçiminde $[a, b]$ alınırken alınacak olan aralığın $D(f)$ -e ait olmasına dikkat edilmelidir.

Örneğin $f(x) = \sqrt{x}$ için aralık seçimi $x < 0$ için yapılamaz.

Yrd. Doç. Dr. Müslüm Özışık

MATEMATİK I - UYGULAMA
TOPLAM SEMBOLÜ / RIEMANN TOPLAMLARI - INTEGRAL - ALAN HESABI

(24)

$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n \frac{2}{n} \ln\left(1 + \frac{2i}{n}\right)$ toplamını belirli integral olarak yazınız.

$\Delta x_i = \frac{2}{n} = \frac{2-0}{n}$ alınırsa $[a, b] = [0, 2]$ olur.

Bu durumda;

$x_i = a + i \cdot \Delta x = 0 + i \cdot \frac{2}{n}$

$x_i = \frac{2i}{n}$

$x_{i-1} = \frac{2(i-1)}{n}$ } olarak $\ln f(x)$ fonksiyonu ARTAN fonksiyon olduğundan
 $t_i = x_{i-1}$; $u_i = x_i$ dir.

Fonksiyon olarak $\ln\left(1 + \frac{2i}{n}\right) = \ln(1 + x_i)$

olarak

$y = f(x) = \ln(1+x)$ alınabilir. Dolayısıyla;

$\lim_{n \rightarrow \infty} \underbrace{\sum_{i=1}^n \frac{2}{n} \ln\left(1 + \frac{2i}{n}\right)}_{U(f, P_n)} = \int_0^2 \ln(1+x) dx$ olur.

Örneğin bu soruda;

• $\Delta x = \frac{3-1}{n} = \frac{2}{n}$ seçilse $[a, b] = [1, 3]$

$x_i = 1 + \frac{2i}{n}$ olarak integral $\int_1^3 \ln x dx$

• $\Delta x = \frac{4-2}{n} = \frac{2}{n}$ seçilse $[a, b] = [2, 4]$

$x_i = 2 + \frac{2i}{n}$ olarak integral $\int_2^4 \ln(x-1) dx$

• $\Delta x = \frac{7-5}{n} = \frac{2}{n}$ olarak seçilse $[a, b] = [5, 7]$

$x_i = 5 + \frac{2i}{n}$ olarak integral $\int_5^7 \ln(x-4) dx$

olur. Ancak bu integrallerin tamamının sonucu $\int_1^2 \ln(x+1) dx$ ile aynıdır.

Yrd. Doç. Dr. Müslüm Özışık

(68)