

İkinci mertebeden Lineer Kısmi Diferansiyel Denklemler

$$z_x = r, \quad z_y = s, \quad z_{xx} = r', \quad z_{xy} = s, \quad z_{yy} = t$$

$$A z_{xx} + B z_{xy} + C z_{yy} + D z_x + E z_y + F z = G(x, y) \quad (1)$$

seklindedir. Burada $A, B, C, D, E, F \in \mathbb{R}$ (sabitler)

$G \in C[0]$, $D \in \mathbb{R}^2$ ise denkleme sabit katsayılı ikinci mertebeden Lineer KDD. denir.

Eğer $G(x, y) = 0$ ise Homojen denklem

$G(x, y) \neq 0$ ise Homojen olmayan denklem denir.

Eğer A, B, C, D, E, F 'lerden (katsayılardan) herhangi biri veya birkaçı sabit değilse (Bağımsız değişkenlerden oluşan fonksiyon ise) denkleme değişken katsayılı KDD. denir.

$A, B, C, D, E, F \in \mathbb{R}$ sabit olsalar;

$$D_x = \frac{\partial}{\partial x}, \quad D_y = \frac{\partial}{\partial y}, \quad D_x^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2}, \quad D_x D_y = \frac{\partial^2}{\partial x \partial y}, \quad D_y^2 = \frac{\partial^2}{\partial y^2} \quad (2)$$

Kısmi türev operatörleri olmak üzere, (1) denklemi

$$(A D_x^2 + B D_x D_y + C D_y^2 + D D_x + E D_y + F) z = G(x, y) \quad (3)$$

olarak yazılabilir.

$$L = A\partial_x^2 + B\partial_x\partial_y + C\partial_y^2 + D\partial_x + E\partial_y + F \quad (L \text{ operatörü})$$

$$Lz = G(x,y) \quad (4)$$

olar. Burada L operatörü her G ve G_1 ve G_2 reel sabitler ve z_1, z_2 en az ikinci mertebeden sürekli türevlenebilir fonksiyonlar olmak üzere,

$$L(Gz_1 + G_2z_2) = G_1Lz_1 + G_2Lz_2$$

özelliklerini sağlayan lineer bir operatördür.

Bir $z = f(x,y) \in C^2[D]$ fonksiyonu $Lf = G$ eşitliğini (KDD'i) sağlıyorsa bu fonksiyona (1) denkleminin bir integral yüzeyi (çözüm) denir.

$$z_1, z_2, \dots, z_n \text{ fonksiyonları} \quad Lz = 0 \quad (5)$$

Homojen kısmın çözümleri ise $G_1, G_2, \dots, G_n$ reel keyfi sabitler olmak üzere,

$$z_H = G_1z_1 + G_2z_2 + \dots + G_nz_n$$

fonksiyonu (5) denklemin çözümü olur. (1) denkleminin genel çözümü;

$$\boxed{z = z_H + z_0} \text{ şeklindedir.}$$

L operatörünün ;

$$L = L_1 L_2 = (\alpha_1 D_x - \beta_1 D_y - \gamma_1) (\alpha_2 D_x - \beta_2 D_y - \gamma_2) \quad (6)$$

şeklinde çarpanlara ayrılabilir olduğunu kabul edelim.
Burada $\alpha_i, \beta_i, \gamma_i \in \mathbb{R}$, $i=1,2$ dir. L operatörünün katsayıları sabit ve $D_x D_y = D_y D_x$ olduğundan;

$$L_1 L_2 = L_2 L_1$$

olur. (Değişme özelliği vardır)

Eğer $z = \phi(x, y)$ fonksiyonu $L_1 z = 0$ denkleminin bir çözümünü ise,

$$Lz = (L_1 L_2)z = (L_2 L_1)z = L_2 (L_1 z) = L_2 \cdot 0 = 0$$

olduğundan $L_1 z = 0$ ve $L_2 z = 0$ denklemlerinin her bir çözümünü aynı zamanda $Lz = 0$ denkleminde çözümleridir.

Şimdi,

$$L_1 z = (\alpha_1 D_x - \beta_1 D_y - \gamma_1)z = \alpha_1 p - \beta_1 q - \gamma_1 z = 0 \quad (7)$$

denklemini çözüme alalım. Bu denklem birinci mertebeden lineer (aynı zamanda yarı-lineer) bir denklemdir.

Lagrange yardımcı sistemi

$$\frac{dx}{\alpha_1} = \frac{dy}{-\beta_1} = \frac{dz}{\gamma_1 z}$$

dir.

$$(1) \quad \frac{dx}{\alpha_1} = \frac{dy}{-\beta_1} \Rightarrow \boxed{\beta_1 x + \alpha_1 y = C_1} \text{ bulunur.}$$

(karakteristiği kolayca elde edilir)

$\alpha_1 \neq 0$ ve ~~birinci ve üçüncü denklemlerden,~~
birinci ve ikinci denklemlerden,

$$\frac{dz}{z} = \frac{\partial_1}{\alpha_1} dx \Rightarrow \ln z = \frac{\partial_1}{\alpha_1} x + \ln C_2$$

$$z = C_2 \cdot e^{\frac{\partial_1}{\alpha_1} x}$$

$$\boxed{z \cdot e^{-\frac{\partial_1}{\alpha_1} x} = C_2} \text{ bulunur.}$$

Böylece (7) denkleminin genel çözümü ;

$$Z_1 = e^{\frac{\partial_1}{\alpha_1} x} \cdot f_1(\beta_1 x + \alpha_1 y), \quad f_1 \in C'[0] \quad (8)$$

şeklinde yazılabilir. Eğer $\beta_1 \neq 0$ ise (7) denkleminin genel çözümü ;

$$Z_1 = e^{-\frac{\partial_1}{\beta_1} y} \cdot f_1^*(\beta_1 x + \alpha_1 y), \quad f_1^* \in C'[0] \quad (9)$$

olur. Eğer $\alpha_1 \neq 0$ ve $\beta_1 \neq 0$ ise (8) veya (9) dan sadece bir tanesi genel çözüm olarak alınır.

Benzer şekilde,

$$L_2 z = (\alpha_2 \partial_x - \beta_2 \partial_y - \partial_2) z = \alpha_2 p - \beta_2 q - \partial_2 z = 0$$

denkleminin genel çözümü $\alpha_2 \neq 0$ için

$$Z_2 = e^{\frac{\partial_2}{\alpha_2} x} \cdot f_2(\beta_2 x + \alpha_2 y), \quad f_2 \in C'[0] \quad (10)$$

olur.

Yine $\beta_2 \neq 0$ ise,

$$z_2 = e^{-\frac{\alpha_2}{\beta_2} y} f_2^*(\beta_2 x + \alpha_2 y), \quad f_2^* \in C^1[0]$$

ifadeside genel çözüm olarak alınabilir.

Eğer f_1 ve f_2 aynı zamanda $C^2[0]$ sınıfına ait ise bu durumda,

$$z = z_1 + z_2 = e^{\frac{\alpha_1 x}{\beta_1}} f_1(\beta_1 x + \alpha_1 y) + e^{\frac{\alpha_2 x}{\beta_2}} f_2(\beta_2 x + \alpha_2 y); \quad f_1, f_2 \in C^2[0]$$

ifadesi $Lz = 0$ denkleminin genel çözümüdür.

Eğer z_0 , $Lz = B$ nm bir özel çözümünü ise

bu durumda $z = z_0 + z_1$, (1) Homojen olmayan denklemin genel çözümüdür.

0 1 cm çizim

Örnek : $z_{xx} - z_{yy} - z_x + z_y = (2 \cos(3x + 2y))$ denkle-

minin genel çözümünü bulunuz.

Çözüm : $L = D_x^2 - D_y^2 - D_x + D_y = (D_x + D_y - 1)(D_x - D_y) =$
 $L_1 L_2$

olur. $L_1 z = (D_x + D_y - 1)z = 0$ denkleminin

genel çözümünü $(\alpha_1 = 1, \beta_1 = -1, \gamma_1 = 1)$

$$z_1 = e^x f_1(y - x), \quad f_1 \in C^2[0]$$

olur. Aynı şekilde;

$$L_1 z = (A_1 - A_2) z = 0 \quad (A_1 = 1, A_2 = 1, v_1 = 0)$$

$$z_2 = f_2(x+y), \quad f_2 \in C^2[0]$$

dar. $L_2 z = 0$ in h ingen h ismin h erel h ismin,

$$\boxed{z_H = z_1 + z_2 = e^x f_1(y-x) + f_2(x+y)} \quad ; \quad f_1, f_2 \in C^2[0]$$

dar.

$$Lz = 2 \cos(3x+2y)$$

$$z_3 = A \cos(3x+2y) + B \sin(3x+2y), \quad A, B \in \mathbb{R}$$

formunda h er h ismin h ismin,

$$A = -\frac{5}{13}, \quad B = -\frac{1}{13} \quad \text{dar.}$$

$$\boxed{z_0 = -\frac{5}{13} \cos(3x+2y) - \frac{1}{13} \sin(3x+2y)}$$

$$z = z_H + z_0$$

$$z = e^x f_1(y-x) + f_2(x+y) - \frac{5}{13} \cos(3x+2y) - \frac{1}{13} \sin(3x+2y)$$

$$f_1, f_2 \in C^2[0]$$

elde edilir.

Operatörün Tekrarlı Çarpımlara ayrılması

$$L = A D_x^2 + B D_x D_y + C D_y^2 + D D_x + E D_y + F$$

$A, B, C, D, E, F \in \mathbb{R}$ sabitler

$$L = L_1 L_2 \quad L_1 = L_2 \text{ olması durumunda ;}$$

$$L = (\alpha D_x - \beta D_y - \gamma)(\alpha D_x - \beta D_y - \gamma) \quad \alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R} \text{ sabitler}$$

$$Lz = (\alpha D_x - \beta D_y - \gamma)(\alpha D_x - \beta D_y - \gamma)z = 0 \quad (11)$$

$$\cancel{Lz = (\alpha D_x - \beta D_y - \gamma)u}$$

$$(\alpha D_x - \beta D_y - \gamma)z = u \text{ dersek (12)}$$

$$Lz = (\alpha D_x - \beta D_y - \gamma)u = 0 \quad (13)$$

olur. Buradan

$$\alpha u_x - \beta u_y - \gamma u = 0 \quad (14)$$

şeklinde lineer denklem elde edilir. Lagrange yöntemi sistemi ;

$$\frac{dx}{\alpha} = \frac{dy}{-\beta} = \frac{du}{\gamma u}$$

olur. Buradan birinci ve ikinci oranlardan ;

-8-

$$\frac{dx}{\alpha} = \frac{dy}{-\beta}$$

$$\boxed{\beta x + \alpha y = C_1} \quad (1)$$

birinci ve üçüncü oranlardan;

$$\frac{dx}{\alpha} = \frac{dz}{\gamma z} \Rightarrow$$

$$\gamma x = \ln u + \ln C_2$$

$$\boxed{u \cdot e^{-\frac{\gamma x}{\alpha}} = C_2} \quad (2) \quad \alpha \neq 0 \quad (15)$$

gerçek çözüm

$$\boxed{u = e^{\frac{\gamma x}{\alpha}} \cdot f(C_1)} \quad (15)$$

olur. Buradan

(12) den yerine yerleştirirsek
 $(\alpha \frac{dx}{dz} - \beta y - \gamma)z = u$

$$\alpha p - \beta z = \gamma z + e^{\frac{\gamma x}{\alpha}} f(C_1)$$

$$\alpha p - \beta z = \gamma z + u$$

$$\alpha p - \beta z = \gamma z + e^{\frac{\gamma x}{\alpha}} \cdot f(C_1) \quad (16)$$

olur. Bunun Laplace yardımcı sistemi;

$$\frac{dx}{\alpha} = \frac{dy}{-\beta} = \frac{dz}{\gamma z + e^{\frac{\gamma x}{\alpha}} \cdot f(C_1)} \quad (17)$$

$$\boxed{\frac{\gamma x}{\alpha}}$$

$$\frac{\gamma z + e^{\frac{\gamma x}{\alpha}} f(C_1)}{\alpha} = \frac{dz}{dx} \quad \text{olur Buradan;}$$

-9-

$$\frac{dz}{dx} - \frac{\gamma}{\alpha} z = \frac{1}{\alpha} e^{\frac{\gamma}{\alpha} x} f(x) \quad (18)$$

şeklinde linear denklem elde edilir.

$$\lambda = C e^{-\int \frac{\gamma}{\alpha} dx} = e^{-\frac{\gamma}{\alpha} x}$$

$$\frac{d}{dx} \left(e^{-\frac{\gamma}{\alpha} x} z \right) = \frac{1}{\alpha} f(x)$$

$$e^{-\frac{\gamma}{\alpha} x} z = \frac{1}{\alpha} f(x) = C_1^* \quad (19)$$

elde edilir. (17) Lagrange sisteminde:

İki denklemin çözümlerini,

$$\beta x + \alpha y = C_2^* \quad (20)$$

bulunur. $C_2 = C_2^*$ dir. (19) ve (20) kullanarak

denklem $C_1^* = g(C_2^*)$ olur, bundan (16)ya

dolayısıyla (11) homojen denkleminin genel çözümü,

$$z = e^{\frac{\gamma}{\alpha} x} \left[x f_1(\beta x + \alpha y) + f_2(\beta x + \alpha y) \right], \quad f_1, f_2 \in C^1[0] \quad (21)$$

bulunur. bundan $f_1 = \frac{1}{\alpha} f$, $f_2 = g$ dir

Örnek (3.11) denkleminde $\beta > 0$ ise homojen kısmın genel çözümü $z = e^{\frac{\gamma}{\alpha} x} \left[y f_1(\beta x + \alpha y) + f_2(\beta x + \alpha y) \right]$ $f_1, f_2 \in C^1[0]$ (22) olur. (11)de $\alpha > 0$, $\beta > 0$ ise (22) $\alpha > 0$, $\beta > 0$ ise (21) genel çözüm

(YAP)

-12-

Örnek: $4z_{xx} + z_{yy} - 4z_{xy} + 4z_x - 2z_y + z = 0$
denklemin genel çözümünü bulunuz.

Çözüm: Verilen denklem;

$$Lz = (4D_x^2 - 4D_x D_y + D_y^2 + 4D_x - 2D_y + 1)z$$

$$Lz = (2D_x - D_y + 1)^2 z = 0$$

şeklinde yazılabilir. ($\alpha=2, \beta=1, \gamma=-1$ dir)

Genel çözüm: (3.21) den; $(2D_x - D_y + 1)z = u$
 $(2D_x - D_y + 1)u = 0$
 $z = e^{-\frac{x}{2}} [x f(x+2y) + g(x+2y)]$ veya $f, g \in C^2[D]$
 $z = e^y [y \cdot f^*(x+2y) + g^*(x+2y)]$ $f^*, g^* \in C^2[D]$

olur.

Örnek: ^{ödev} $4r - 12s + 9t + 4p - 6q + z = 0$ denklemin
genel çözümünü bulunuz.

$$Lz = (4D_x^2 - 12D_x D_y + 9D_y^2 + 4D_x - 6D_y + 1)z = (2D_x - 3D_y + 1)^2 z$$

$$z = e^{\frac{y}{3}} [y f(3x+2y) + g(3x+2y)] ; f, g \in C^2[D]$$

bulunur.