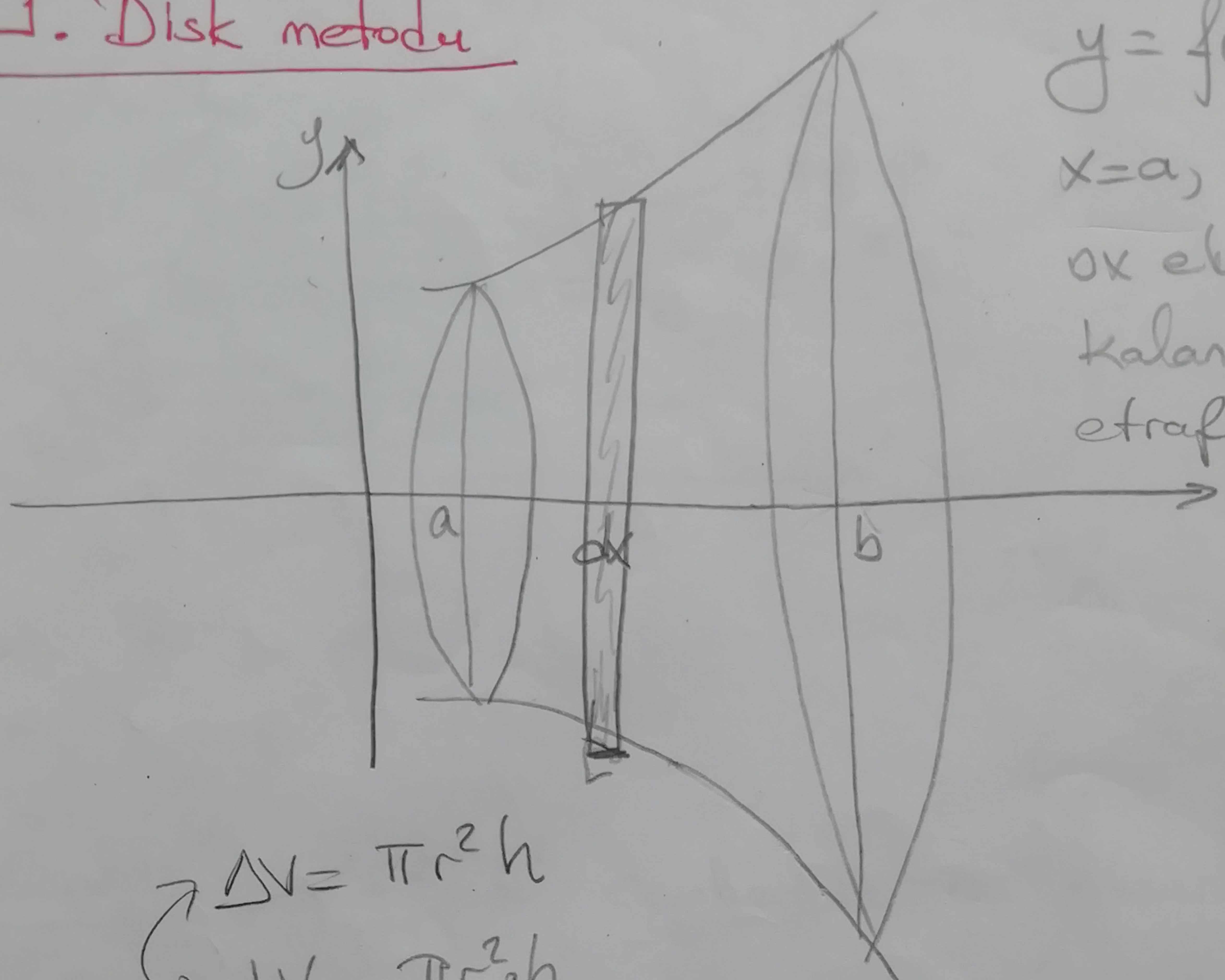
Dönel Cisimlerin Hacmi

1. Disk metodu



$y=f(x)$ fonksiyonu $x=a$, $x=b$ doğruları ve ox ekseni arasında kalan bölgenin ox ekseni etrafında dönmesiyle oluşan cismin hacmi :

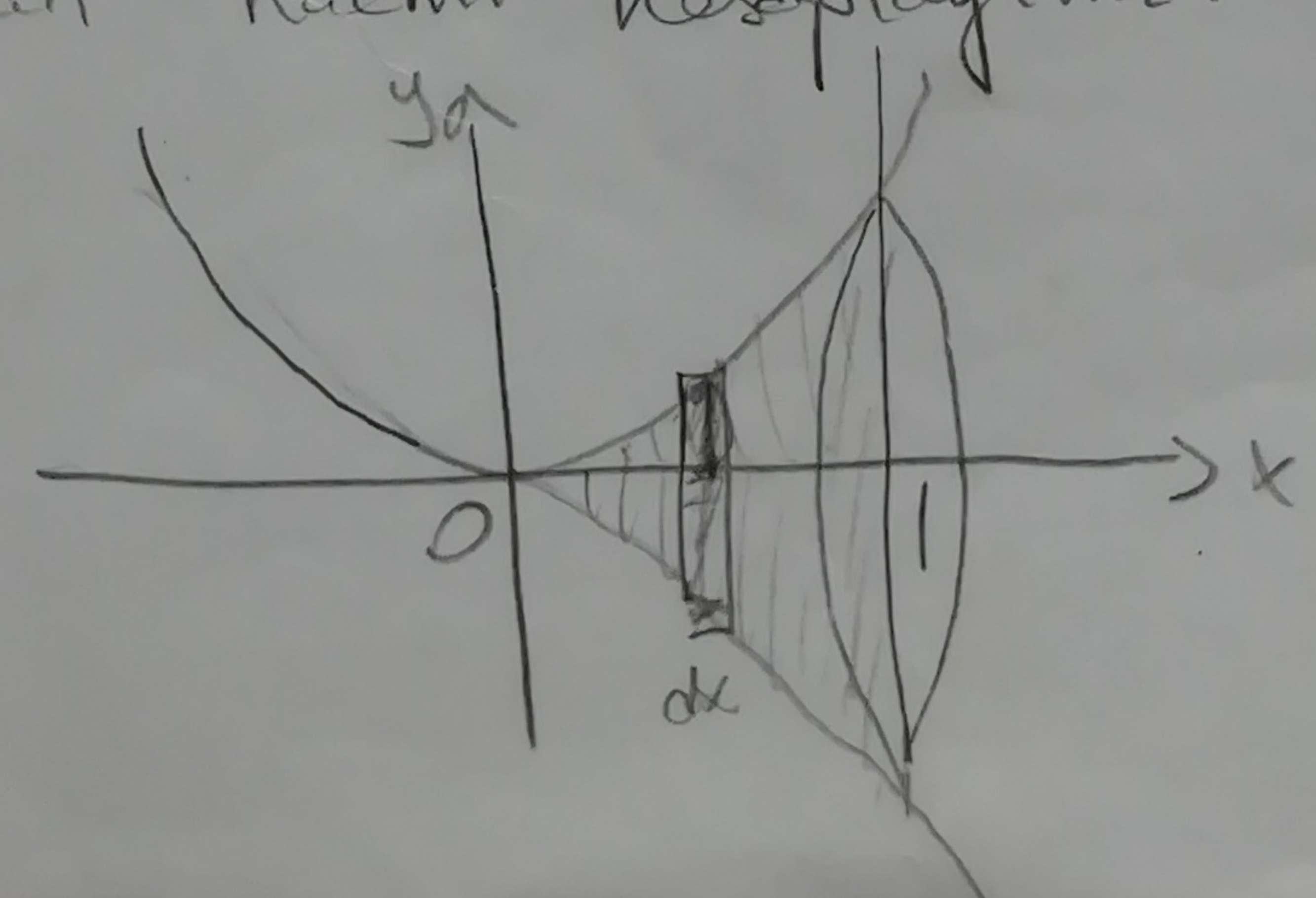
$\Delta V = \pi r^2 h$

$dV = \pi r^2 \cdot h$

$dV = \pi (f(x))^2 \cdot dx$

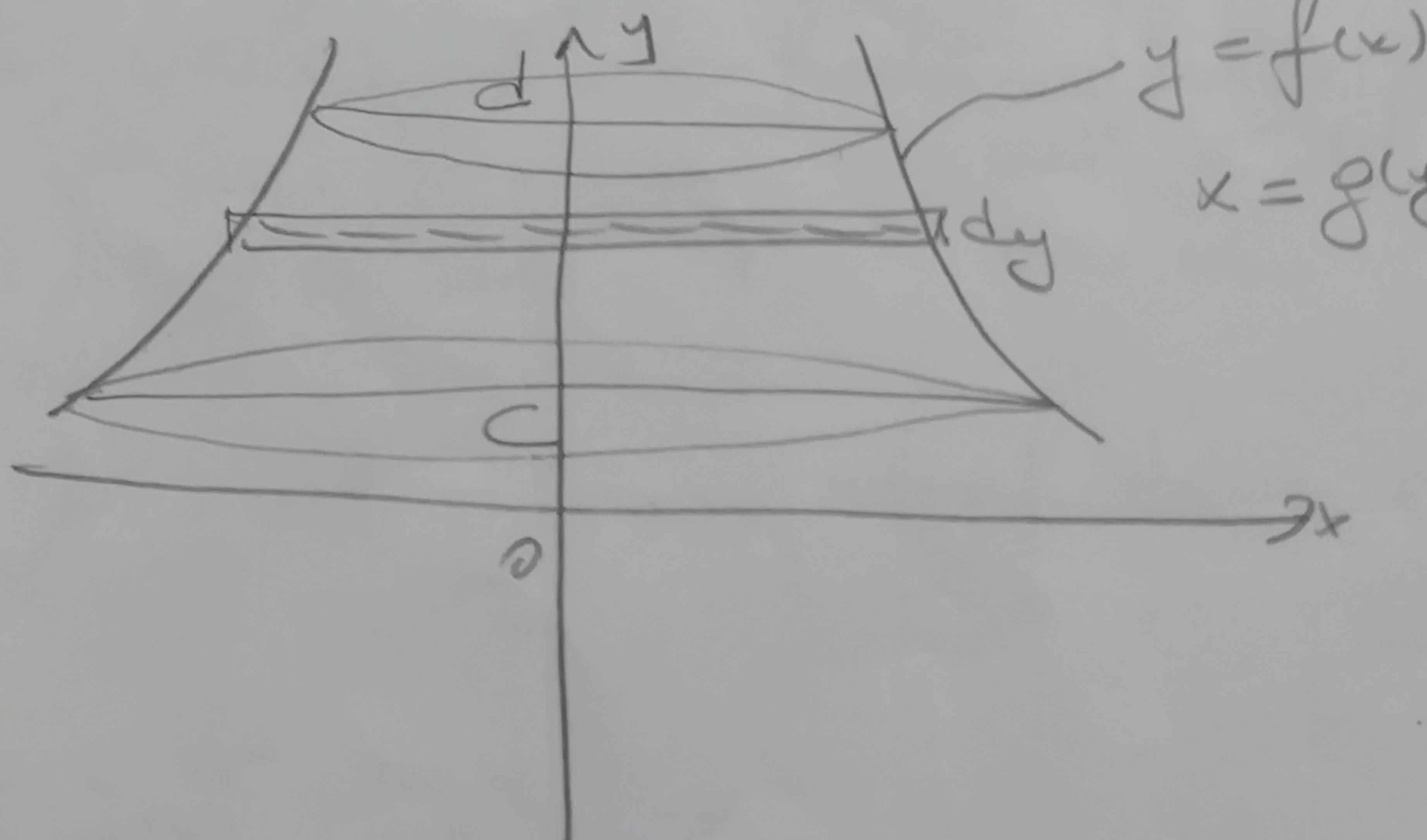
$$V = \pi \int_a^b f^2(x)\,dx = \pi \int_a^b y^2 dx \text{ olur.}$$

Örnek: $y=x^2$, $x=0$, $x=1$ doğruları arasında kalan bölgenin ox ekseni etrafında dönmesiyle oluşan hacmi hesaplayınız.



$$V=\pi \int_0^1 y^2 dx = \pi \int_0^1 x^4 dx = \frac{\pi}{5} \text{ H.B.}$$

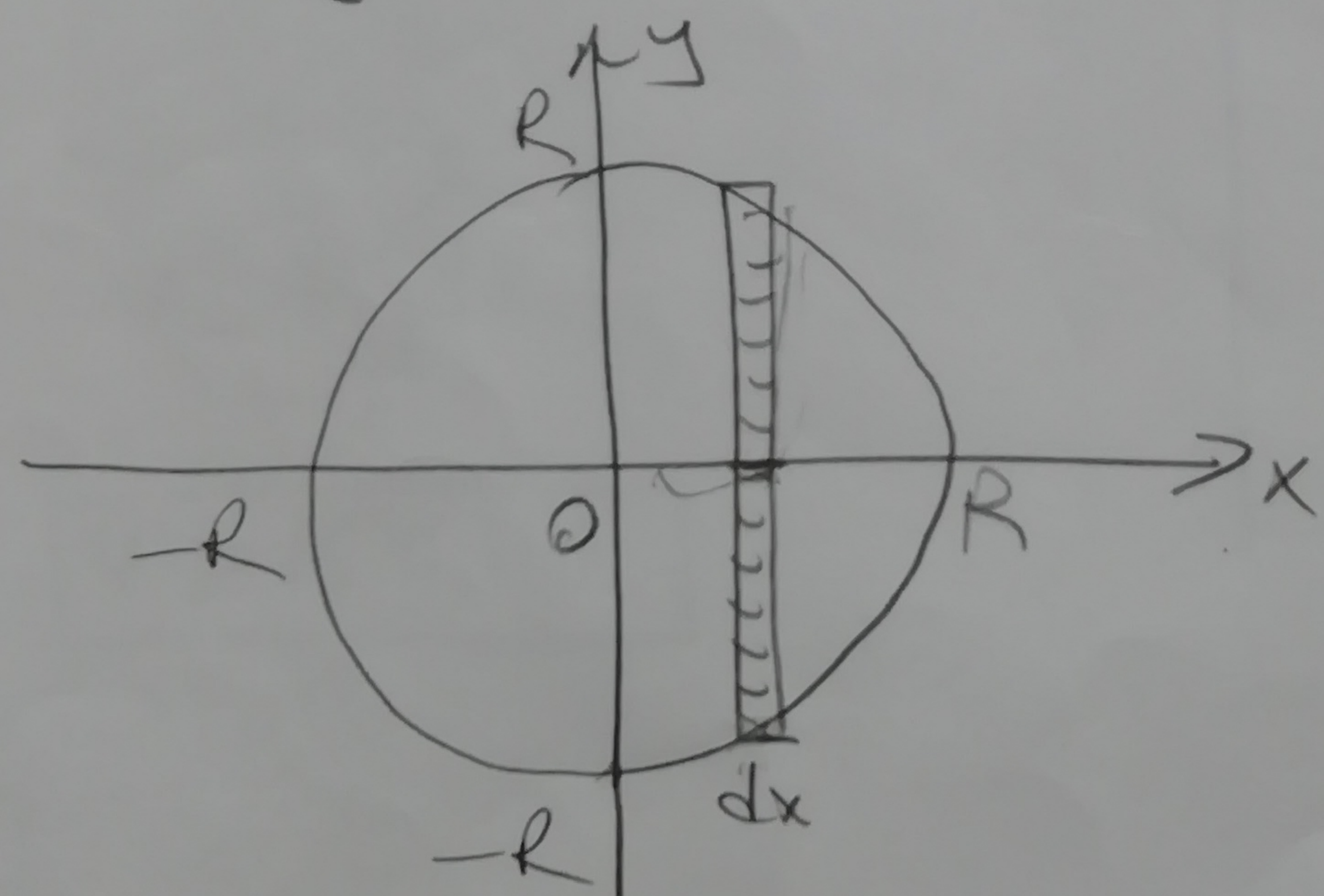
$y=f(x)$ fonksiyonu, $y=c$, $y=d$ doğruları arasında kalan bölgenin oy ekseni etrafında dönmesiyle oluşan hacim.



$$V = \pi \int_c^d g^2(y)\,dy$$

$$V = \pi \int_c^d x^2\,dy \text{ olur.}$$

Örnek: $x^2+y^2=R^2$ çemberinin ox ekseni etrafında dönmesiyle oluşan hacmi hesaplayınız.



$$V = 2\pi \int y^2\,dx$$

$$V = 2\pi \int_0^R (R^2 - x^2)\,dx$$

$$= 2\pi \left[R^2 x - \frac{x^3}{3} \right]_0^R$$

$$\boxed{V = \frac{4}{3}\pi R^3}$$

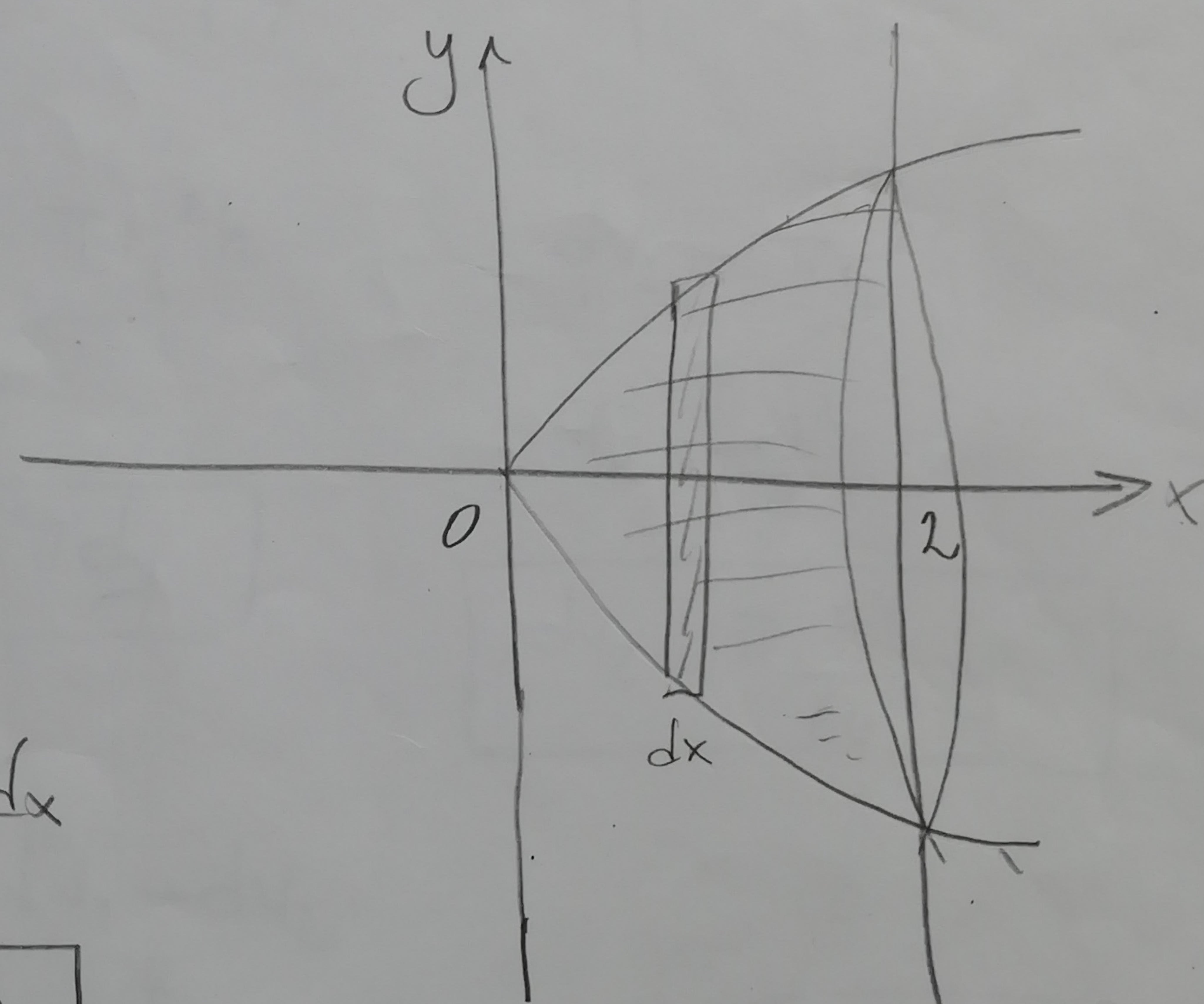
Örnek: $y^2=8x$ parabolünün $x=2$ doğrusunu sınırladığı bölgenin,

a) Ox ekseni etrafında dönmesiyle oluşan hacim

b) Oy ekseni " " " "

c) $x=2$ doğrusu etrafında " " hacmi hesaplayınız.

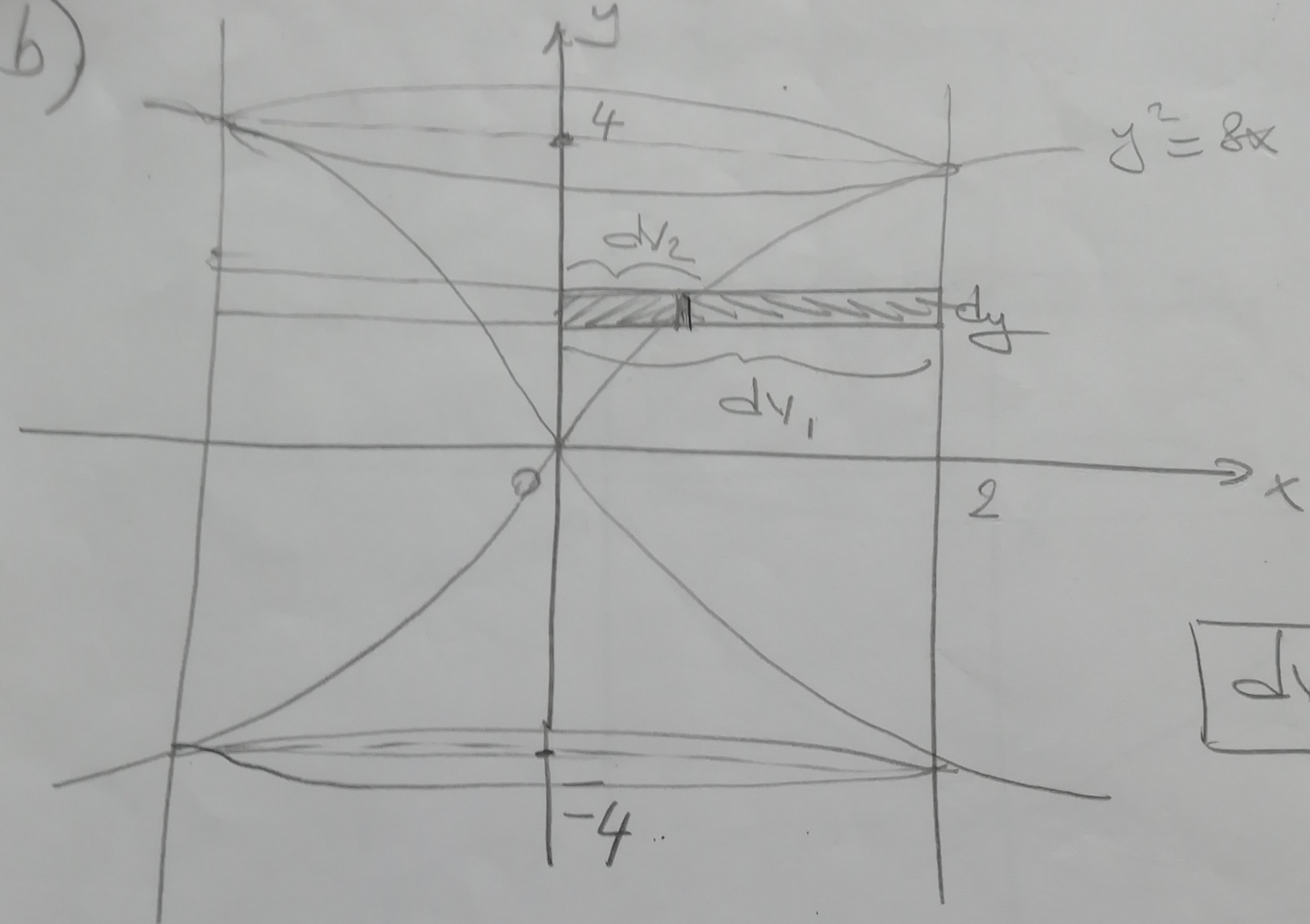
Çözüm: a)



$$V=\pi\int_0^2 8x\,dx$$

$$\boxed{V=16\pi \text{ H.B}}$$

b)



$\frac{y^2}{8}=2$

$\boxed{y=\mp 4}$

$\boxed{dV=dV_1-dV_2}$

$dV_1=\pi r_1^2 h$

$dV_2=\pi r_2^2 h$

$r_1=2$

$r_2=\frac{y^2}{8}$

$\boxed{dV_1=4\pi dy}$

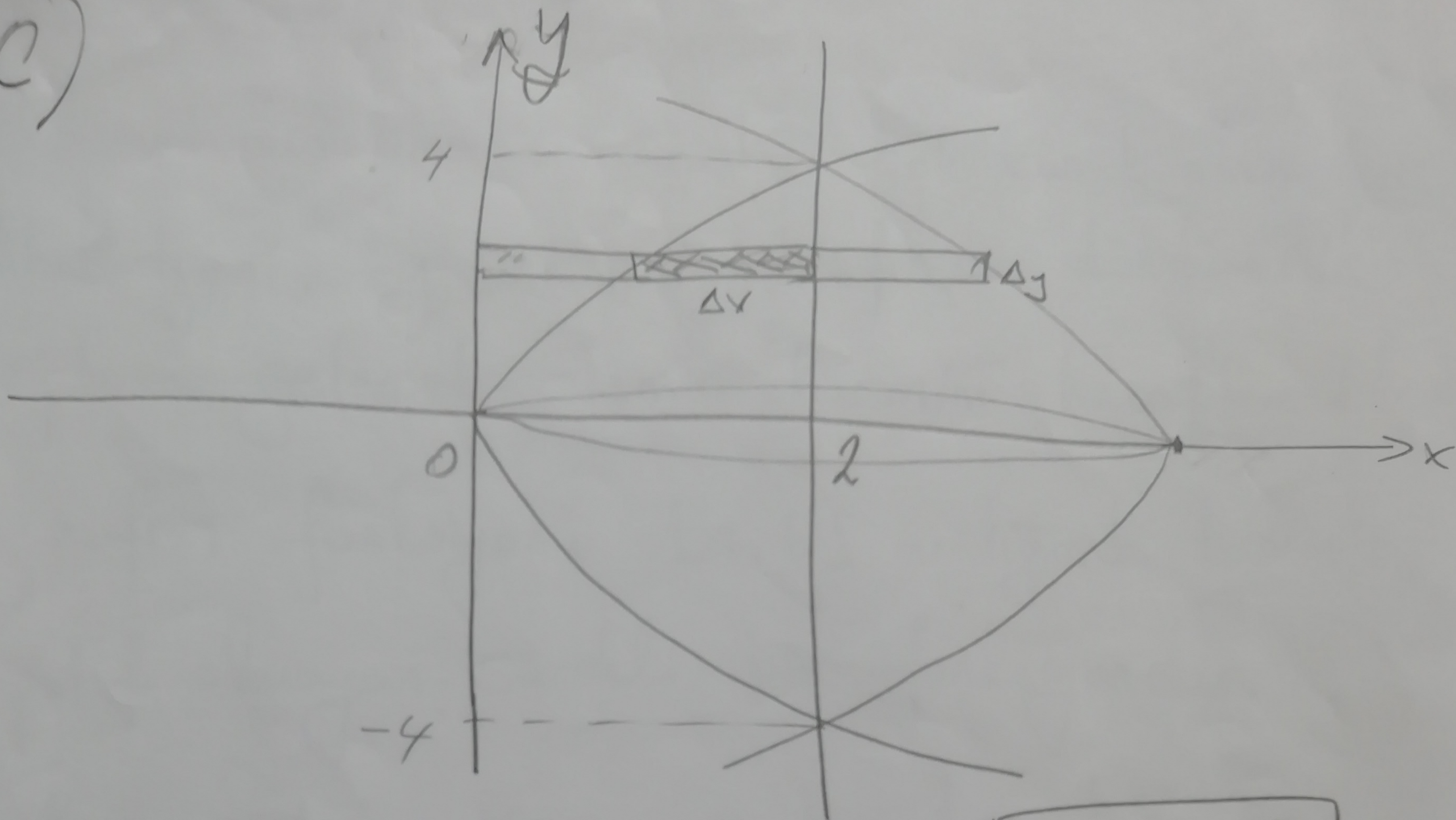
$\boxed{dV_2=\pi\cdot\frac{y^4}{64}dy}$

$dV=dV_1-dV_2$

$dV=2\cdot\pi\int_0^4\left(4-\frac{y^4}{64}\right)dy=\boxed{\frac{128}{5}\pi \text{ HB.}}$

$\frac{152}{5}$

c)



$\Delta V = \pi \cdot r^2 \Delta y$

$\boxed{r = 2 - \frac{y^2}{8}}$ olur.

$dV = \pi \cdot \left(2 - \frac{y^2}{8}\right)^2 \cdot dy$

$V = 2\pi \int_0^4 \left(2 - \frac{y^2}{8}\right)^2 dy = \boxed{\frac{256}{15}\pi \text{ HB.}}$

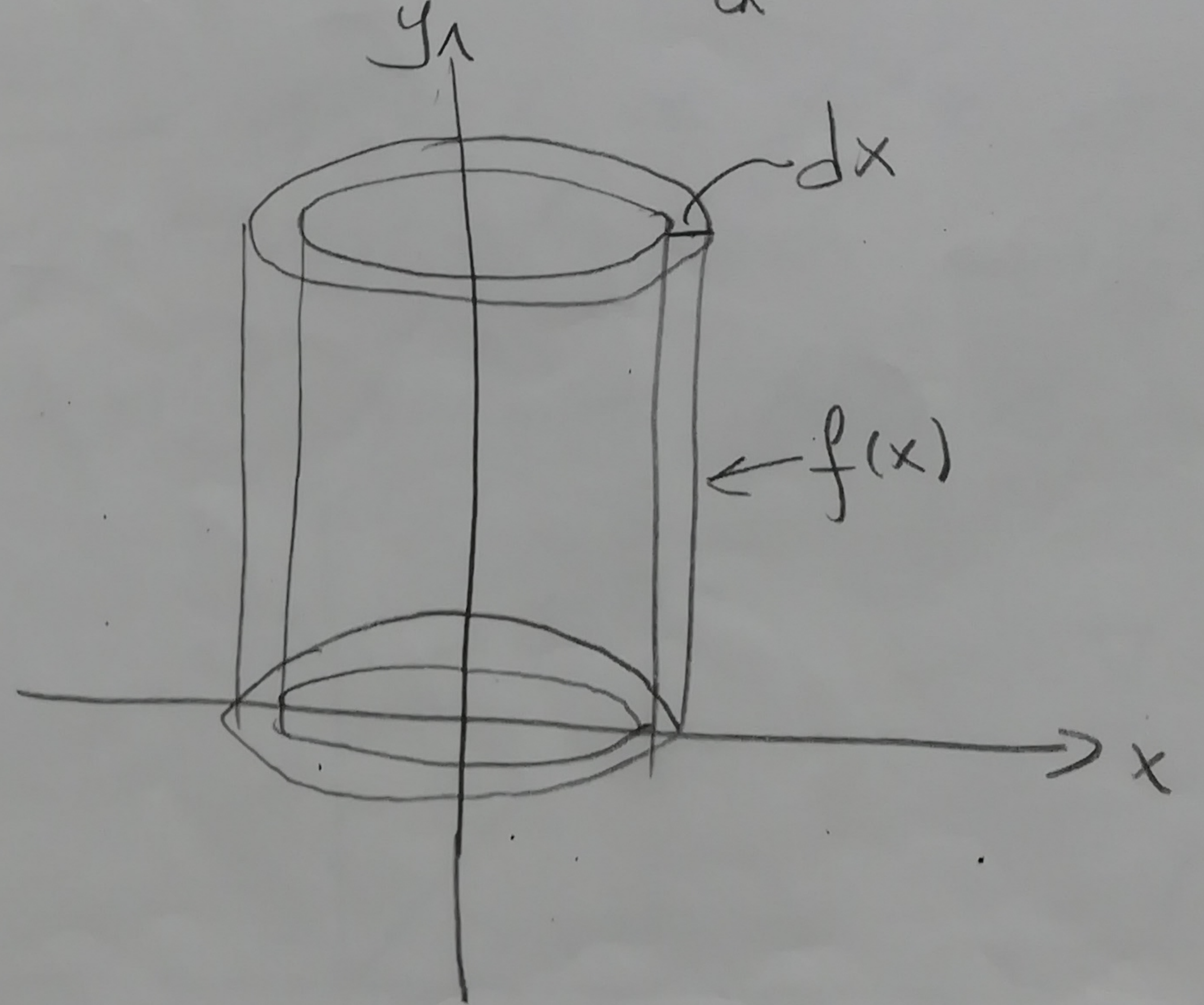
2- Silindir kabuğu metodu

Bu metodun amacı, genişliği çok küçük olan bir dikdörtgeni, y-ekseni etrafında döndürerek meydana gelecek cismin hacmini hesaplamaktır.

$y=f(x)$ fonksiyonu $[a,b]$ aralığında tanımlı, negatif olmayan sürekli bir fonksiyondur.

$y=f(x)$ eğrisi, $x=a$, $x=b$ doğruları ve x ekseni ile oluşturulmuş bölgenin y ekseni etrafında dönmesiyle oluşan cismin hacmi:

$$V = 2\pi \int_a^b x \cdot f(x)\, dx = 2\pi \int_a^b x \cdot y \cdot dx \text{ dir.}$$



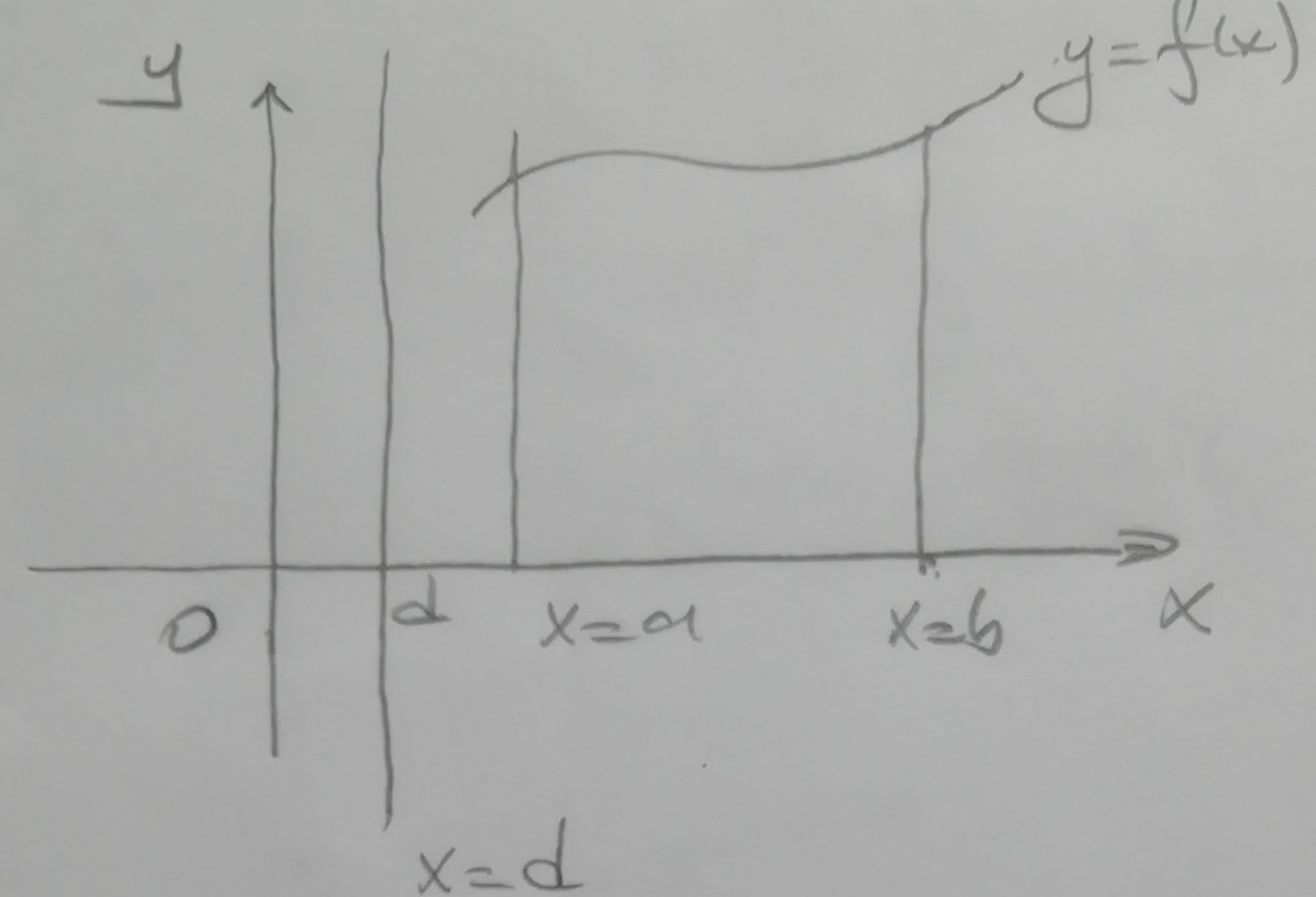
Benzer şekilde x-ekseni etrafında döndürülürse Hacim formülü

$$V = 2\pi \int_c^d y \cdot g(x) \cdot dy \text{ olur.}$$

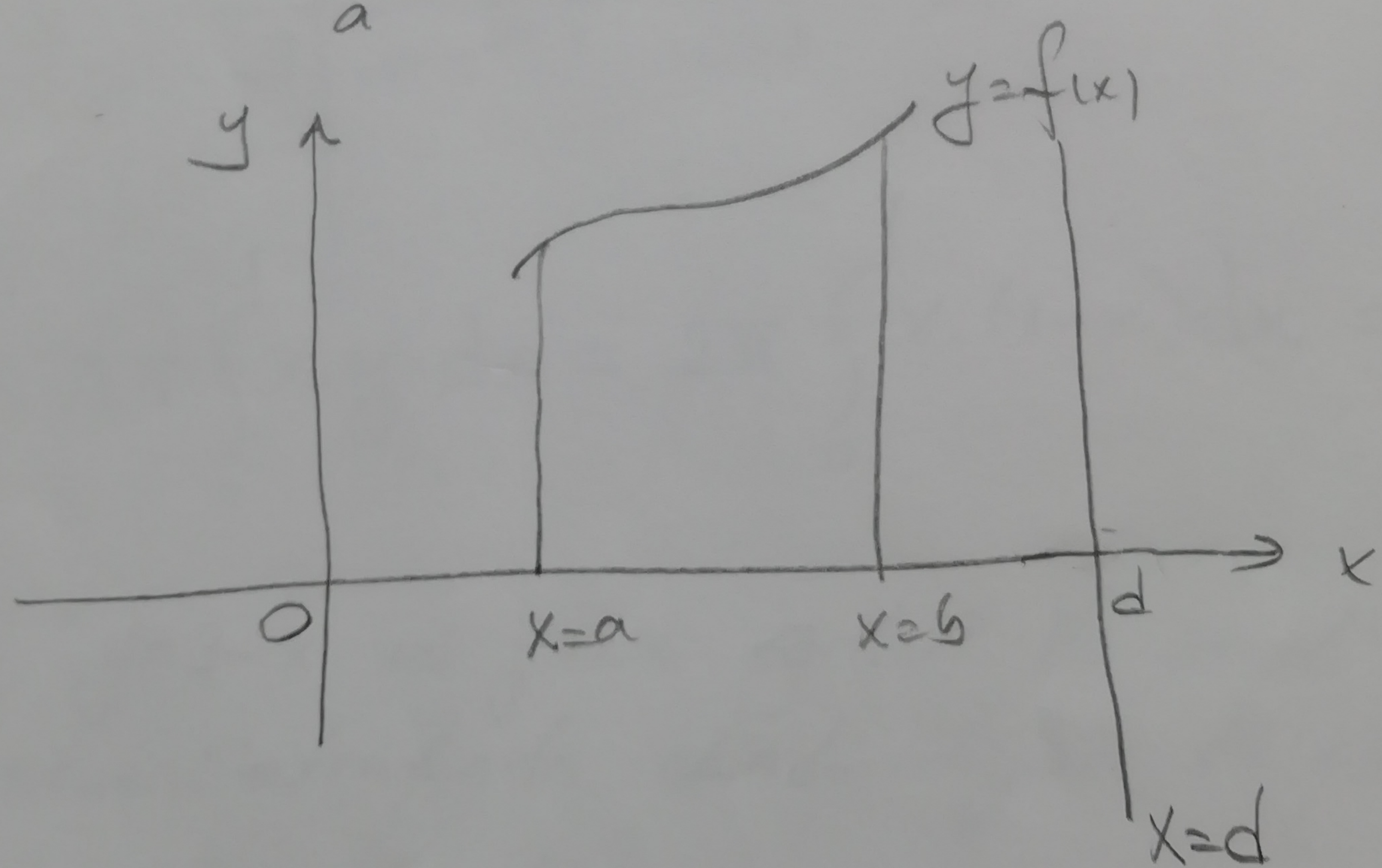
$$V = 2\pi \int_c^d y \cdot x \cdot dy \text{ olur.}$$

Kabuk Yöntemi (6-Ek)

$y=f(x)$ $x=a$, $x=b$, $y=0$, $x=d$ doğrusu etrafında dönmesiyle oluşan cismin Hacmi :



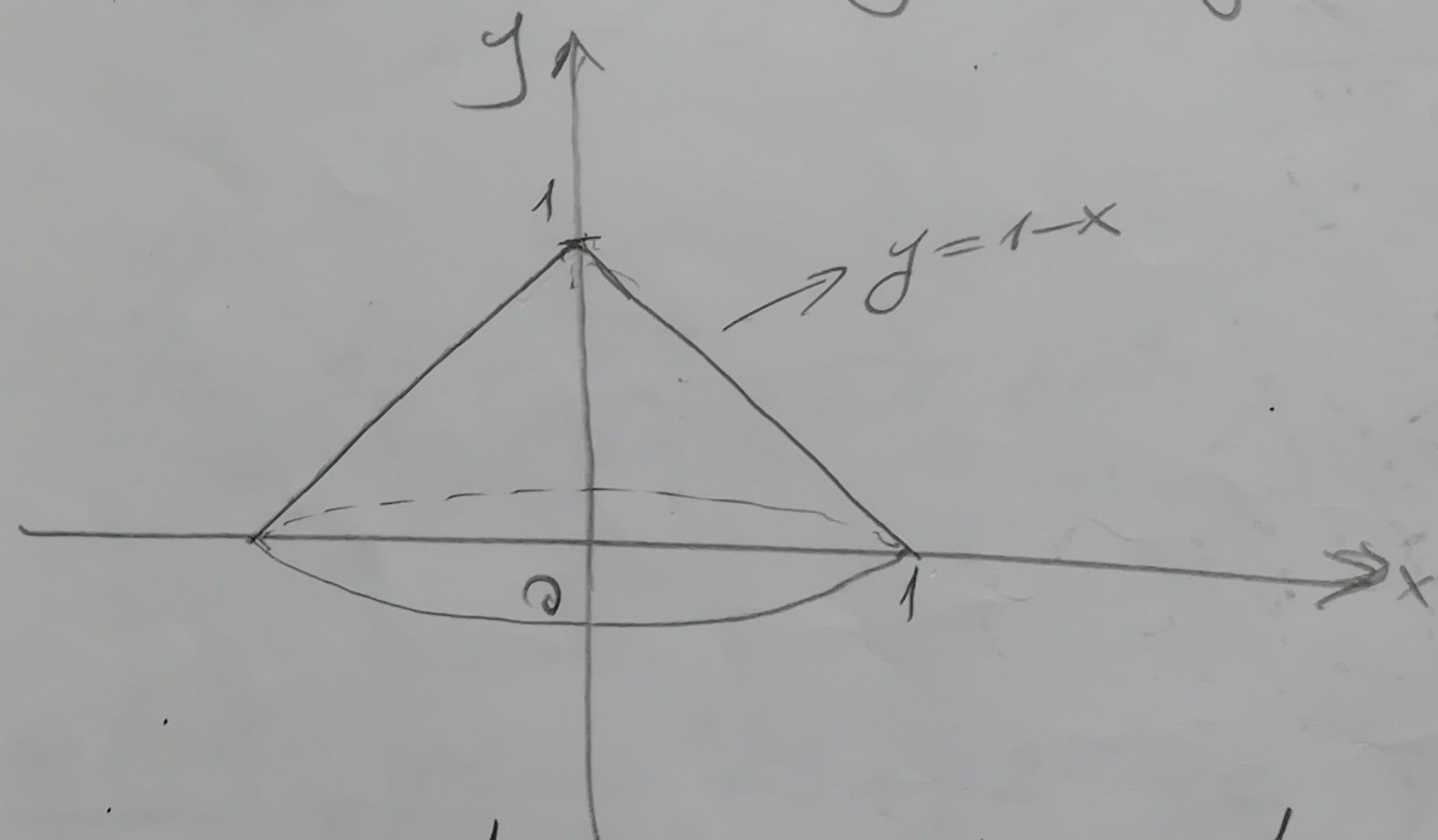
$$V = 2\pi \cdot \int_a^b (x-d) f(x)\,dx$$ olur.



$$V = 2\pi \cdot \int_a^b (d-x) \cdot f(x)\,dx$$ olur.

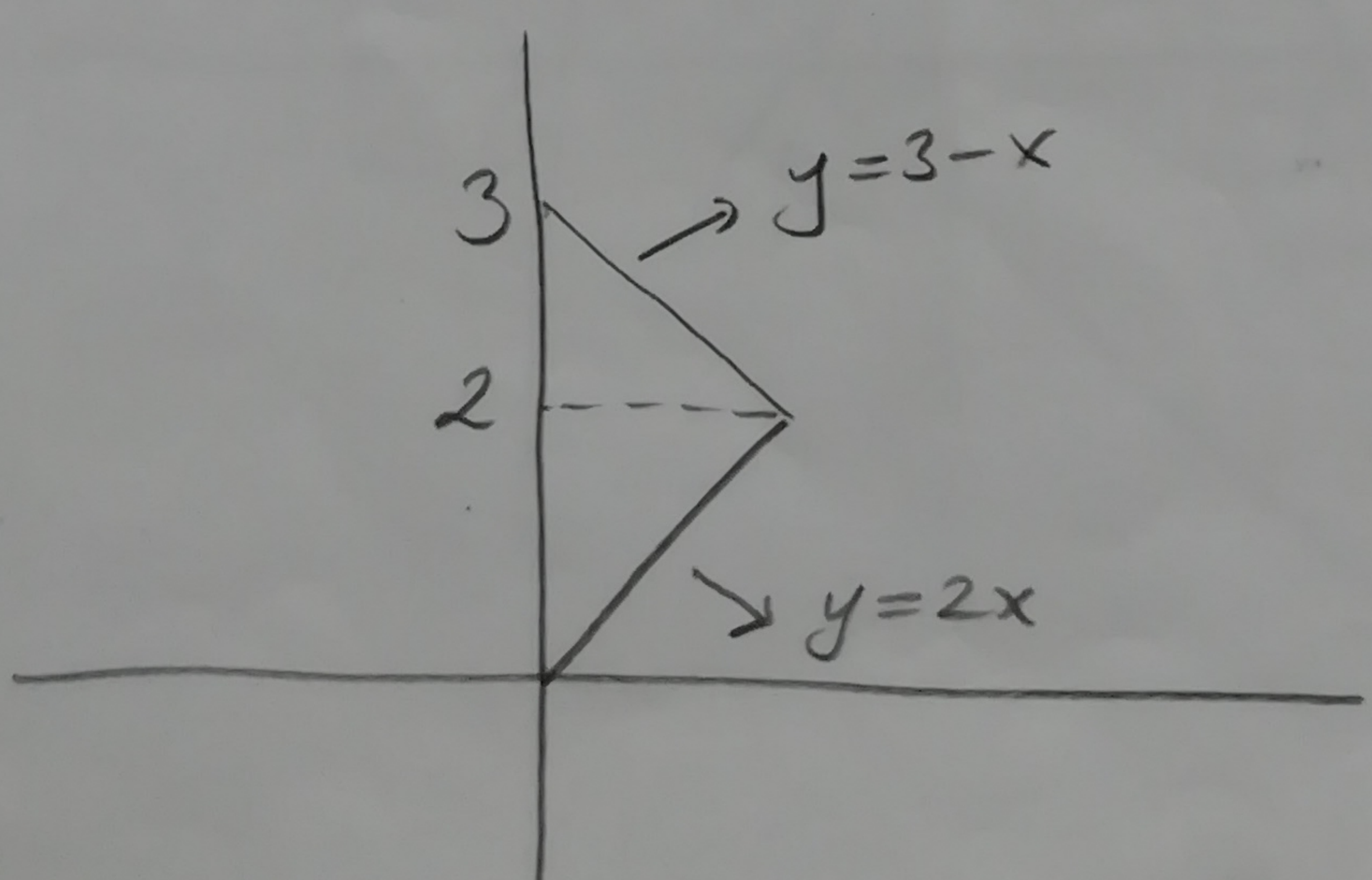
Örnek: $y = 1 - x$ eğrisinin y-ekseni etrafında dönmesiyle meydana gelen koninin (cismin) hacmini bulunuz.

Çözüm: Verilen doğru y-ekseni etrafında döndürülürse bir koni meydana gelir. Bu koninin hacmi:



$$V = 2\pi \int_0^1 x \cdot y \cdot dx = 2\pi \int_0^1 x \cdot (1-x) dx = \frac{\pi}{3} \text{ br}^3$$

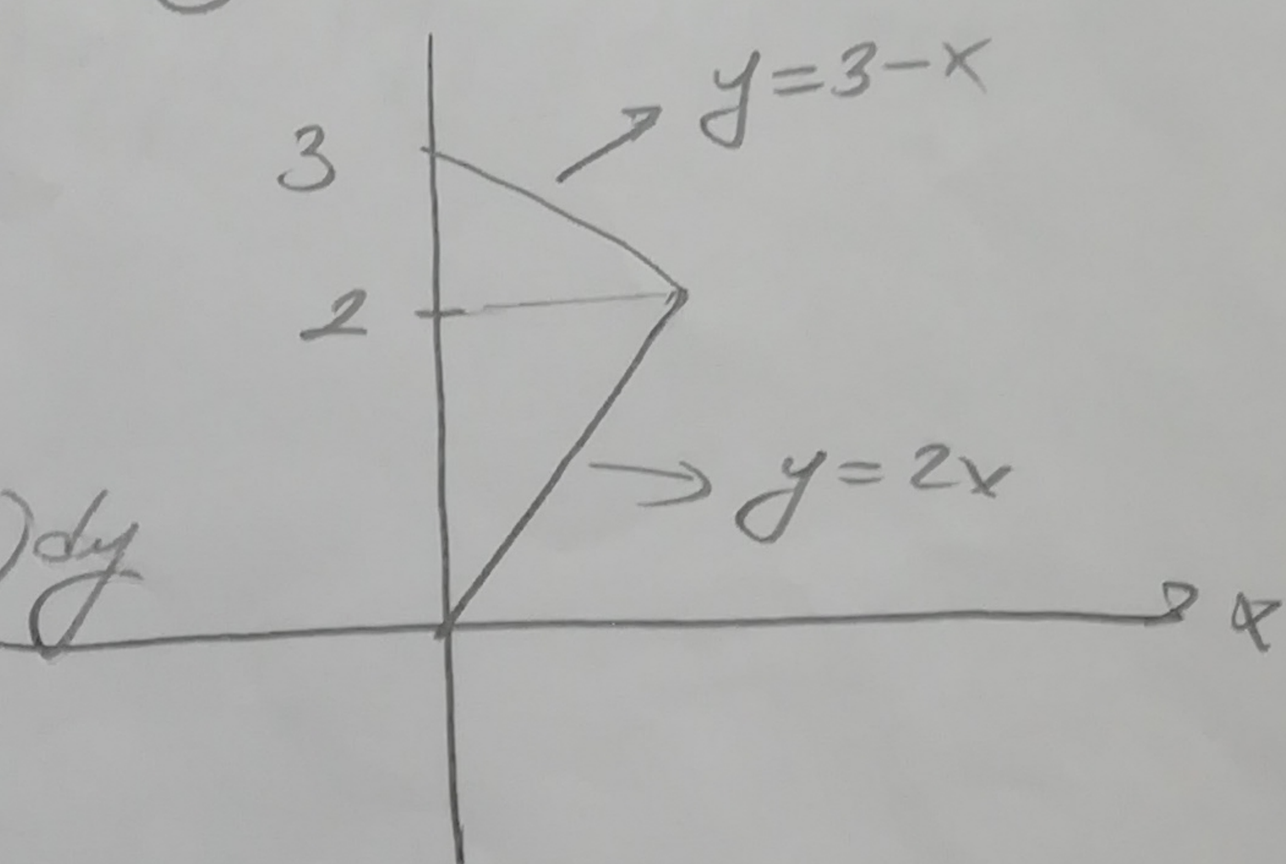
Örnek: $y = 3 - x$ ve $y = 2x$ eğrileri ile sınırlı bölge y-ekseni etrafında döndürülüyor. Meydana gelen cismin hacmini bulunuz.



$$V = 2\pi \int_0^1 x \left[(3-x) - 2x\right] dx$$

$$V = \pi \text{ br}^3$$

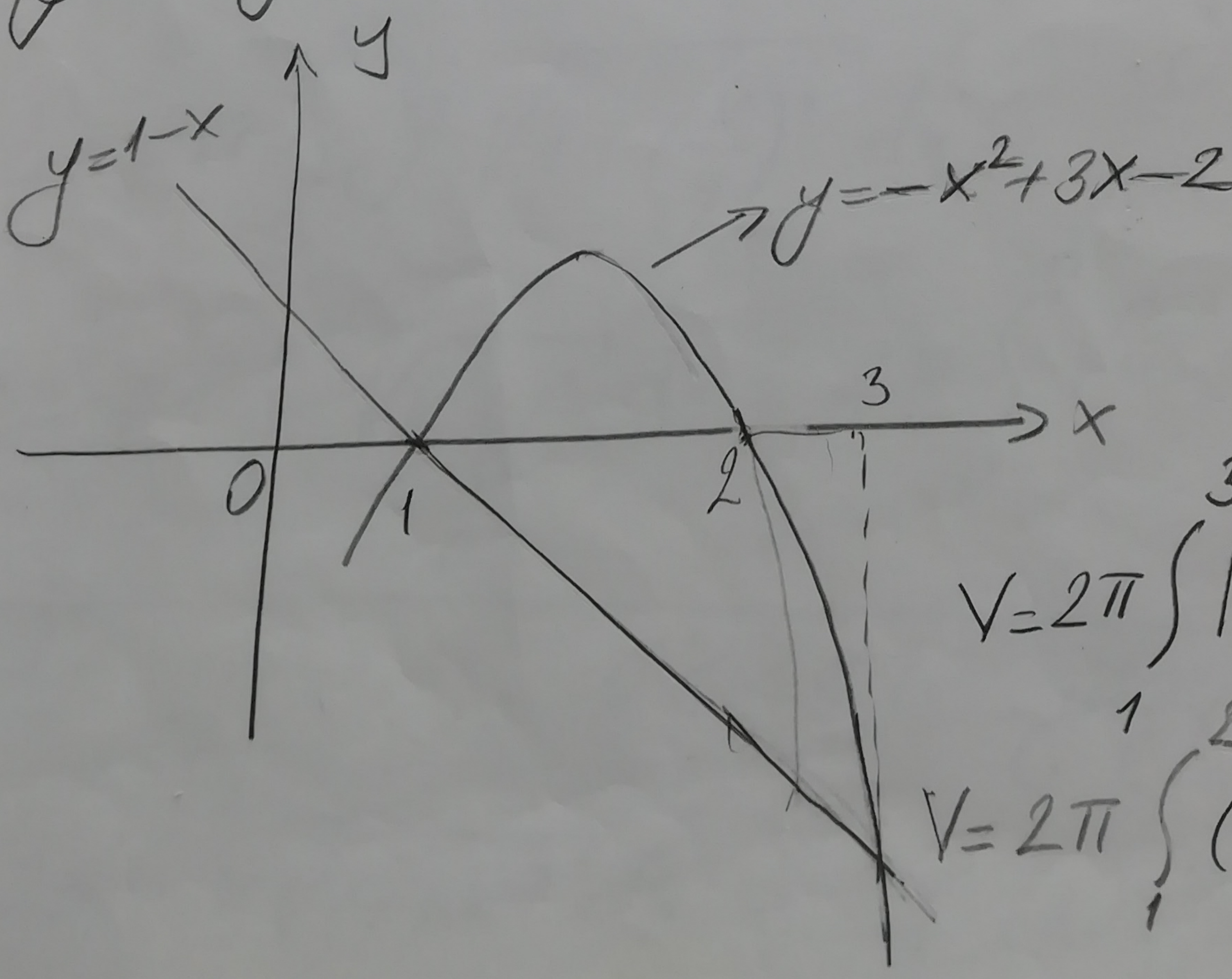
Örnek: $y=3-x$ ve $y=2x$ doğruları ile sınırlanmış bölgenin, $0 \leq x \leq 1$ aralığında kalan kısmı x-ekseni etrafında döndürülüyor. Meydana gelen cismin hacmini bulunuz.



$$V = 2\pi \int_0^2 y \cdot \frac{y}{2} \cdot dy + 2\pi \int_2^3 y(3-y)\,dy$$

$$V = \frac{8\pi}{3} + \frac{7\pi}{3} = 5\pi \ br^3$$

Örnek: $y=-x^2+3x-2$ ve $y=1-x$ eğrileri ile sınırlı bölge, $x=2$ doğrusu etrafında döndürülüyor. Meydana gelen cismin hacmini bulunuz.

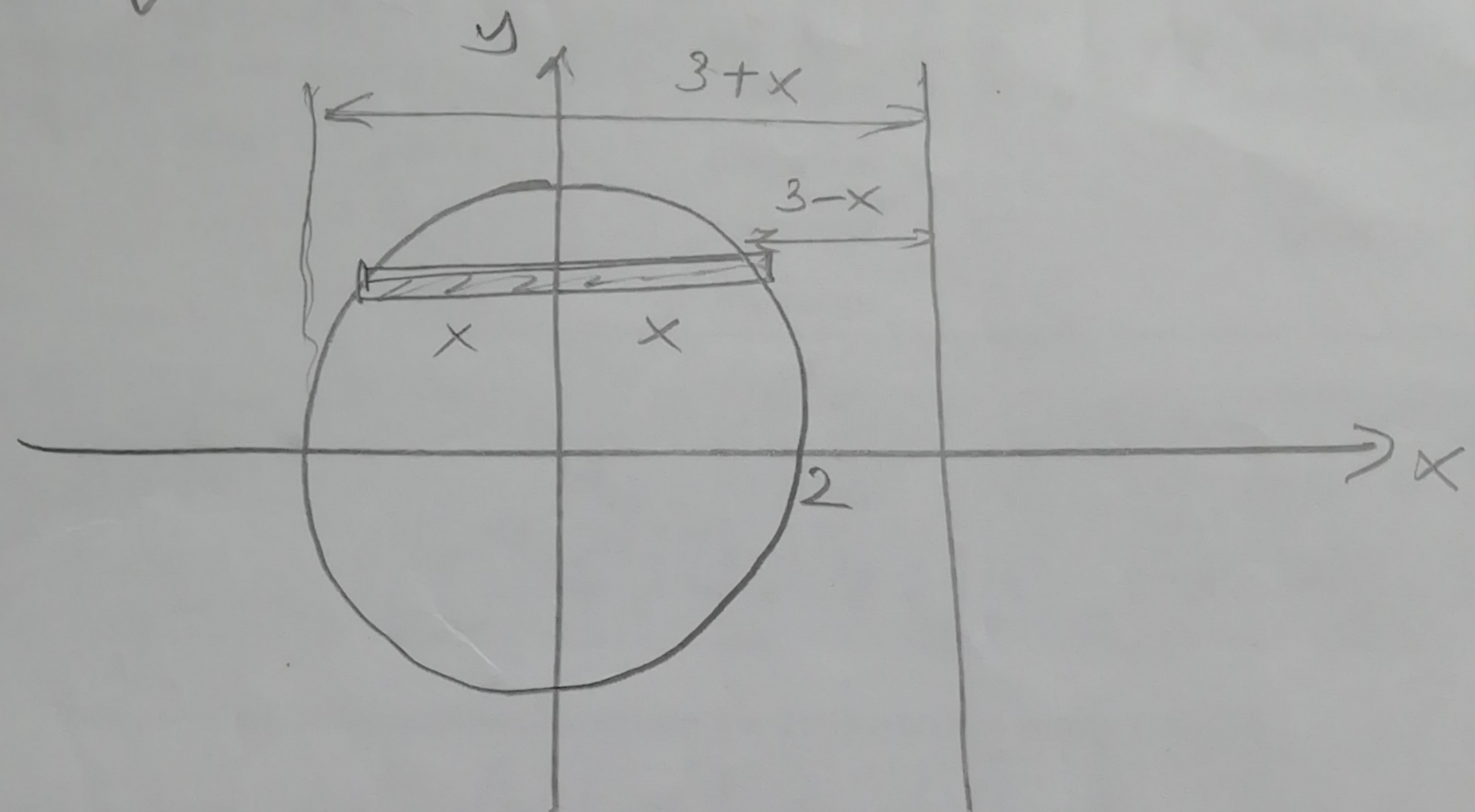


$$V = 2\pi \int_1^3 |x-2| \left[(-x^2+3x-2)-(1-x)\right] dx$$

$$V = 2\pi \int_1^2 (x^3-6x^2+11-6)\,dx + 2\pi \int_2^3 (6-11x+6x^2-x^3)\,dx$$

$$V = \pi \ br^3 \text{ bulunur.}$$

Örnek: $x^2+y^2=4$ dairesinin $x=3$ doğrusu etrafında dönmesiyle oluşan dönel cismin hacmini bulunuz.



$$dV_1=\pi(3+x)^2dy$$
$$dV_2=\pi(3-x)^2dy$$

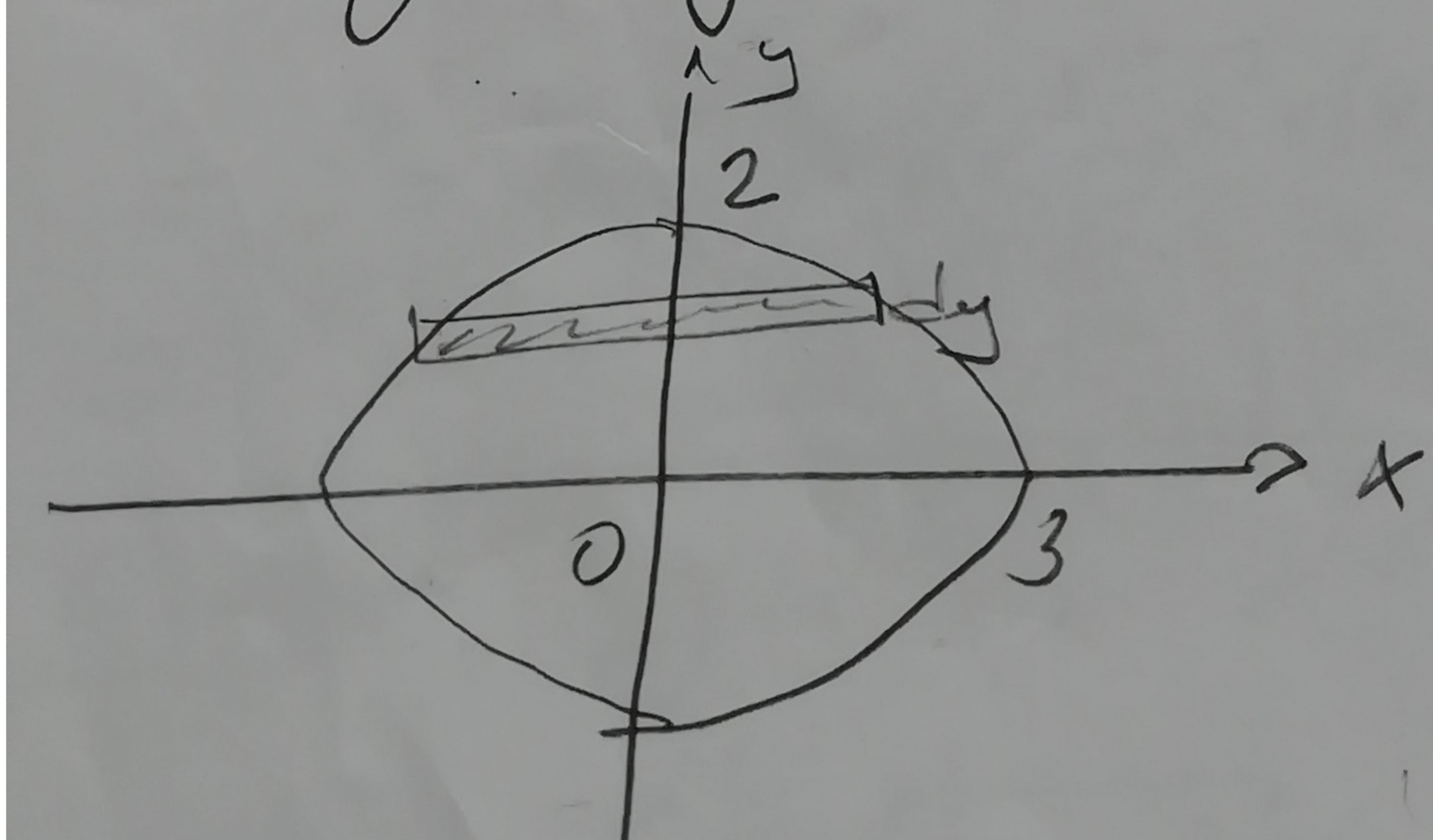
$x=3$

$$V=2\pi\int_0^2\left[(3+x)^2-(3-x)^2\right]dy$$

$$V=24\pi\int_0^2 x\,dy$$

$$V=24\pi\int_0^2\sqrt{4-y^2}\,dy=\underline{\underline{24\pi^2}}$$

Örnek: $4x^2+9y^2=36$ elipsinin oy-ekseni etrafında dönmesiyle meydana gelen cismin hacmini bulunuz.



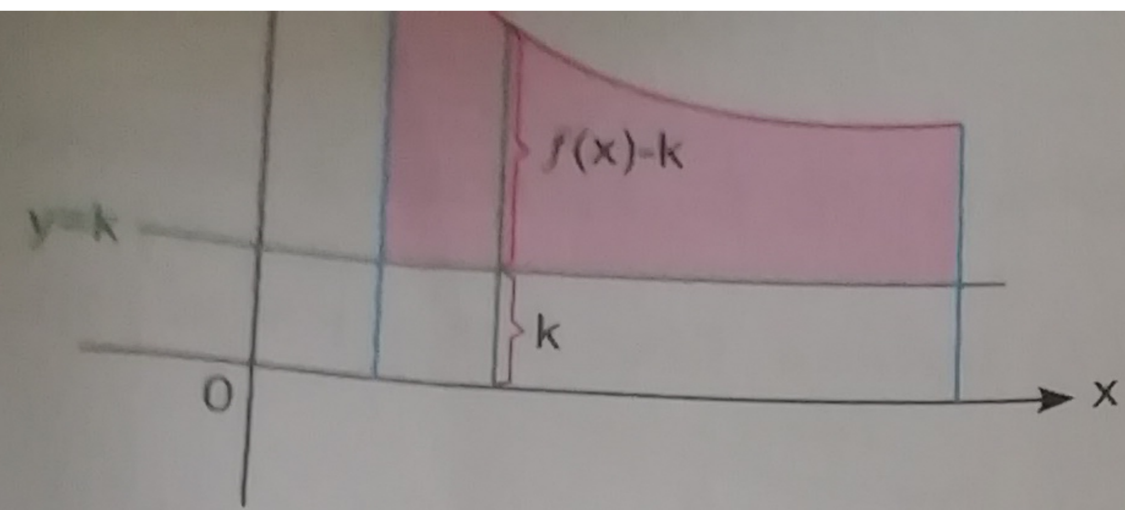
$$\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{4}=1$$

$$V=2\pi\int_0^2 x^2dy=2\pi\int_0^2\left(\frac{36-9y^2}{4}\right)dy$$

$$\underline{\underline{V=24\pi}}$$

meydana gelen dönel cismin hacmi

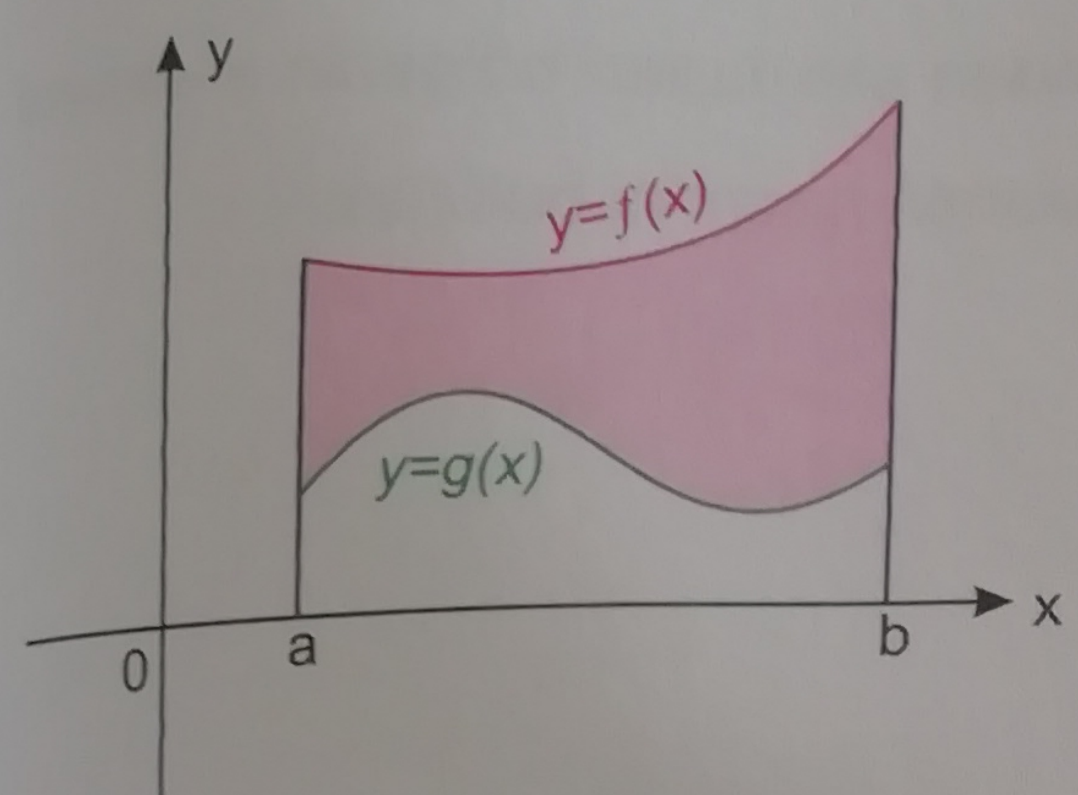
$$V = \pi \int_a^b [f(x) - k]^2 \, dx \qquad (8.18)$$



olur, zira eğri üzerindeki bir (x, y) noktasının dönme ekseni olan $y = k$ doğrusuna olan uzaklığı $|f(x) - k|$ kadardır. Benzer şekilde, $x = g(y)$ eğrisi, $y = c$ ve $y = d$ doğruları ile y–ekseni tarafından sınırlanan bölgenin y–ekseni etrafında dönmesiyle elde edilen dönel cismin hacminin

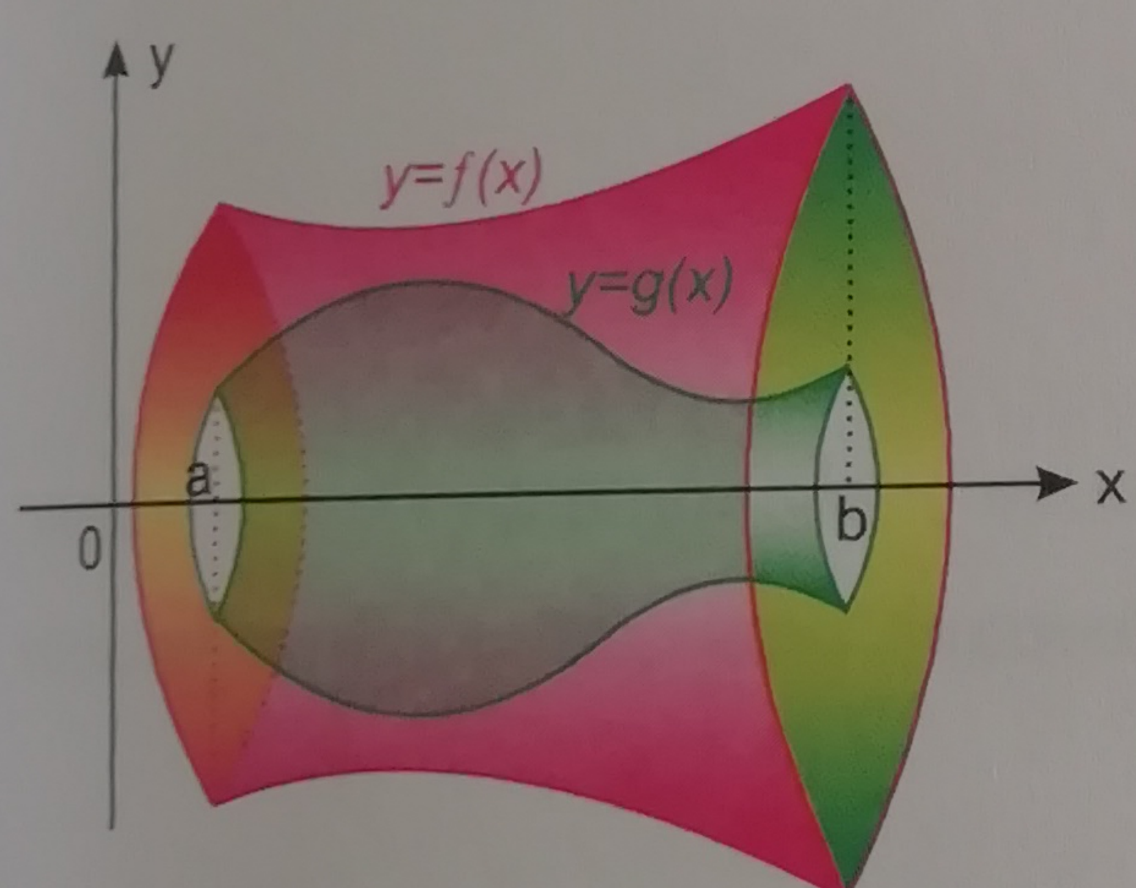
$$V = \pi \int_c^d g^2(y) \, dx \qquad (8.19)$$

olacağı gösterilebilir.



$[a, b]$ aralığında $0 \leq g(x) \leq f(x)$ olsun. $y = f(x)$, $y = g(x)$ eğrileri ile $x = a$, $x = b$ doğruları tarafından sınırlanan düzlemsel bölgenin x–ekseni etrafında döndürülmesiyle meydana gelen dönel cismin hacmi

$$V = \pi \int_a^b \left[f^2(x) - g^2(x) \right] dx \qquad (8.20)$$

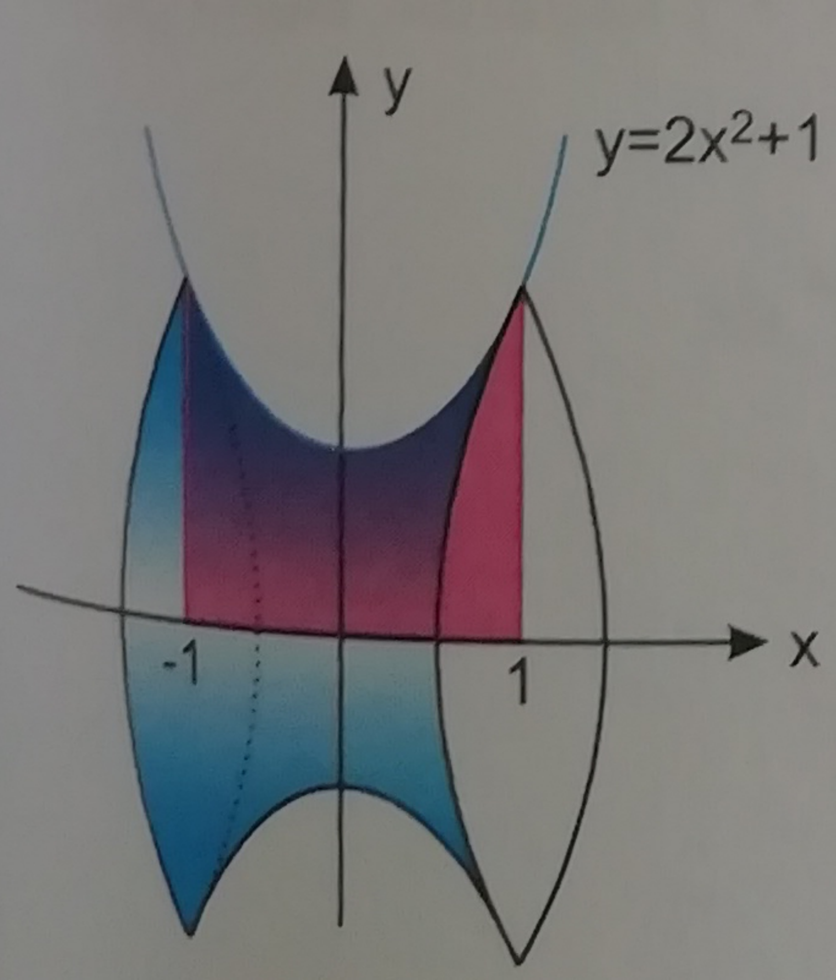


olacaktır. Bu, ABFE bölgesinin x–ekseni etrafında döndürülmesiyle elde edilen hacimden ABCD bölgesinin döndürülmesiyle elde edilen hacmin çıkarılmasından, yani

$$\pi \int_a^b f^2(x) \, dx - \pi \int_a^b g^2(x) dx$$

farkından başka birşey değildir.

ÖRNEK : $y = 2x^2 + 1$ parabolü, $x = -1$ ve $x = 1$ doğruları ile x–ekseni tarafından sınırlanan bölge x–ekseni etrafında döndürülüyor. Meydana gelen dönel cismin hacmini hesaplayınız.



Çözüm :

$$V = \pi \int_{-1}^{1} (2x^2 + 1)^2 \, dx = \pi \int_{-1}^{1} (4x^2 + 4x^2 + 1) \, dx$$

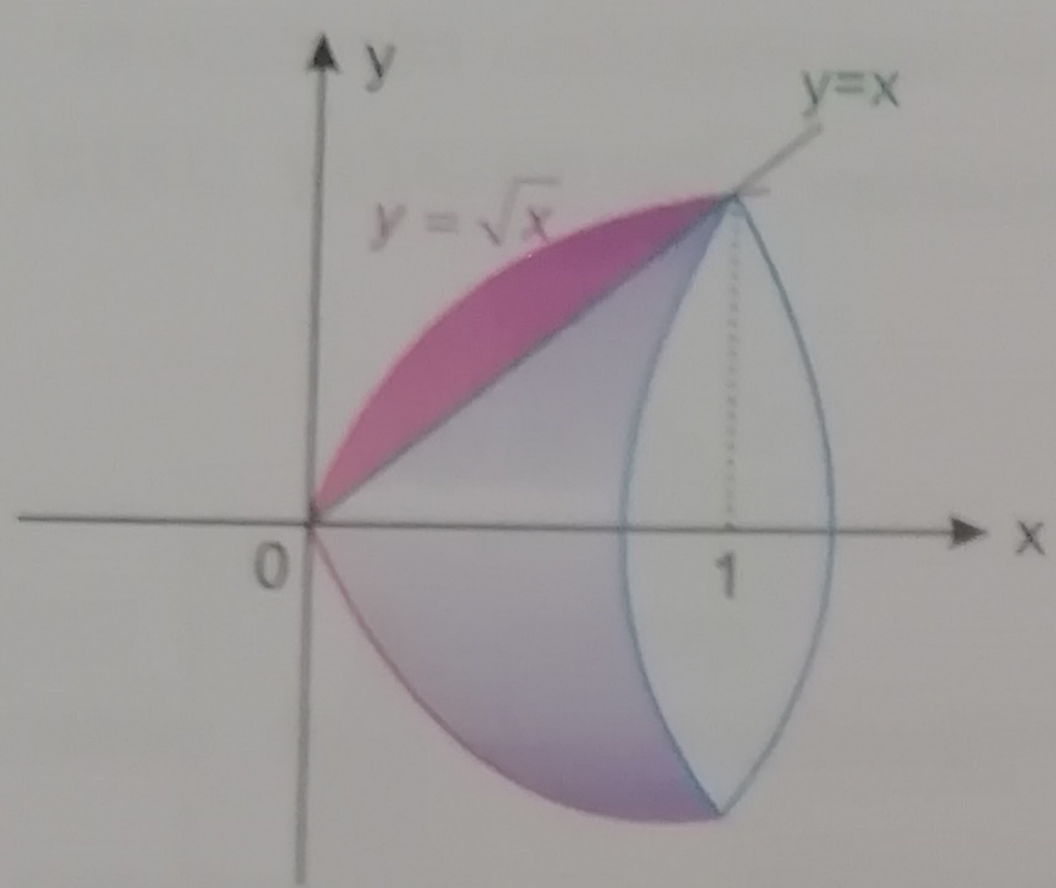
$$= \pi \left(\frac{4}{5} x^5 + \frac{4}{3} x^3 + 1 \right) = \frac{47}{15} \, br^2$$

$$V = \pi \int_{-a}^{a} \left[\left(b + \sqrt{a^2 - x^2}\right)^2 - \left(b - \sqrt{a^2 - x^2}\right)^2 \right] dx = 4\pi b \int_{-a}^{a} \sqrt{a^2 - x^2}$$

$$= 8\pi b \int_0^a \sqrt{a^2 - x^2}\, dx = 2\pi^2 a^2 b \text{ birim küp}$$

olur.

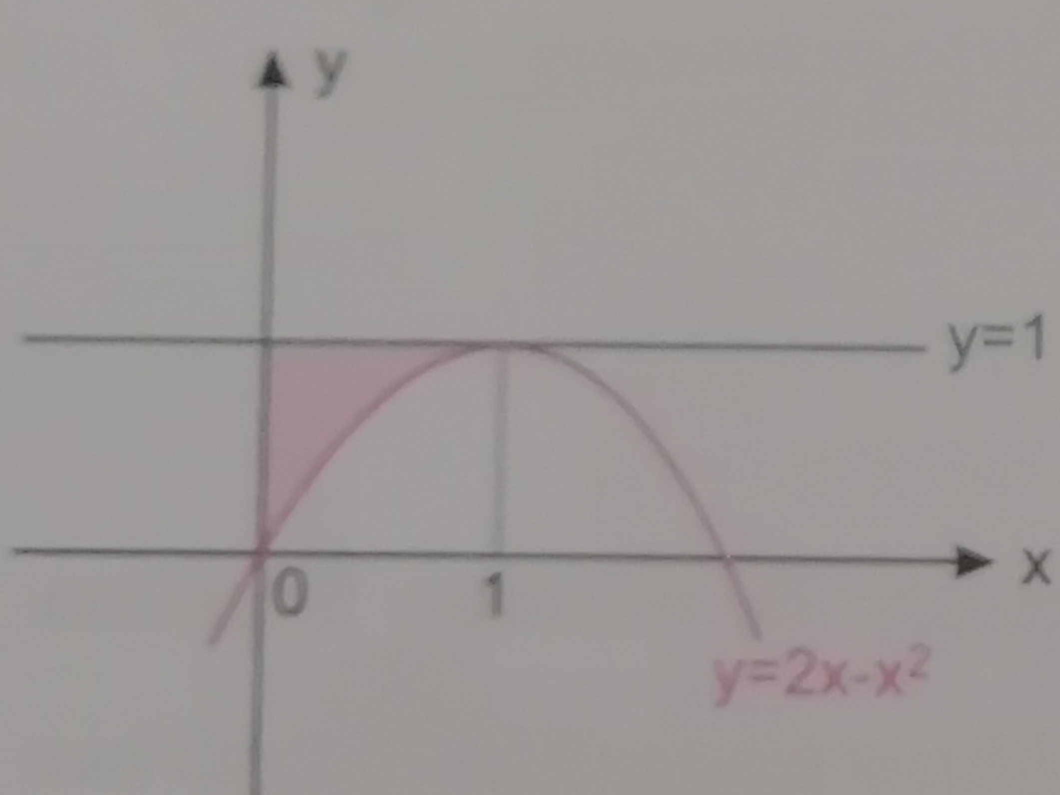
ÖRNEK : $y = \sqrt{x}$ eğrisiyle $y = x$ doğrusu tarafından sınırlanan bölge etrafında döndürülmesiyle meydana gelen dönel cismin hacmini bulun



Çözüm :

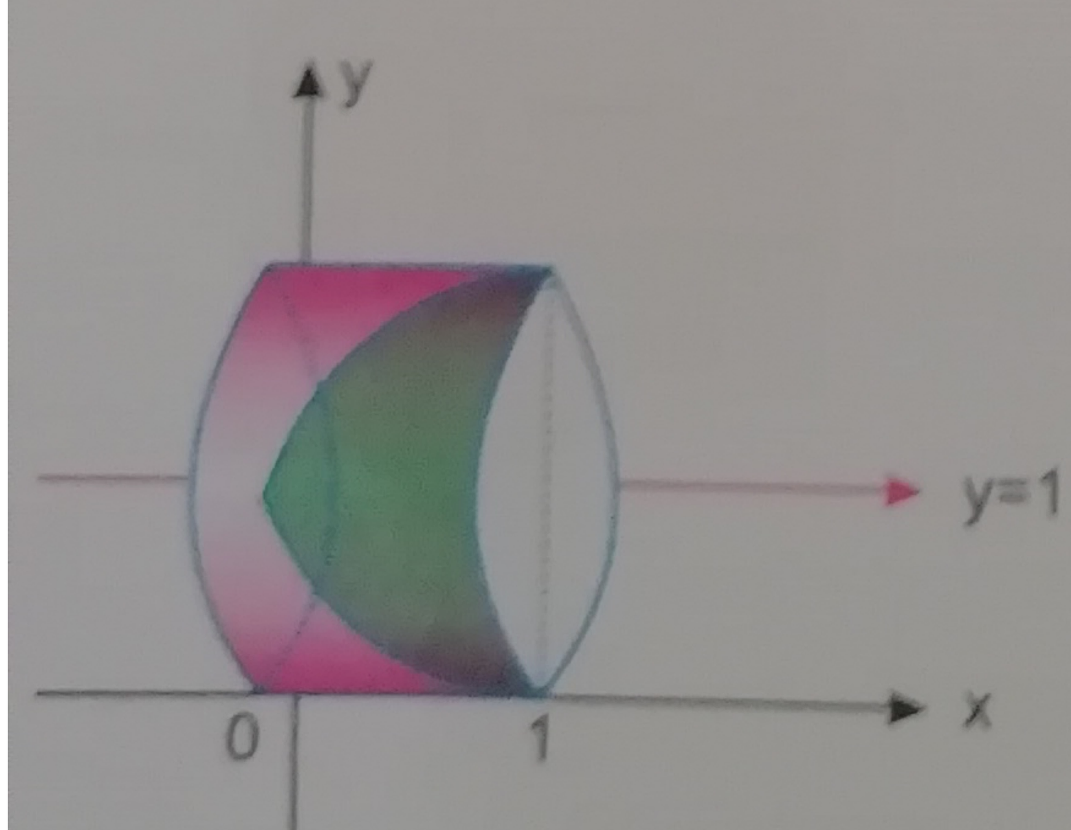
$$V = \pi \int_0^1 \left[\left(\sqrt{x}\right)^2 - x \right] dx = \pi \int_0^1 (x - x^2)\, dx$$

$$= \pi \left(\frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} \right) \Bigg|_0^1 = \frac{\pi}{6} \; br^3$$



ÖRNEK : $y = 2x - x^2$ parabolü, $y = 1$ doğrusu ve y–ekseni tarafın bölge $y = 1$ doğrusu etrafında döndürülüyor. Meydana gelen dönel c bulunuz.

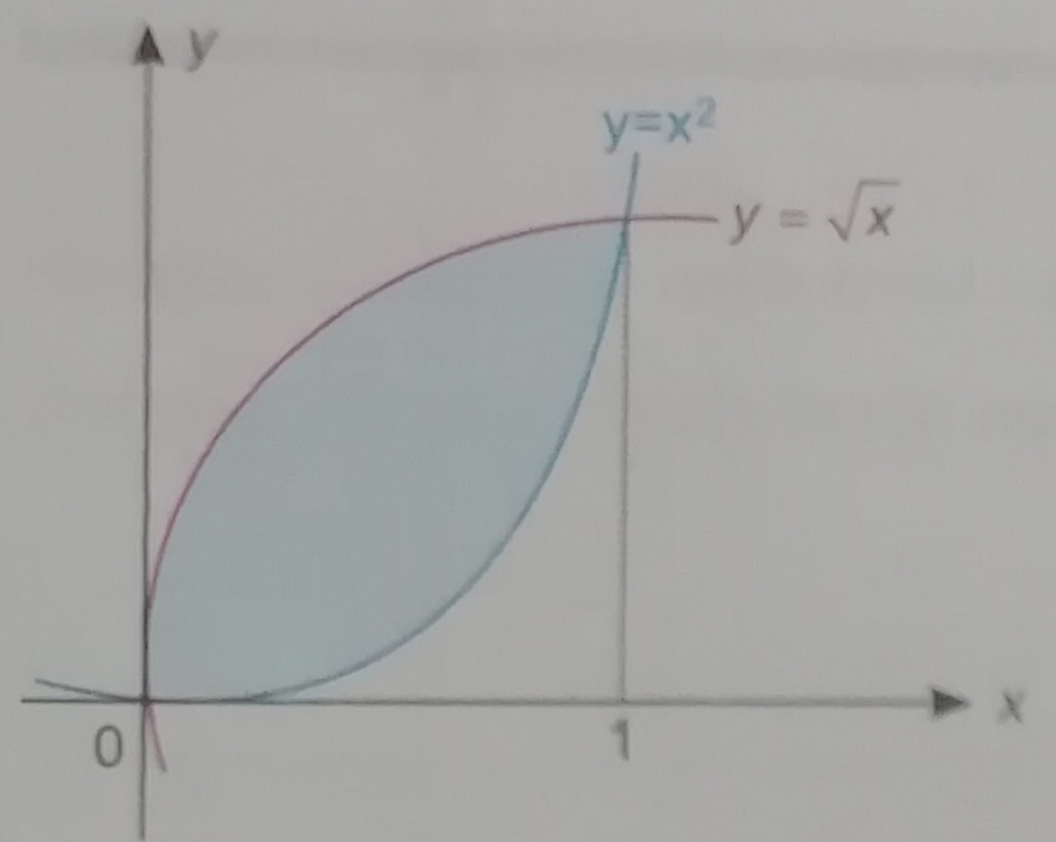
Çözüm : $y = 2x - x^2$ parabolü üzerindeki bir (x, y) noktasının dönm $y = 1$ doğrusuna olan uzaklığı $\ell = 1 - (2x - x^2) = x^2 - 2x + 1$ kadardır.



$$V = \pi \int_0^1 \ell^2\, dx = \pi \int_0^1 (x^2 - 2x + 1)^2\, dx = \pi \int_0^1 (x - 1)^4\, dx$$

$$= \pi \cdot \frac{1}{5} (x - 1)^5 \Big|_0^1 = \frac{\pi}{5}\, br^3$$

olur.

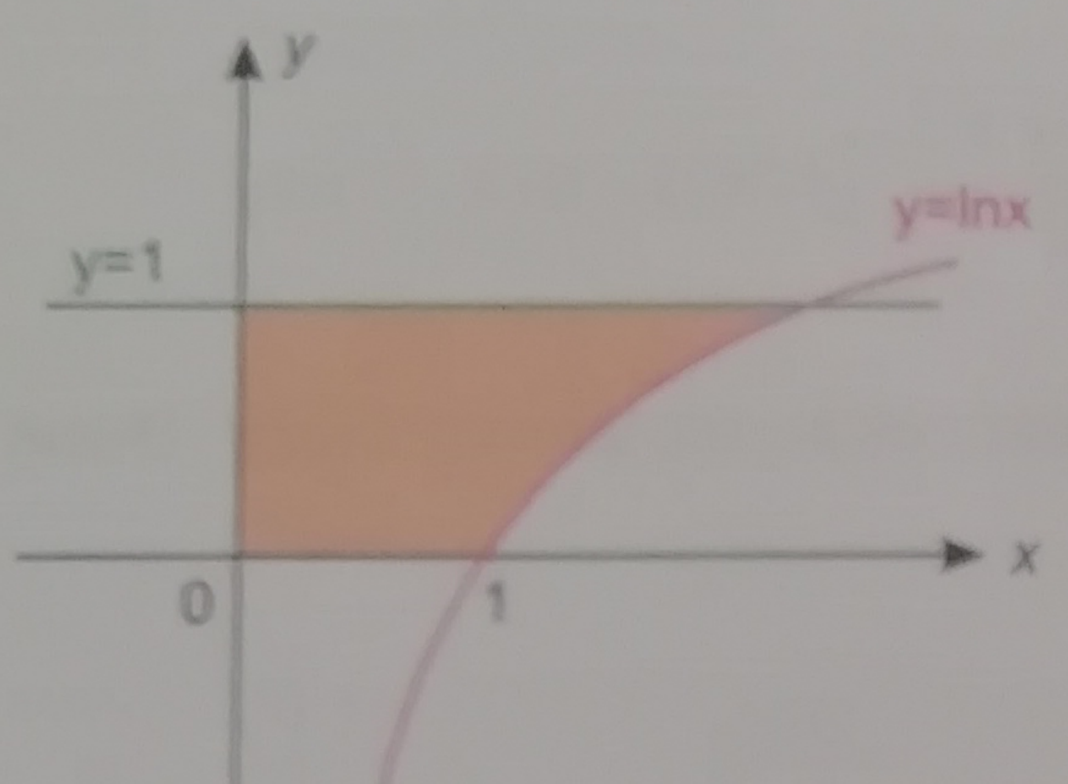


ÖRNEK : $y = x^2$ ile $y^2 = x$ parabolleri tarafından sınırlanan bölgenin $0x$– ekseni etrafında döndürülmesi ile meydana gelen dönel cismin hacmini bulunuz.

Çözüm : Söz konusu bölge yandaki şekilde gösterilmiştir. Üstteki eğrinin denklemi $y = \sqrt{x}$, alttaki eğrinin denklemi $y = x^2$ olduğundan

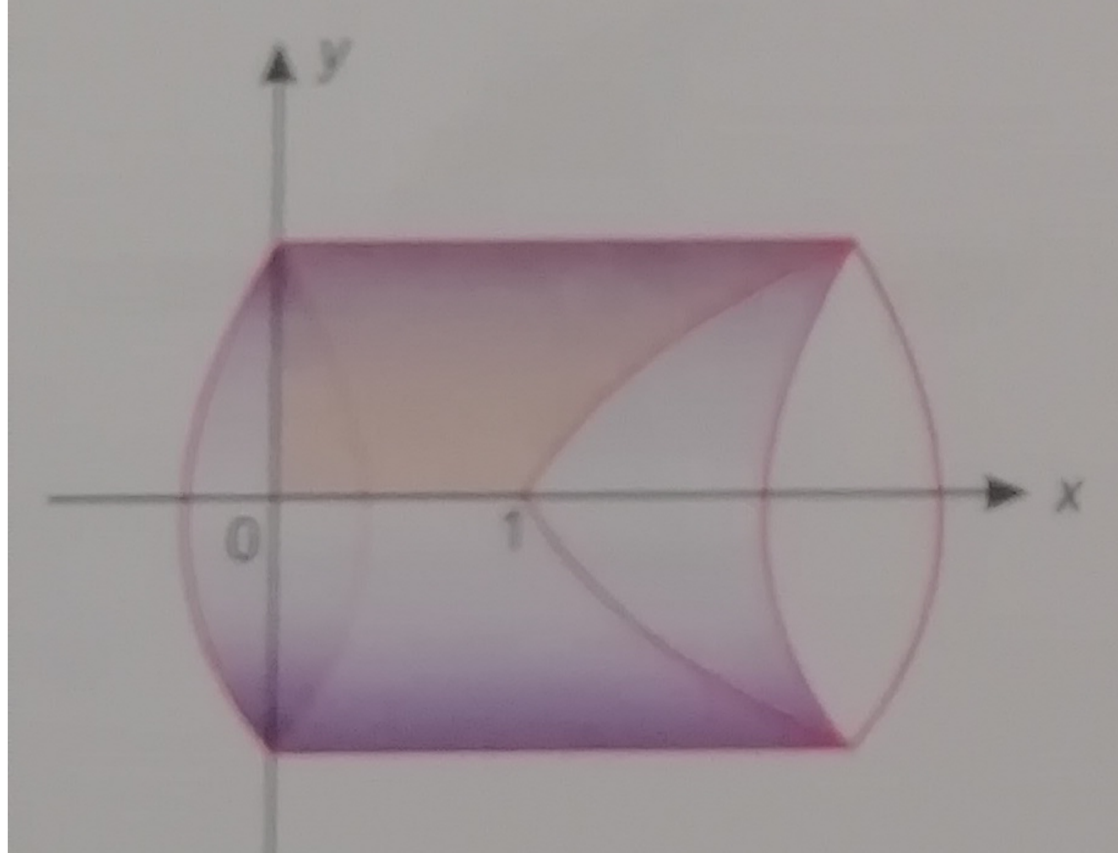
$$V = 2\pi \int_0^1 x\left|\sqrt{x} - x^2\right| dx = 2\pi \int_0^1 \left(x^{\frac{3}{2}} - x^3\right) dx = \frac{3\pi}{10}\ br^3$$

olur.



ÖRNEK : $y = \ln x$ eğrisi, $y = 1$ doğrusu ve koordinat eksenleri tarafından sınırlanan düzlemsel bölgenin x–ekseni etrafında döndürülmesiyle oluşan dönel cismin hacmini bulunuz.

Çözüm : $y = \ln x \Rightarrow x = e^y$ dir.

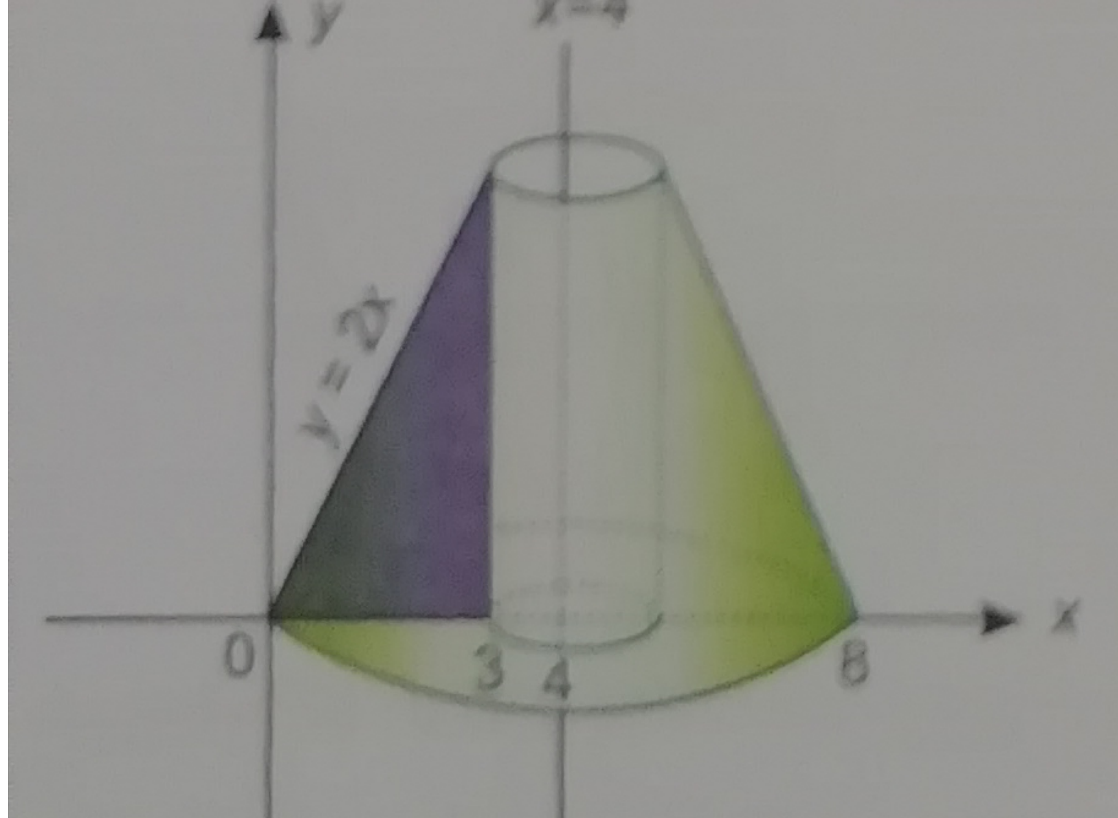


$$V = 2\pi \int_0^1 |y|\,|u(y) - v(y)|\,dy$$

$$= 2\pi \int_0^1 |y|\,|e^y - 0|\,dy = 2\pi \int_0^1 y e^y\,dy$$

$$= 2\pi\, e^y (y-1)\Big|_0^1 = 2\pi\,(1) = 2\pi\ br^3$$

ÖRNEK : $y = 2x$, $x = 3$ doğruları ile x ekseni tarafından sınırlanan üçgens bölgenin $x = 4$ doğrusu etrafında döndürülmesiyle oluşan dönel cismin hacm hesaplayınız.



Çözüm : Sözkonusu üçgensel bölgede alınan bir noktanın dönme eksenine o uzaklığı $4 - x$ olduğundan hacim formülünde x çarpanı yerine $4 - x$ gelecel Buna göre

$$V = 2\pi \int_0^3 (4 - x)\,2x\,dx$$

$$= 4\pi \int_0^3 (4x - x^2)\,dx = 36\pi$$

olur.

Yüzey alanları hesabı

① $S = 2\pi \int_a^b |y| \cdot ds = 2\pi \int_a^b |f(x)| \sqrt{1+(f'(x))^2}\, dx$

$ds = \sqrt{1+y'^2}\, dx$

yay diferansiyeli

② $S = 2\pi \int_c^d |x|\, ds = 2\pi \int_c^d |g(y)| \cdot \underbrace{\sqrt{1+(g'(y))^2}\, dy}_{ds}$

Örnek 1- $y = \sqrt{a^2 - x^2}$, $(-a \leq x \leq a)$ küresinin yüzey alanını hesaplayınız.

$y' = \frac{-2x}{2\sqrt{a^2-x^2}} = -\frac{x}{y}$ olur

$S = 2\pi \int_{-a}^{a} y \cdot \sqrt{1+\left(\frac{x}{y}\right)^2}\, dx$

$S = 4\pi \int_0^a \sqrt{\underbrace{x^2+y^2}_{a^2}}\, dx = 4\pi \int_0^a \sqrt{a^2}\, dx = \underline{\underline{4\pi a^2}}$ bulunur

---

Örnek 2- $y = x^2$, $0 \leq x \leq 1$ yüzey alanı = ?

$S = 2\pi \int_0^1 x \sqrt{1+4x^2}\, dx = \frac{\pi}{6}(5\sqrt{5} - 1)$