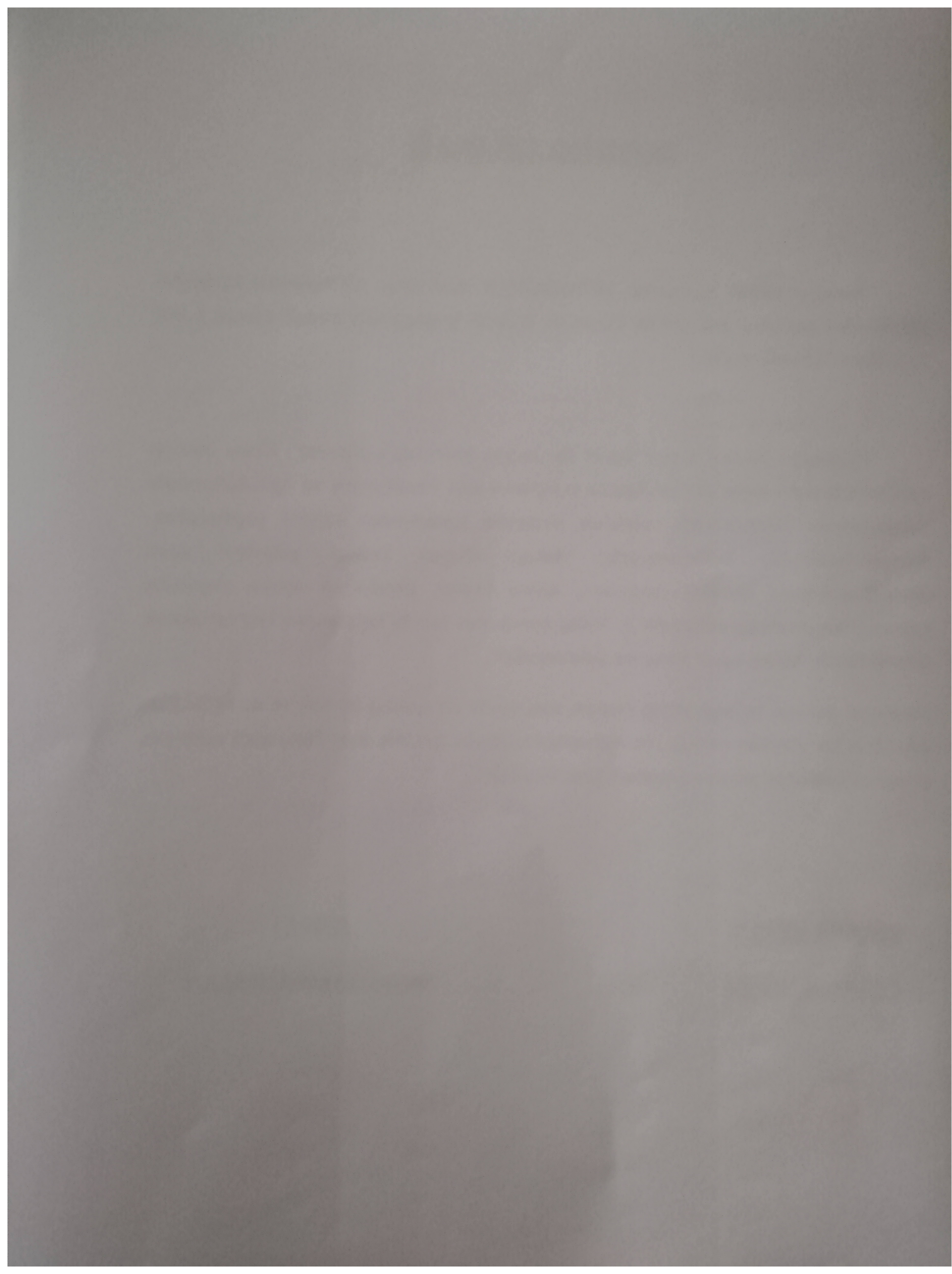




Örnek 1- $(x^2-1)y''+3xy'+xy=0, y(0)=4, y'(0)=6$

Başlangıç Değer probleminin kuvvet serisi çözümünü bulunuz. (Çözüm Serisini 4. derece termlere kadar yazınız). Serinin yakınsaklık (yarısapını) bulunuz.

Çözüm: $x^2-1=0 \Rightarrow x=\pm 1$ dışındaki bütün noktalar verilen Diferansiyel denklemin adi noktalarıdır.

Başlangıç şartları $x=0$ da verilmiş olduğundan $x_0=0$ almalıyız. ($x_0=0$ civarında (komşuluğunda) Serinin çözümünü bulmalıyız)

$$y = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n, \quad y' = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cdot n x^{n-1}, \quad y'' = \sum_{n=2}^{\infty} a_n n(n-1) x^{n-2}$$

$$(x^2-1) \cdot \sum_{n=2}^{\infty} a_n n(n-1) x^{n-2} + 3x \sum_{n=1}^{\infty} a_n n x^{n-1} + x \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = 0$$

$$\sum_{n=2}^{\infty} a_n n(n-1) x^n - \sum_{n=2}^{\infty} a_n n(n-1) x^{n-2} + 3 \sum_{n=1}^{\infty} a_n n x^n + \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{n+1} = 0$$

$$\sum_{n=2}^{\infty} a_n n(n-1)x^n - \sum_{n=0}^{\infty} a_{n+2} (n+2)(n+1)x^n + 3 \sum_{n=1}^{\infty} a_n n x^n + \sum_{n=1}^{\infty} a_{n-1} x^n = 0$$

$$\sum_{n=2}^{\infty} a_n n(n-1)x^n - \sum_{n=2}^{\infty} a_{n+2} (n+2)(n+1)x^n - 2a_2 = 2 \cdot 3 a_3 x$$

$$+ 3a_1 x + a_0 x + 3 \sum_{n=2}^{\infty} a_n n x^n + \sum_{n=2}^{\infty} a_{n-1} x^n = 0$$

$$-2a_2 + (a_0 + 3a_1 - 6a_3)x + \sum_{n=2}^{\infty} \left[-(n+2)(n+1)a_{n+2} + (n(n-1) + 3n)a_n + a_{n-1} \right] x^n = 0$$

$$-2a_2 = 0$$

$$a_0 + 3a_1 - 6a_3 = 0$$

$$-(n+2)(n+1)a_{n+2} + n(n+2)a_n + a_{n-1} = 0, \quad n \geq 2$$

$$a_2 = 0, \quad a_3 = \frac{1}{6}a_0 + \frac{1}{2}a_1$$

$$a_{n+2} = \frac{n(n+2)a_n + a_{n-1}}{(n+2)(n+1)}, \quad n \geq 2$$

$$a_4 = \frac{8a_2 + a_1}{12} = \frac{1}{12}a_1$$

$$a_5 = \frac{15a_3 + a_2}{20} = \frac{3}{4} \left(\frac{1}{6}a_0 + \frac{1}{2}a_1 \right) = \frac{1}{8}a_0 + \frac{3}{8}a_1$$

$$y = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + \dots$$

$$y = a_0 + a_1 x + \left(\frac{1}{6}a_0 + \frac{1}{2}a_1 \right) x^3 + \frac{1}{12}a_1 x^4 + \left(\frac{1}{8}a_0 + \frac{3}{8}a_1 \right) x^5 + \dots$$

$$y = a_0 \left(1 + \frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{8}x^5 + \dots \right) + a_1 \left(x + \frac{1}{2}x^3 + \frac{1}{12}x^4 + \frac{3}{8}x^5 + \dots \right)$$

$$y(0) = 4, \quad y'(0) = 6 \quad \text{Başlangıç koşulları}$$

$$y(0) = 4 \Rightarrow a_0 = 4$$

$$y'(0) = 6 \Rightarrow a_1 = 6 \text{ olur.}$$

$$y = 4 \left(1 + \frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{8}x^5 + \dots \right) + 6 \left(x + \frac{1}{2}x^3 + \frac{1}{12}x^4 + \frac{3}{8}x^5 + \dots \right)$$

Yakınsaklık analizi

$$\frac{Q(x)}{P(x)} = \frac{3x}{x^2-1} ; \quad \frac{R(x)}{P(x)} = \frac{x}{x^2-1}$$

$$\frac{1}{1-x^2} = \sum_{n=0}^{\infty} (x^2)^n = \sum_{n=0}^{\infty} x^{2n}$$

$$\frac{3x}{x^2-1} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n 3 \cdot x^{2n+1} ; \quad |x| < 1$$

$$\frac{x}{x^2-1} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \cdot x^{2n+1} ; \quad |x| < 1 \text{ olur.}$$

Sonuç olarak ; Çözüm serisi' en az $|x| < 1$ için yakınsaktır.

Örnek-2. $(x^2-1)y'' + 3xy' + xy = 0$, $y(2)=4$, $y'(2)=6$

Başlangıç Değer Probleminin Kuvvet Serisi çözümünü elde ediniz. (Yakınsaklık aralığını bulunuz.)

Çözüm:

$$y = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-2)^n$$

$x-2=t$ dersek

$$y' = \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dt} \cdot \frac{dt}{dx} = \frac{dy}{dt}$$

$$y'' = \frac{d^2y}{dx^2} = \frac{dy'}{dt} \cdot \frac{dt}{dx} = \frac{d^2y}{dt^2}$$

$$((t+2)^2-1) \frac{d^2y}{dt^2} + 3(t+2) \frac{dy}{dt} + (t+2)y = 0, \quad y(0)=4$$

$$y'(0)=6$$

$$y = \sum_{n=0}^{\infty} a_n t^n$$

$$x^2-1=0 \Rightarrow x=\pm 1 \text{ tekil noktalar}$$

$$\left. \begin{array}{l} -1'ın 2'ye uzaklığı: 3 \\ 1'ın 2'ye " : 1 \end{array} \right\} \text{ dir.}$$

Çözüm serisi en az $|x-2| < 1$ için yakınsaktır.

$$-1 < x-2 < 1$$

$$\boxed{1 < x < 3} \text{ Yakınsaklık aralığı}$$

$$y = \sum_{n=0}^{\infty} a_n t^n, \quad y' = \sum_{n=1}^{\infty} a_n n \cdot t^{n-1}, \quad y'' = \sum_{n=2}^{\infty} a_n n(n-1) \cdot t^{n-2}$$

olur. Denklemde yerine yazalım.

$$(t^2 + 2t + 3) \sum_{n=2}^{\infty} a_n n(n-1) t^{n-2} + 3(t+2) \sum_{n=1}^{\infty} a_n n t^{n-1} + (t+2) \sum_{n=0}^{\infty} a_n t^n = 0$$

$$\sum_{n=2}^{\infty} a_n n(n-1) t^n + 2 \sum_{n=2}^{\infty} a_n n(n-1) t^{n-1} + 3 \sum_{n=2}^{\infty} a_n n(n-1) t^{n-2} +$$

$$+ 3 \sum_{n=1}^{\infty} a_n n t^n + 6 \sum_{n=1}^{\infty} a_n n t^{n-1} + \sum_{n=0}^{\infty} a_n t^{n+1} + 2 \sum_{n=0}^{\infty} a_n t^n = 0$$

$$\sum_{n=2}^{\infty} a_n n(n-1) t^n + 2 \sum_{n=1}^{\infty} a_{n+1} (n+1) n \cdot t^n + 3 \sum_{n=0}^{\infty} a_{n+2} (n+2)(n+1) t^n +$$

$$+ 3 \sum_{n=1}^{\infty} a_n n t^n + 6 \sum_{n=0}^{\infty} a_{n+1} (n+1) t^n + \sum_{n=1}^{\infty} a_{n+1} t^n + 2 \sum_{n=0}^{\infty} a_n t^n = 0$$

-7-

$$4a_2t + 6a_2 + 18a_3t + 3a_1t + 6a_1 + 12a_2t + a_3 + 2a_0 + 2a_1t + \sum_{n=2}^{\infty} \left[a_n n(n-1) + 2a_{n+1}(n+1)n + 3a_{n+2}(n+2)(n+1) + 3a_n n + 6a_{n+1}(n+1) + a_{n-1} + 2a_n \right] t^n = 0$$

$$6a_2 + 6a_1 + 3a_3 = 0$$

$$4a_2 + 18a_3 + 3a_1 + 12a_2 + 2a_1 = 0$$

$$a_n n(n-1) + 2a_{n+1}(n+1)n + 3a_{n+2}(n+2)(n+1) + 3a_n n + 6a_{n+1}(n+1) + a_{n-1} + 2a_n = 0, \quad n \geq 2$$

$$\boxed{a_2 = -\frac{a_0}{2} - a_1}; \quad 18a_3 + 16a_2 + 5a_1 = 0$$

$$18a_3 + 16\left(-\frac{a_0}{2} - a_1\right) + 5a_1 = 0$$

$$18a_3 - 8a_0 - 16a_1 + 5a_1 = 0$$

$$\boxed{a_3 = \frac{4}{9}a_0 + \frac{11}{18}a_1}$$

$$3a_{n+2}(n+2)(n+1) + a_{n+1} \left[\underbrace{2(n+1)n + 6(n+1)}_{(n+1)(2n+6)} \right] + a_n [n(n-1) + 3n + 2] + a_{n-1} = 0 ; n \geq 2$$

$$a_{n+2} = \frac{-a_{n+1}(n+1)(2n+6) - a_n(n^2 + 2n + 2) - a_{n-1}}{3(n+2)(n+1)} ; n \geq 2$$

Rekürans bağıntısı

$$y = \sum_{n=0}^{\infty} a_n t^n = a_0 + a_1 t + a_2 t^2 + a_3 t^3 + a_4 t^4 + \dots$$

$$y = a_0 + a_1 t + \left(-\frac{a_0}{2} - a_1\right) t^2 + \left(\frac{4}{3}a_0 + \frac{11}{18}a_1\right) t^3 + (\dots) t^4 + \dots$$

$$y = a_0 \left(1 - \frac{1}{2}t^2 + \frac{4}{9}t^3 - \dots\right) + a_1 \left(t - t^2 + \frac{11}{18}t^3 - \dots\right)$$

$$\left. \begin{array}{l} y(0) = 4 \Rightarrow a_0 = 4 \\ y'(0) = 6 \Rightarrow a_1 = 6 \end{array} \right\} \text{ olur.}$$

$$y = 4 \left(1 - \frac{1}{2}t^2 + \frac{4}{9}t^3 - \dots\right) + 6 \left(t - t^2 + \frac{11}{18}t^3 - \dots\right)$$

Örnek 3 : $(1-x)y'' - xy' = e^x$ homojen olmayan
Dif. Denkleminin $x=0$ komşuluğundaki çözümünü
bulunuz.

Çözüm: $e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots$

$$y = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n, \quad y' = \sum_{n=1}^{\infty} a_n n x^{n-1}, \quad y'' = \sum_{n=2}^{\infty} a_n n(n-1) x^{n-2}$$

$$(1-x) \cdot \sum_{n=2}^{\infty} a_n n(n-1) x^{n-2} - x \sum_{n=1}^{\infty} a_n n x^{n-1} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$$

$$\sum_{n=2}^{\infty} a_n n(n-1) x^{n-2} - \sum_{n=2}^{\infty} a_n n(n-1) x^{n-1} - \sum_{n=1}^{\infty} a_n n x^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_{n+2} (n+2)(n+1) x^n - \sum_{n=1}^{\infty} a_{n+1} (n+1)n x^n - \sum_{n=1}^{\infty} a_n n x^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$$

$$2a_2 = 1 \Rightarrow a_2 = \frac{1}{2} \text{ olur.}$$

$$2a_2 + \sum_{n=2}^{\infty} [a_{n+2} (n+2)(n+1) - a_{n+1} (n+1)n - a_n n] x^n = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$$

$$a_{n+2}(n+2)(n+1) - a_{n+1}(n+1)n - a_n \cdot n = \frac{1}{n!}, \quad n=1,2,3,\dots$$

($n \geq 1$ için)

$$6a_3 - 2a_2 - a_1 = 1; \quad a_3 = \frac{1}{6}(1 + 2a_2 + a_1) = \frac{1}{6}(2 + a_1)$$

$$12a_4 - 6a_3 - 2a_2 = \frac{1}{2}; \quad a_4 = \frac{1}{12}\left(\frac{1}{2} + 6a_3 + 2a_2\right) = \frac{1}{24}(7 + 2a_1)$$

$$20a_5 - 12a_4 - 3a_3 = \frac{1}{6}; \quad a_5 = \frac{1}{20}\left(\frac{1}{6} + 12a_4 + 3a_3\right) = \frac{1}{20}\left(\frac{28}{6} + \frac{3a_1}{2}\right)$$

!

$$y = a_0 + a_1 x + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{6}a_1 x^3 + \frac{7}{24}x^4 + \frac{1}{12}a_1 x^4 + \frac{28}{120}x^5 + \frac{3}{40}a_1 x^5 + \dots$$

$$y = a_0 + a_1 \left(x + \frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{12}x^4 + \frac{3}{40}x^5 + \dots \right) + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 + \frac{7}{24}x^4 + \frac{7}{30}x^5 + \dots$$

Genel çözüm bulunur.

$1-x=0 \Rightarrow x=1$ Tekil nokta olur. 0 halde

Çözüm Serisi en az $|x| < 1$ için yakınsaktır.

Örnek 1) $(1-x^2)y'' - 2xy' + \alpha(\alpha+1)y = 0$

Legendre denkleminin $x_0=0$ civarındaki Serî çözümünün en büyük yakınsaklık aralığını bulunuz.

(Burada α sabittir) (yakınsaklık yarıçapının alt sınırını bulunuz)

Çözüm: $P(x)=1-x^2$, $Q(x)=-2x$, $R(x)=\alpha(\alpha+1)$

$P(x)=0 \Rightarrow 1-x^2=0 \Rightarrow x=\pm 1$ (Tekil noktalar)

$x=\pm 1$ 'in $x_0=0$ 'a uzaklığı 1 dir. O halde

Serî çözümün olan $y = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ ~~en az~~ $\frac{e^{\alpha x}}{|x| < 1}$

1'in yakınsaktır. (Daha geniş yakınsaklık aralığı mümkün değildir.)

Örneğin $\alpha=1$ için $y=x$ çözüm olur.