## Özellikler.

1) Sonsuz bir seriye sonlu sayıda terimin eklenmesi veya seriden sonlu sayıda terimin çıkartılması serinin karakterini değiştirmez.

2) Sonsuz bir serinin sıfırdan farklı bir sabitle çarpılması serinin karakterini değiştirmez.

3) Eğer $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ serisi yakınsak ise $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$ dır. Fakat $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$ ise $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ serisi yakınsak veya ıraksak olabilir.

**Örnek:** $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{3n}}$ Serisinin karakterini bulunuz.

$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt{3n}} = \lim_{n\to\infty} (3n)^{-\frac{1}{n}} = \infty^0$ Belirsizliği

$y = (3n)^{-\frac{1}{n}}$

$\ln y = -\frac{\ln(3n)}{n}$

$\lim_{n\to\infty} \ln y = -\lim_{n\to\infty} \frac{\ln(3n)}{n} = \frac{\infty}{\infty}$

$y = -\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$ olur.

$= \lim_{n\to\infty} \ln y = 0$

$= \lim_{n\to\infty} y = e^0 = 1 \neq 0$ olur.

O halde seri ıraksaktır.

Örnek: $\sum_{n=1}^{\infty} \sqrt[n^2+1]{2^{4n^2+7n+1}}$ Serisinin karakterini belirleyiniz.

Örnek: $\sum_{n=1}^{\infty} \cos\left(n\frac{\pi}{2}\right)$ Serisinin karakterini belirleyiniz.

Örnek: $\pi - e + \frac{e^2}{\pi} - \frac{e^3}{\pi^2} + \dots = ?$

Serisinin yakınsak olduğunu gösteriniz. Toplamını bulunuz.

Çözüm: $\sum_{n=1}^{\infty} \pi \cdot \left(-\frac{e}{\pi}\right)^{n-1}$ şeklinde yazarız.

Bu seri geometrik seridir. $a=\pi$, $r=-\frac{e}{\pi}$ d

$r=-\frac{e}{\pi}$ ; $|r|<1$ olduğundan yakınsaktır.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \pi\left(-\frac{e}{\pi}\right)^{n-1} = \frac{\pi}{1-\left(-\frac{e}{\pi}\right)} = \frac{\pi^2}{\pi+e}$$ bulunur.

Örnek: $x = 0,323232\ldots$ sayısını göz önüne alalım.

Bu sayı görüldüğü gibi $x = 0,\overline{32}$ dir.

Bu sayıyı;

$$x = \frac{32}{100} + \frac{32}{100^2} + \frac{32}{100^3} + \cdots$$

şeklinde seri ~~[illegible]~~ şeklinde yazabiliriz.

$$x = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{32}{100}\left(\frac{1}{100}\right)^{n-1} = \frac{\frac{32}{100}}{1-\frac{1}{100}} = \frac{32}{99}$$ olur

$a = \frac{32}{100}$, $r = \frac{1}{100}$ $|r|<1$ yakınsaktır. (Geometrik seri

---

Örnek: $\sum_{n=}^{\infty} \frac{1}{\sqrt[3]{n}}$ Serisi yakınsaktır? yoksa ıraksaktır?

Burada $a_n = \frac{1}{\sqrt[3]{n}} = \frac{1}{n^{1/3}}$ (Genel terim)

p-serisidir. $p = \frac{1}{3} < 1$ olduğundan ıraksaktır

① $\sum_{n=1}^{\infty} a \cdot r^{n-1} = \sum_{n=0}^{\infty} ar^n$ ; $|r|<1$ ise

yakınsak, aksi halde ıraksaktır. $|r|<1$ ise

$\sum_{n=1}^{\infty} ar^{n-1} = \frac{a}{1-r}$ dir. (Geometrik Seri)

---

② $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ : Harmonik Seridir. Iraksaktır.

---

③ $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)} = 1$ dir. Teleskopik Seridir.

Yakınsaktır.

---

④ $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$ ; $P>1$ ise yakınsaktır.

$P \leq 1$ ise ıraksaktır.

(p serisidir.) $P=1$ ise Harmonik seri olur

**Örnek:** $1+\frac{1}{1+2}+\frac{1}{1+2+3}+\cdots$

Serisinin karakterini bulunuz. (Toplamını bulunuz)

**Çözüm:** $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2}{n(n+1)}$ olur.

Seri yakınsaktır. Toplamı 2 dir.

**Not:** Eğer $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ serisi yakınsak ise $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{a_n}$ serisi ıraksaktır.

**Ödev:**

1) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{3^n}=?$

2) $\sum_{n=1}^{\infty}3\cdot\left(-\frac{1}{4}\right)^{n-1}=?$

3) $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{e^n}=?$

4) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(n+1)(n+2)}=?$

## Pozitif terimli seriler için yakınsaklık testleri

Her serinin $S_n$ kısmi toplamını bulmak mümkün olmadığından serilerin karakterlerinin belirlenmesi için bazı kurallar (testler) vardır.

### 1- İntegral testi

Genel terimi $a_n = f(n)$ olan pozitif terimli bir serinin her terimi kendisinden önce gelen terimden daha küçük ve

$$\int_1^{\infty} f(n)\,dn$$

integrali mevcut ise seri yakınsak, aksi takdirde ($\infty$ ise) seri ıraksaktır.

**Örnek:** $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ serisinin karakterini belirleyiniz.

$$\int_1^{\infty} \frac{1}{n}\,dn = \lim_{b\to\infty} \int_1^{b} \frac{1}{n}\,dn = \lim_{b\to\infty} \ln(n)\Big|_1^{b} = \lim_{b\to\infty} \ln b = \infty$$

olur. Seri ıraksaktır.

**Örnek:** $\sum_{n=1}^{\infty} \ln\left(1+\frac{1}{n}\right)$ serisinin karakterini integral testi ile belirleyiniz. (Iraksaktır)

**Çözüm:**

**ödev:** $\sum_{n=3}^{\infty} \frac{1}{n.\ln(\ln n).\ln n}$ serisinin karakterini belirleyiniz.

## Mukayese Testi

$\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ ve $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ serilerini gözönüne alalım:

Eğer $b_n$ serisi yakınsak ve $a_n$ serisinin her terimi; $b_n$ serisindeki karşılığı olan terimden daha küçük veya eşitse $a_n$ serisi de yakınsaktır. Eğer $b_n$ serisi ıraksak ve $a_n$ serisinin her terimi, $b_n$ serisindeki karşılığı olan terimden büyük veya eşitse $a_n$ serisi de ıraksaktır.

**Not:** Mukayese kuralı için genellikle geometrik seri, teleskopik seri, harmonik seri ve p serileri gözönüne alınır.

Örnek: $\sum_{n=1}^{\infty} \ln\left(1+\frac{1}{n}\right) = \ln 2 + \ln\left(1+\frac{1}{2}\right) + \ln\left(1+\frac{1}{3}\right) + \cdots$

Görüldüğü gibi; $a_n = \ln\left(1+\frac{1}{n}\right)$, $a_{n+1} = \ln\left(1+\frac{1}{n+1}\right)$ dir.

Her $n \geq 1$ için $a_n \geq a_{n+1}$ olur.

Her $n \geq 1$ için $\ln\left(1+\frac{1}{n}\right) \geq \ln\left(1+\frac{1}{n+1}\right)$ dir.

Yani verilen seri azalandır. (Yani serinin her terimi kendisinden önce gelen terimden daha küçüktür)

O halde <u>integral testi</u> uygulanabilir.

$$I = \int_1^{\infty} \ln\left(1+\frac{1}{n}\right) dn = \lim_{b\to\infty} \int_1^{b} \ln\left(1+\frac{1}{n}\right) dn$$

$\ln\left(1+\frac{1}{n}\right) = u \qquad dn = dv$

$-\frac{n}{n^2(n+1)}\, dn = du \qquad \frac{\frac{1}{n^2}}{1+\frac{1}{n}}\, dn = du \qquad n = v$

$$I = \lim_{b\to\infty} \left[ n\cdot\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)\Big|_1^b + \int_1^b \frac{n}{n(n+1)}\, dn \right]$$

$\frac{n}{|n|n+1|}$

$$I = \lim_{b\to\infty}\Big[\underbrace{b.\ln\left|1+\frac{1}{b}\right|}_{\infty.0\ \text{Belirsizliği var.}} - \ln 2 + \underbrace{\ln|b+1|}_{\infty} - \ln 2\Big]$$

$$\lim_{b\to\infty} b.\ln\left(1+\frac{1}{b}\right) = ?$$

$$= \lim_{b\to\infty} \frac{\ln\left(1+\frac{1}{b}\right)}{\frac{1}{b}} = \frac{0}{0}$$

$$= \lim_{b\to\infty} \frac{\frac{-\frac{1}{b^2}}{1+\frac{1}{b}}}{-\frac{1}{b^2}} = \lim_{b\to\infty} \frac{b}{b+1} = 1 \text{ olur.}$$

Sonuç olarak; $I = \infty$ olacaktır.

Böylece $\sum_{n=1}^{\infty} \ln\left(1+\frac{1}{n}\right)$ serisi ıraksak olur.

**Örnek:** $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+1)^3}$ serisinin karakterini bulunuz.

**Çözüm:**

Bu seriyi $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^3}$ ($p$ serisidir.) ile mukayese edelim. $p=3>1$ yakınsaktır.

Her $n$ için;

$\frac{1}{(n+1)^3} < \frac{1}{n^3}$ olduğundan

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+1)^3}$ serisi de yakınsaktır.

**Örnek:** $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{\ln n}$ serisinin karakterini belirleyiniz.

**Çözüm:** Bu seriyi $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ serisi ile mukayese edelim. Harmonik seridir, ıraksaktır.

Her $n$ için;

$\frac{1}{\ln n} > \frac{1}{n}$ dir.

O halde $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{\ln n}$ serisi de ıraksaktır.

**Ödev:** 1) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3n}{n^3+1}$ serisinin karakterini belirleyiniz.

2) $\sum_{n=1}^{\infty} \arcsin\frac{1}{n}$ " " "

3) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^{n+1}}$ " " "

## Limit Mukayese Testi

$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ ve $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ serilerini göözönüne alalım.

$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = L$ olsun.

1) Eğer $L < \infty$ ve $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ yakınsak ise

$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ de yakınsaktır. (Her iki sertde aynı karakte

2) Eğer $L > 0$ ve $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ ıraksak ise

$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ de ıraksaktır. (Her iki sertde aynı karakter

**Örnek:** $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+5}{n^3-2n+3}$ serisinin karakterini belirtiniz.

**Çözüm:** $\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{n+5}{n^3-2n+3}}{\frac{1}{n^2}} = \lim_{n\to\infty} \frac{n^3+5n^2}{n^3-2n+3} = 1 < \infty$

olur. $L = 1 < \infty$ ve $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ $(p=2>1$ p-serisi) yakınsaktır. O halde verilen seride yakınsaktır.

**Örnek:** $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{1+\sqrt{n}}$ serisinin karakterini belirtiniz.

**Çözüm:** $\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{1+\sqrt{n}}}{\frac{1}{\sqrt{n}}} = \lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt{n}}{1+\sqrt{n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\frac{1}{\sqrt{n}}+1}$

$= 1$ olur. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}}$ serisi p serisidir.

$p = \frac{1}{2} < 1$ olduğundan yakınsaktır. O halde verilen seride yakınsaktır.

## Oran Testi

Bütün terimleri pozitif olan $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ serisini gözönüne alalım. $\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = L$ olsun.