MOHR METODU

Bu metod, keyfi şekilde yüklü bir kirişte kesme kuvveti ve moment değişimlerini ifade eden diferansiyel denklemlerle, eğim ve elastik eğriyi karakterize eden diferansiyel denklemlerin birbirine benzer olmasına dayanmaktadır. Şöyle açıklayabiliriz;

Moment ve kesme kuvveti arasında;

$$\frac{dM_x}{dz} = Q_y$$

bağıntısı vardır. Ayrıca moment, kesme kuvveti ve yayılı yük arasında;

$$\frac{d^2M_x}{dz^2} = \frac{dQ_y}{dz} = -q_y$$

bağıntısı statik derslerinden bilinmektedir. Yukardaki verilen bağıntılar göz önüne alınarak moment ve yer değiştirme, kesme kuvveti ve dönme-eğim fonksiyonları arasında aşağıdaki benzerliklerin olduğu görülebilir;

$$\begin{array}{ccc} \dfrac{d^2M}{dz^2} = -q_y & \leftrightarrow & \dfrac{d^2v}{dz^2} = -\dfrac{1}{\rho} \\ \dfrac{dM}{dz} = Q_y & \leftrightarrow & \dfrac{dv}{dz} = \theta \\ M & \leftrightarrow & v \end{array} \qquad (1)$$

Bu benzerliğe dayanılarak, bir kirişin dış yükten doğan eğriliği,

$$\frac{1}{\rho} = \frac{M}{EI}$$

yük olarak alındığında, bu yükten meydana gelen kesme kuvvetleri elastik eğrinin eğimini, eğilme momentleri de yer değiştirmeleri verecektir.

Yük olarak alınacak eğrilik, ele alınan kirişe değil, sınır şartları yukarıda ki benzerliklere uygun olacak şekilde seçilmiş bir ***Fiktif Kiriş***' e yüklenmelidir.

Örneğin gerçek halde ankastre olan bir mesnette,

$$\theta = 0 \; ve \; v = 0$$

Olacağından, fiktif kirişin bu noktasında (1) benzerliğine göre,

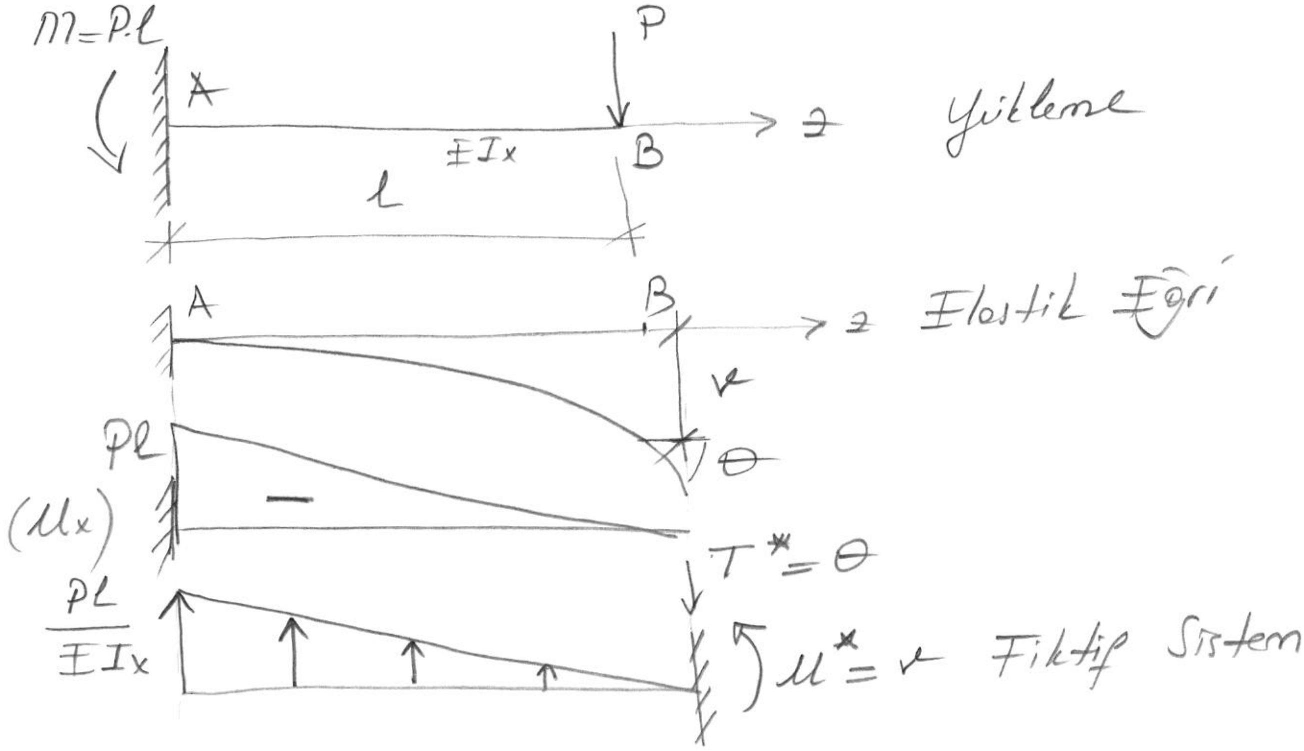
$$Q_y = 0 \;\; ve \;\; M = 0$$

şartlarını sağlayan bir mesnet tipi seçilmelidir, dolayısı ile bu mesnet tipi de serbest uçtur. Aynı mantık ile çeşitli sınır şartlarına karşı gelen fiktif sistem sınır şartları aşağıda sıralanmaktadır;

ÖRNEK

Şekilde görülen ve ucundan P tekil kuvvet ile yüklenmiş bir konsol kirişin, serbest ucundaki düşey yer değiştirme ve dönme değerlerini hesaplayalım;

Kirişe ait moment diyagramı, seçilen fiktif sistem ve fiktif yükleme (eğrilik) aşağıdaki şekillerde sırası ile verilmektedir.



Kiriş uç noktasında bulunan dönme ve düşey yer değiştirme değerleri;

$$\theta = \frac{1}{2}\frac{Pl}{EI}l = \frac{Pl^2}{2EI_x} \qquad v = \frac{1}{2}\frac{Pl}{EI}l\frac{2l}{3} = \frac{Pl^3}{3EI_x}$$

ENERJİ KURAMLARI

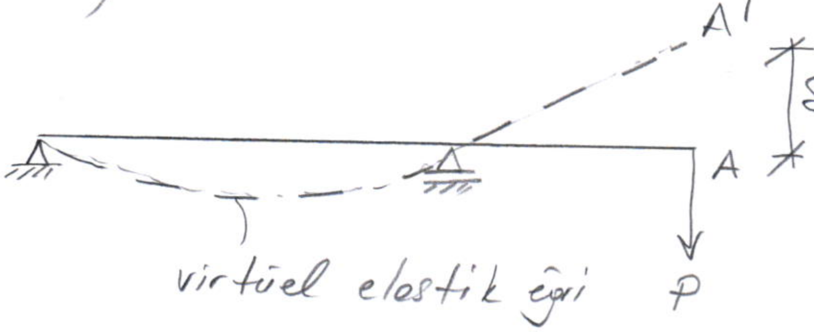
Şimdiye kadar cisimlerin gerilme ve şekil değiştirme problemleri incelenirken daima şu esaslar kullanıldı;

1) Denge denklemleri
2) Uygunluk şartları
3) Hooke Bağıntıları
4) Sınır şartları

Herhangi bir elastik cismin denge problemi bu dört grup esas kullanılarak bir diferansiyel denklemin çözümüne indirgenebilir. Aynı problem büsbütün başka bir yoldan incelenebilir. Bu metoda "enerji kuramları" adı verilir. Kesin sonucun bulunmadığı durumlarda, sayısal çözüm tekniklerinin desteğinde enerji yöntemleri ile yaklaşık bir çözüm aranır. Bu bölümde virtüel iş kuramı, virtüel iş denklemi, Castigliano kuramı gibi yeni kavramlar ele alınacaktır.

Virtüel İş Kuramı;

"Virtüel" kelimesi; olduğu varsayılan (hipotetik) fiziksel bir büyüklüğü ifade ederken kullanılır. Fizik anlamda böyle bir büyüklük olmasada, oluşmasında da bir engel bulunmamalıdır. Örneğin aşağıda çıkmalı bir kiriş ele alalım;



δv_A → virtüel yer değiştirme (Böyle bir yer değiştirme olmayabilir fakat olmasında da sınır şartları bakımından bir sakınca yoktur.

"v_A" yer değiştirmesi gerçek olmadığı için başına "δ" sembolü getirilmiştir. Şekilde görüldüğü gibi çubukta sınır koşulları ile uyumlu olacak şekilde keyfi bir yer değiştirme yapmasına izin verilirse, buna "virtüel yer değiştirme" denir ve yer değiştiren kuvvette bir <u>virtüel iş</u> üretir. Virtüel yer ve şekil değiştirmeler;

* Cismin sınır şartları ile uyumlu olmalı
* Sürekli ortamı bozmamalı
* Çok küçük değerlerde olmalıdırlar

Kuram;

Dengedeki bir sisteme verilecek virtüel yer ve şekil değiştirmeler sonucunda dış kuvvetlerin virtüel işi δW_d, iç kuvvetlerin virtüel işi δW_i ye eşittir. Buna göre;

$$\delta W_d = \delta W_i \quad .$$

Bu kuram cismin bünye bağıntısından bağımsız olması nedeniyle elastik, plastik ya da viskoelastik tüm cisimler için geçerlidir. Şimdi iç kuvvetlerin ve dış kuvvetlerin işini hesaplayalım, bu hesaplamada kullanılacak büyüklükleri sıralarsak;

$\vec{P}_d$, $\vec{M}_d$ → Tekil dış yükler

$\vec{q}_d(z)$, $\vec{m}_d(z)$ → Yayılı dış yükler

$\vec{R}(z)$, $\vec{M}(z)$ → Kesit tesirleri

$\delta\vec{u}\,(\delta u_x, \delta u_y, \delta u_z)$ → Virtüel yer değiştirme vektörü

$\delta\vec{\theta}\,(\delta\theta_x, \delta\theta_y, \delta\theta_z)$ → Virtüel dönme vektörü

$\delta\vec{\gamma}\,(\delta\varepsilon_x, \delta\varepsilon_y, \delta\varepsilon_z)$ → Virtüel birim ötelenme vektörü

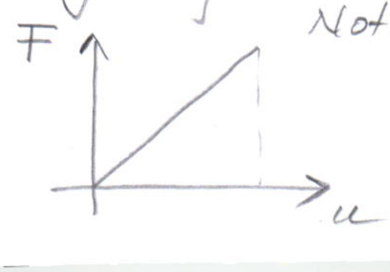
$\delta\vec{\omega}\,(\delta\kappa_x, \delta\kappa_y, \delta\omega_z)$ → Virtüel birim dönme vektörü

Dış Kuvvetlerin Virtüel İşi;

$$\delta W_d = \int (\vec{q}_d \cdot \delta\vec{u} + \vec{m}_d \cdot \delta\vec{\theta})\,dz + \sum (\vec{P}_d \cdot \delta\vec{u} + \vec{M}_d\,\delta\vec{\Omega})$$

Yükler sabit varsayıldığında iş hesabında "$\frac{1}{2}$" çarpanı yoktur.

Not:



$$\text{iş} = \frac{1}{2} F.u$$

İç Kuvvetlerin Virtüel İşi;

Çubukta bir diferansiyel boy elemanı dz için hesaplanacak virtüel iç iş;

$$\delta W_i = \int (\vec{R} \cdot \delta\vec{\gamma} + \vec{M} \cdot \delta\vec{\omega}) \, dz$$

VİRTÜEL İŞ DENKLEMİ

03/04/2020

Virtüel iş kuramından hareketle geliştirilen bu yöntem kuramsal olarak geneldir ve statikçe belirli ya da belirsiz sistemlere uygulanabilir. Metod uygulanırken iki farklı tip yükleme yapılır. Birinci yükleme verilen gerçek yük değerleri ile ikinci yükleme ise istenen yer değiştirme ya da dönme ile uyumlu birim yükleme. Gerçek yükleme ve birim yükleme ile ilgili notasyonlar aşağıda verilmektedir;

Gerçek Yükleme

$\vec{P}_j$ → Dış yükler $(j=1...n)$

$\vec{u}_k = ?$ → k noktasındaki yer değiştirme (öteleme ya da dönme değeri)

$\vec{R}(T_x, T_y, N)$ } Kesit tesirleri
$\vec{M}(M_x, M_y, M_b)$

$\vec{u}, \vec{\Omega}$ → Yer değiştirme ve dönme vektörü (birim yükleme ile alası yok)

$\vec{\gamma}\ \vec{\omega}$ → ~~Birim~~ şekil değiştirme vektörleri

Birim Yükleme

$\vec{\overline{R}}(\overline{T}_x, T_y, \overline{N})$ } Kesit tesirleri
$\vec{\overline{M}}(\overline{M}_x, \overline{M}_y, \overline{M}_b)$

$\vec{\overline{u}}, \vec{\overline{\Omega}}$ → Yer değiştirme ve dönme vektörleri

$\vec{\overline{\gamma}}, \vec{\overline{\omega}}$ → Birim şekil değiştirme vektörleri

$\vec{\hat{P}}=1$ ya da $\vec{\hat{M}}=1$ → Birim tekil kuvvet veya birim moment vektörü

Not: Notasyonlar vektörel $(\rightarrow)$ olarak verilmiştir, çünkü genel olarak düşünülmüştür (üç boyutlu), örneğin;

$\vec{\hat{P}} = 1$, vektörü; $P_x = 1$, $P_y = 1$, $P_z = 1$

hangi doğrultuda yer değiştirme isteniyorsa o yönde bir birimlik kuvvet uygulanır.

Birim Yükleme; Sistemde önce tüm dış yükler sıfırlanır ve daha sonra hangi doğrultuda hangi yer değiştirme ya da dönme soruldu ise ona ait birim yükleme yapılır. Üç tip birim yükleme söz konusudur;

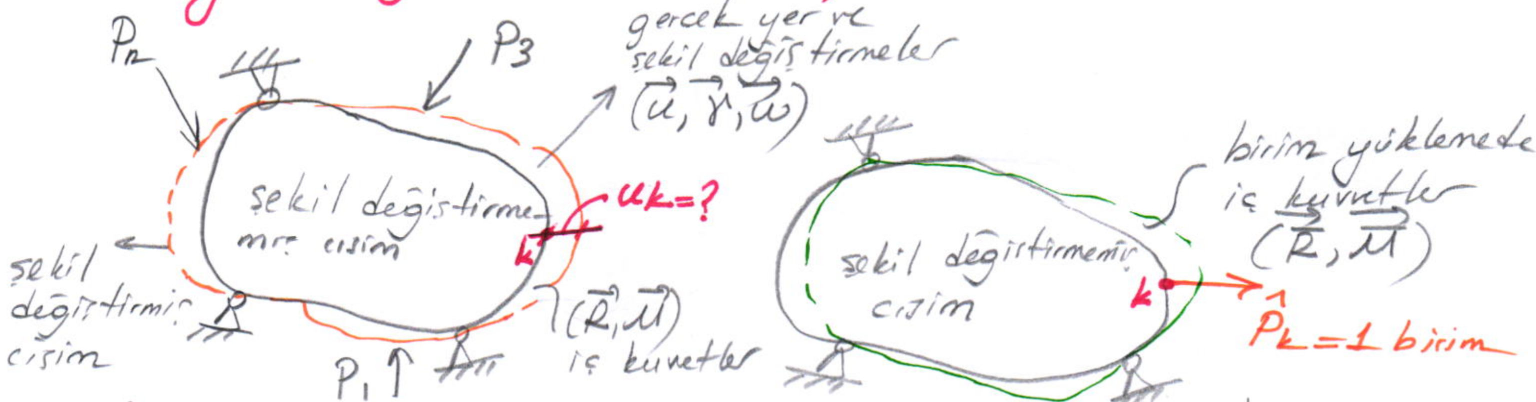
1- Eğer bir noktanın ötelemesi hesaplanacaksa, bu noktaya istenen doğrultuda bir tekil birim kuvvet uygulanır. $(\hat{P} = 1)$

2- Eğer bir noktanın dönme açısı hesaplanacaksa o zaman bu noktaya bir tekil birim moment $(\hat{M} = 1)$ uygulanır.

3- Eğer iki noktanın birbirine göre hareketi hesaplanacaksa, o zaman bu iki nokta arasındaki doğrultuda karşılıklı etkiyecek biçimde birim şiddette kuvvetler uygulanır.

Şimdi bu üç durumu irdeleyelim;

1. Yer Değiştirme Hesabı;



(a) gerçek yükleme (b) birim yükleme

* "k" noktasındaki "u_k" yerdeğiştirmesi isteniyor;
* Öncelikle gerçek yükleme için ($\vec{R}$ ve $\vec{M}$) kesit tesirleri hesaplanır,
* "k" noktasındaki "u_k" yer değiştirmesi hesaplanıyor ise bütün yükler sıfırlandıktan sonra "k" noktasına "u_k" doğrultusunda $\hat{P}_k = 1$ birimlik kuvvet uygulanır ve kesit tesirleri $(\vec{R}, \vec{M})$ elde edilir.
* Gerçek yüklerin sistemde sebep olacağı yer değiştirmeler, birim yüklemeli sisteme virtüel yer değiştirmeler olarak tanıtılarak, birim yükleme durumu $\hat{P}_k = 1$ için dış kuvvetin virtüel işi;

$$\delta W_d = \hat{P}_k u_k = u_k \quad \text{olur.}$$

Bu durumda virtüel iş kuramından, "k" noktasındaki yer değiştirme;

$$u_k = \delta W_d = \delta W_i$$

$$(1) \quad u_k = \int (\vec{R} \cdot \vec{\gamma} + \vec{M}\, \vec{\omega})\, dz \quad \text{olur.}$$

Bu ifade geneldir, doğrusal olmayan malzemelere de uygulanmaktadır.

Eğer malzeme orantılık sınırları içinde davranıyorsa, o zaman bir şekil değiştirmeler $\vec{\gamma}(\gamma_x, \gamma_y, \varepsilon_z)$ ve $\vec{\omega}(\kappa_x, \kappa_y, \omega_z)$ nin bileşenleri gerçek yükleme durumuna ait kesit tesirleri cinsinden yazılabilir.

$$\gamma_x = \frac{k_x' T_x}{GA}, \quad \gamma_y = \frac{k_y' T_y}{GA}, \quad \varepsilon_z = \frac{N}{AE}$$

$$\kappa_x = \frac{M_x}{EI_x}, \quad \kappa_y = \frac{M_y}{EI_y}, \quad \omega_z = \frac{M_b}{EI_b}$$

Not:

Yukarıdaki bağıntılar size daha önce çıkarılmıştı, hatırlamak için birini çıkaralım örneğin.

$$\varepsilon_z = \frac{\Delta l_z}{l_z} \longrightarrow \Delta l_z = \frac{N . l_z}{EA} \qquad \varepsilon_z . \cancel{l_z} = \frac{N . \cancel{l_z}}{EA}$$

$$\varepsilon_z = \frac{N}{AE}$$

Yukarıdaki bağıntıları "1" bağıntısında kullanarak ve birim yüklemenin kesit tesiri bileşenleri $\vec{\bar{R}}(\bar{T}_x, \bar{T}_y, \bar{N})$ ve $\vec{\bar{M}}(\bar{M}_x, \bar{M}_y, \bar{M}_b)$ yerleştirilirse, virtüel iş denklemi;

$$u_k = \int \left(k_x' \frac{\bar{T}_x T_x}{GA} + k_y' \frac{\bar{T}_y T_y}{GA} + \frac{\bar{N} N}{AE} + \frac{\bar{M}_x M_x}{EI_x} + \frac{\bar{M}_y M_y}{EI_y} + \frac{\bar{M}_b M_b}{GI_b} \right) dz$$

şeklinde en genel halde yazılır. Bu denkleme tüm kesit tesirleri dahil edilmiştir.

Taşıyıcı sistemin özelliğine bağlı olarak kesit tesirlerinin bazıları hesaba girmez. Örneğin kafes sistemlerde; "n" adet çubuğu olan bir kafes sistemde çubuklar sadece eksenel kuvvet aktardığından mafsal noktasındaki yer değiştirme;

$$u_k = \sum_{i=1}^{n} \frac{\overline{N_i} \cdot N_i}{A_i E_i} L_i$$

şeklinde tüm çubuklar üstünde toplam yapılarak hesaplanır.

Dönme Açısı Hesabı,

Bir "k" noktasındaki Ω_k dönme açısı bulunmak istenirse aynı yerdeğiştirme hesabında olduğu gibi gerçek sisteme ait kesit tesirleri ($\vec{R}$ ve $\vec{M}$) hesaplanır, sonrasında "k" noktasına istenen doğrultuda (Ω_k) birim moment $\hat{M}_k = 1$ birimlik yük etkitilir ve bu yüklemeye ait kesit tesirleri elde edilir ($\overline{\vec{R}}$ ve $\overline{\vec{M}}$). Daha sonra esas yüklemenin yer değiştirmeleri birim yüklemeye virtüel yer değiştirme olarak tanıtılırsa, dış kuvvetlerin virtüel işi,

$$\delta W_d = \hat{M}_k \Omega_k = \Omega_k \quad \text{olur.}$$

Bu durumda Virtüel iş denklemi;

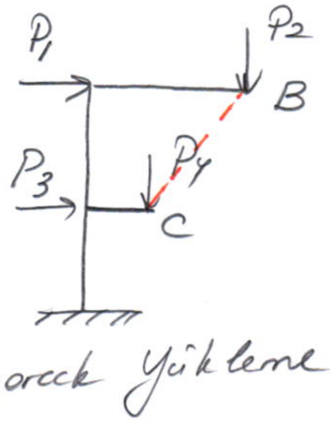
$$\Omega_k = \int (\overline{\vec{R}} \cdot \vec{\gamma} + \overline{\vec{M}}\, \vec{\omega})\, dz \quad \text{olur.}$$

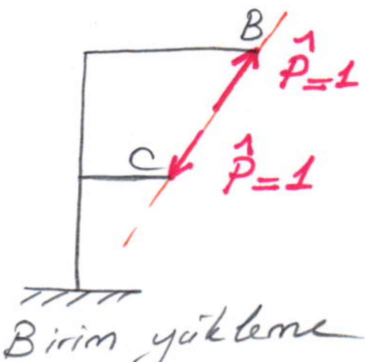
Eğer malzeme orantılık sınırları içinde ise kesit tesirleri cinsinden ifade edilen virtüel iş denklemi "k" noktasının dönmesi için,

$$-\Omega_k = \int \left(k_x' \frac{\bar{T}_x T_x}{GA} + k_y' \frac{\bar{T}_y T_y}{GA} + \frac{\bar{N}N}{AE} + \frac{\bar{M}_x M_x}{EJ_x} + \frac{\bar{M}_y M_y}{EJ_y} + \frac{\bar{M}_b M_b}{GI_b} \right) dz$$

biçiminde yazılır ve "k" noktasında dönme açısı bulunur.

* İki Noktanın Birbirine Göre Yer Değiştirmesi ya da Dönmesi





"B" noktasının "C" noktasına göre yerdeğiştirmesini hesaplamak için her iki noktaya birim yüklemeler yapılır. Dönme açısı hesabında ise birim moment etki ettirilir.

Betti Karşıtlık Kuramı

Bu kuramda, süperpozisyon ilkesinden yararlanıldığı için sadece elastik davranan, orantılık sınırları aşmayan cisimler için geçerlidir. Yöntemi şu şekilde uygulayabiliriz; iki yükleme söz konusudur;

1. Yükleme:

$\vec{P}_j , \vec{M}_j$: Dış yük

$\vec{u}_j , \vec{\Omega}_j$: Yer değiştirme ve dönme vektörü

2. Yükleme:

$\overline{\vec{P}}_j , \overline{\vec{M}}_j$: Dış yük

$\overline{\vec{u}}_j , \overline{\vec{\Omega}}_j$: Yer değiştirme ve dönme vektörü

Kuram, Virtüel iş kuramına dayanır. Şöyle ki; 2. yüklemenin yer değiştirmesini 1. yüklemeye virtüel yer değiştirme ve 1. yüklemenin yer değiştirmesini 2. yüklemeye virtüel yer değiştirme olarak uygulayalım ve sonra her iki durum için dış kuvvetlerin virtüel işini yazalım.

$$\sum_{j=1}^{n} \vec{P}_j \cdot \overline{\vec{u}}_j = \sum_{j=1}^{n} \overline{\vec{P}}_j \cdot \vec{u}_j$$