

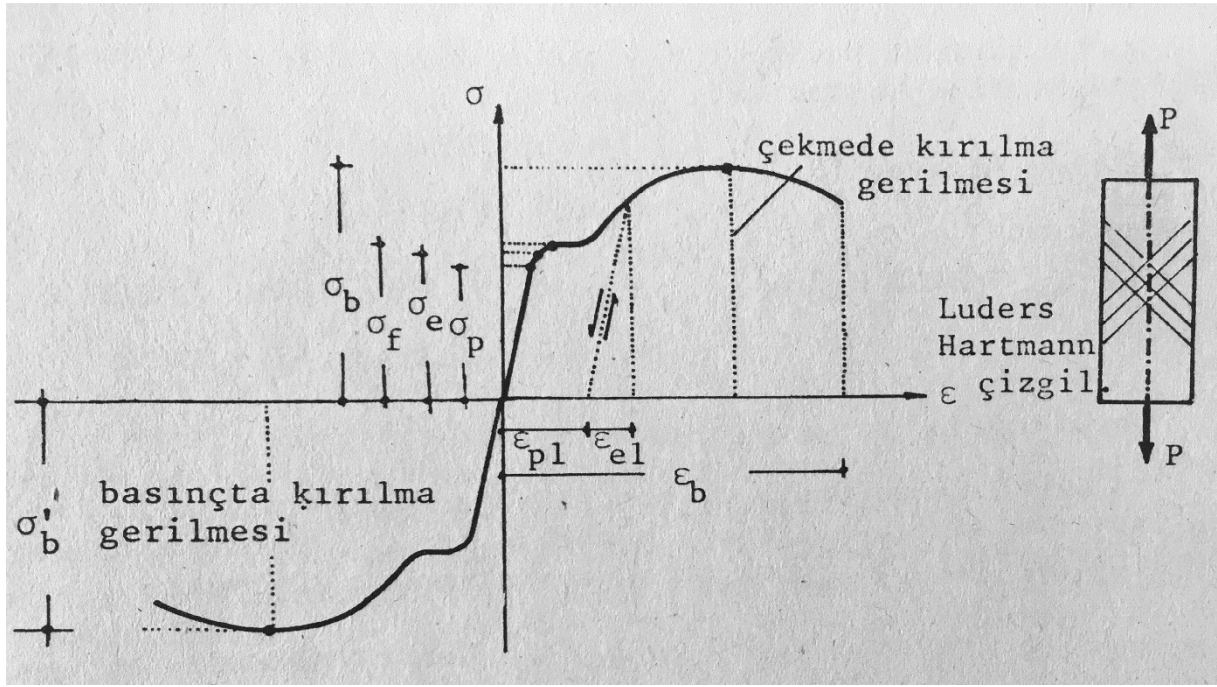
KIRILMA HİPOTEZLERİ

Mukavemetin ana prensibi, cisme etkiyen yükler verilmiş olduğuna göre cismin bu yükleri kırılmadan veya tehlikeli duruma düşmeden taşıyabilmesi için gerekli boyutlarını elde etmektedir. Bu sebeple, cismin hangi zorlamalarla kırılacağı veya tehlikeli duruma düşeceği bilinmek istenir. Bunun için cisim üzerinde çeşitli deneyler yapmak gerekir. Fakat cisimlerde ancak, basit çekme veya basit basınç gibi tek eksenli gerilme hallerine ait deneyler kolaylıkla yapılarak kırılma yükleri bulunabilir. Buna karşılık cisim iki veya üç eksenli gerilme haline maruz ise, deney tekniği zorlaştığı gibi, kırılma yükleri çok sayıda deney yapılarak istatistiki olarak tespit edilebilir. Bu da oldukça külfetli ve pratik olmayan bir yoldur. Bu zorluklardan kaçınmak bakımından, iki ve üç eksenli gerilme hallerinde kırılma durumu için birçok araştırmacılar tarafından bazı hipotezler ortaya atılmıştır. Bu hipotezlere **Kırılma Hipotezler** adı verilir. Bunların doğruluğu, yapılan deneylerle kontrol edilmiş ve uygun olanları benimsenmiştir.

Ancak bütün malzeme türleri ve zorlama tiplerini kapsayan tek bir kırılma hipotezi vermek mümkün değildir. Bir kırılma hipotezi belirli tür malzemelerde ve zorlama tiplerinde iyi netice vermesine karşılık, başka tür malzemeler için yanlış sonuç verebilir. Bu sebeple, malzeme türüne ve zorlama tipine uygun olan kırılma hipotezini seçmek gerekir.

Kırılma hipotezlerine geçmeden önce, malzeme türleri hakkında kısa bir hatırlatma yapmakta yarar vardır. Kuvvet altındaki şekil değiştirme davranışına göre cisimler, sünek ve sünek olmayan (gevrek) cisimler diye sınıflandırılabilir.

Sünek malzeme, kopma uzaması büyük olan malzemedir. Örnek olarak çelik malzeme verilebilir. Çelik malzemede basit çekme deneyi yapıldığında aşağıda görüldüğü üzere gerilme-şekil değiştirme diyagramı elde edilir. Çubuğun enkesit alanı F ise, çekme gerilmesi,



$$\sigma = \frac{P}{F}$$

σ_p : Orantılık Sınırı

σ_e : Elastik Sınırı

σ_p : Akma Sınırı

σ_b : Kırılma Sınırı

σ gerilmesi, σ_p orantılılık sınırından küçük kaldıkça ($\sigma \leq \sigma_p$) malzemede Hooke Kanunu geçerli olacaktır.

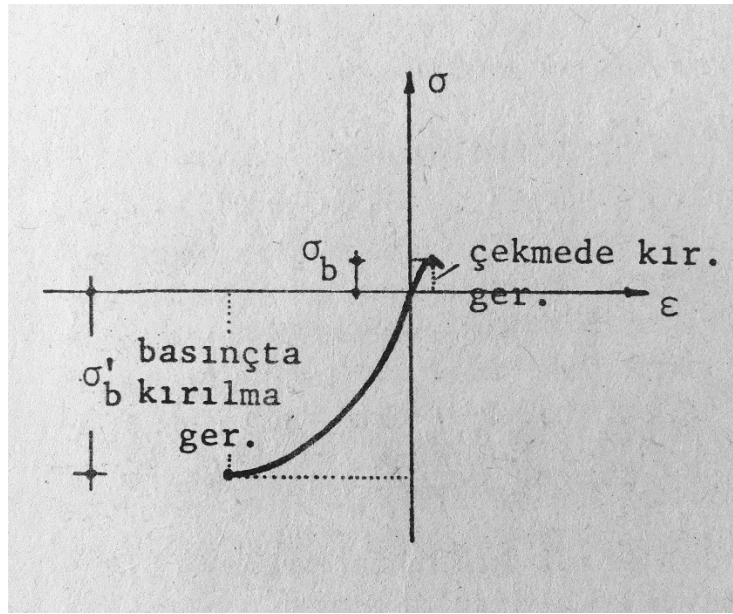
σ gerilmesi, σ_e değerinden küçük kaldıkça malzeme elastik özellik gösterir. Yani kuvvet kaldırıldığında uzamalar da ortadan kalkar. Buna karşılık $\sigma > \sigma_e$ olduğu zaman, kuvvet kaldırıldığında uzamalar tamamen ortadan kalkmaz. Bu kalıcı şekil değiştirmeye, plastik şekil değiştirme (ϵ_{p1}) denir. Malzemede tam elastikliğin kaybolduğu σ_e sınır gerilmesine **Elastik Sınır** adı verilir.

Kuvvet artmaya devam ederse, $\sigma = \sigma_f$ değerine ulaşıldığında gerilme sabitken büyük uzamalar meydana gelir. Bu değere **Akma Sınırı** adı verilir. Akma sınırına ulaşmış malzemede büyük değişiklikler meydana gelir. Malzeme üzerinde yaklaşık olarak $\pm 45^\circ$ eğimli kayma çizgileri (Luders-Hartmann Çizgileri) görülür.

Gerilme $\sigma = \sigma_b$ değerine ulaştığında çubuk kırılır. Bu gerilmeye **Kırılma Sınırı** denir. Çubukta kırılma (kopma) meydana gelinceye kadar ortaya çıkan toplam uzama oranına (ε_b) ye **Kırılma Uzaması** adı verilir.

Sünek malzemelerde, σ_f sınırı esas olarak alınır. Bu sınırdan sonra, malzemede büyük kalıcı deformasyonlar meydana geldiğinden çubuk artık fonksiyonunu kaybeder.

Gevrek malzeme ise elastik sınırı kırılma sınırına çok yakın olan malzemedir. Bu sebeple bu tür malzeme, elastik sınırın üzerinde bir gerilmeye maruz kaldığında, çok az bir uzama göstererek kırılır. Şekilde bu tür bir malzemeye ait $\sigma - \varepsilon$ diyagramı görülmektedir.



Örnek olarak beton malzeme verilebilir. Bu malzemede σ_b sınırı esas olarak alınır. Kuvvetin basınç olması halinde sünek malzeme için ilk verilen şekilde görüldüğü gibi çekme halindeki benzer bir diyagram elde edilir. Buna karşılık gevrek malzemede basınç halindeki σ'_b kırılma gerilmesi, çekme halindeki σ_b kırılma gerilmesinden oldukça farklıdır.

Kırılma Hipotezleri

Tek eksenli gerilme halinde, sünek malzemede σ_f akma sınırına, gevrek malzemede ise σ_b kırılma sınırına ulaşıldığı zaman tehlikeli durum meydana gelecektir. İki veya üç eksenli gerilme halinde akma veya kırılmanın hangi durumda meydana geleceğini tespit etmek üzere ortaya atılan kırılma hipotezleri üç ana grupta toplanabilir;

- I. Gerilme Hipotezleri
- II. Şekil Değiştirme Hipotezleri
- III. Enerji Hipotezleri

I. Gerilme Hipotezleri

Bu tip hipotezlerde kırılmaya sebep olan esas parametre gerilme olarak alınır ve gerilmelerden biri sınır değere ulaşınca veya gerilmeler arasında belirli bir bağlantı sağlanınca, kırılma olayının meydana geldiği kabul edilir. Ortaya atılan gerilme hipotezleri içinde en önemlileri aşağıda verilmiştir;

Maksimum Normal Gerilme Hipotezi

Bu hipotez oldukça eski olup Lamé, Navier gibi araştırmacılar tarafından ortaya atılmıştır. Hipoteze göre kırılma; maksimum normal gerilmenin sınır değere ulaşması halinde meydana gelecektir. Bu sınır değer sünek malzemede σ_f akma, gevrek malzemede ise $\sigma_b(\sigma'_b)$ kırılma sınırındır. $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ asal gerilmeleri ile verilen bir üç eksenli gerilme halinde $\sigma_1 > \sigma_2 > \sigma_3$ ise, sünek malzemede $\sigma_1 = \sigma_f$ olduğunda akma başlayacak, gevrek malzemede ise $\sigma_1 = \sigma_b$ veya σ'_b olduğunda kırılma olacaktır. Dolayısı ile üç eksenli gerilme halinde,

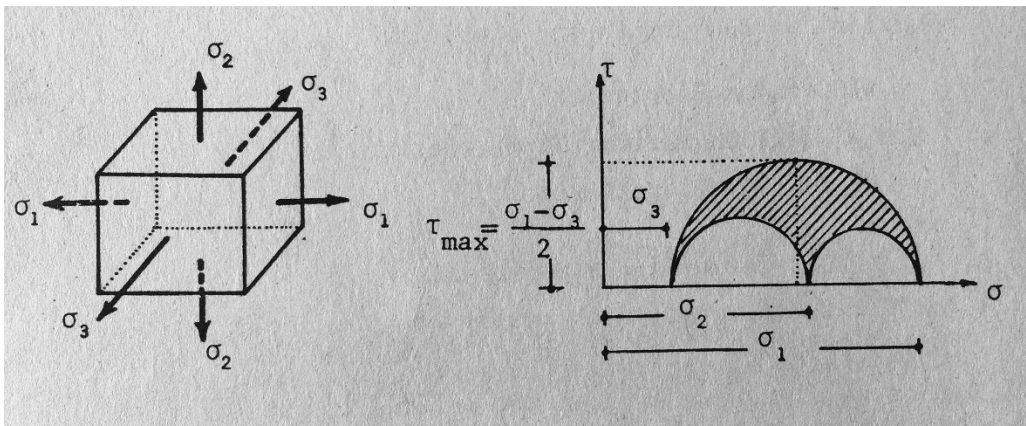
$$\sigma_{em} = \frac{\sigma_f}{n} \quad \text{sünek malzeme}$$

$$\sigma_{em} = \frac{\sigma'_b}{n} \quad \text{gevrek malzeme}$$

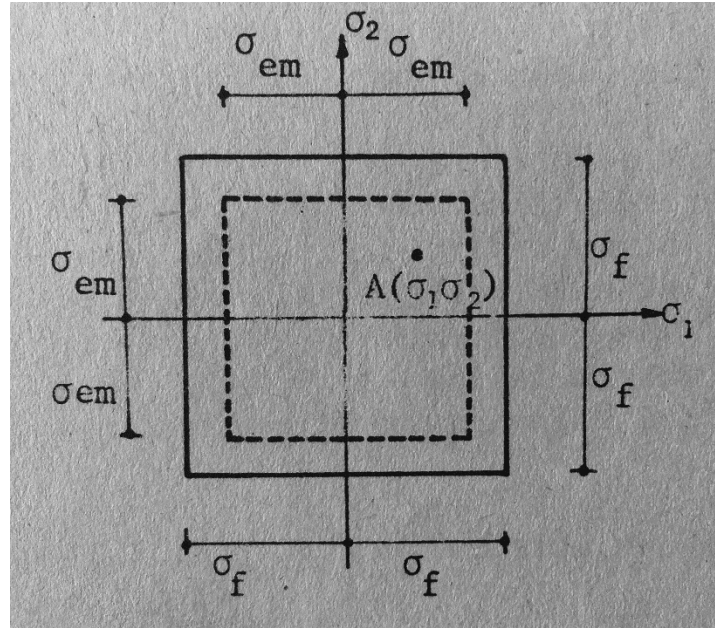
olmak üzere, boyutlandırma için,

$$\sigma_1 \leq \sigma_{em}$$

kriteri esas alınır.



σ_1, σ_2 asal gerilmeleri ile verilmiş bir düzlem gerilme hali, σ_1, σ_2 eksen takımında bir noktaya karşılık gelir (A Noktası).



Sünek malzeme halinde $\sigma_1 = \pm\sigma_f$ ve $\sigma_2 = \pm\sigma_f$ doğruları akma sınırlarını, $\sigma_1 = \pm\sigma_{em}$ ve $\sigma_2 = \pm\sigma_{em}$ doğruları ile sınırlanmış bölge ise emniyetli bölgeyi göstermektedir. A noktası bu bölge içinde ise, emniyet söz konusu olacaktır. Malzeme gevrek ise σ_f yerine σ_b ve $-\sigma'_b$ alınmalıdır.

Düzlem gerilme hali asal gerilmeler yerine $\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy}$ gerilmeleri ile verilmiş ise $\sigma_1 = \sigma_f$ şartına göre,

$$\sigma_1 = \sigma_{max} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} + \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + (\tau_{xy}^2)} = \sigma_f$$

yazılabilir. Bu durumda malzemede akma meydana gelecektir ve

$$\frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} + \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + (\tau_{xy}^2)} \leq \sigma_f$$

ise emniyet söz konusu olacaktır.

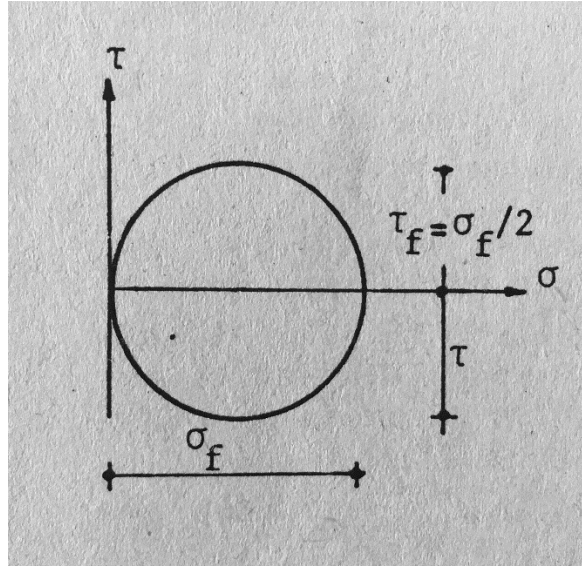
Bu hipotez basitliği bakımından bazı özel gerilme halleri için birçok ülke şartnamelerinde kabul edilmiş olmasına rağmen, basit kayma, hidrostatik basınç gibi durumlarda doğru sonuçlar vermez.

Maksimum Kayma Gerilmesi Hipotezi

Bu hipoteze göre akma veya kırılma, en büyük kayma gerilmesi τ_{max} tarafından meydana getirilmektedir. Aşağıdaki şekilde görülen tek eksenli gerilme haline ait Mohr çemberine göre, $\sigma_1 = \sigma_f$ alınacak olursa,

$$\tau_f = \frac{\sigma_f}{2}$$

elde edilir.



Diğer taraftan üç eksenli gerilme halinde Mohr çemberinden görüleceđi üzere,

$$\tau_{max} = \frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2}$$

olur ve bu hipoteze göre,

$$\tau_{max} = \tau_f$$

olduğunda akma meydana gelecektir. Yukardaki iki denklem eřitlenerek;

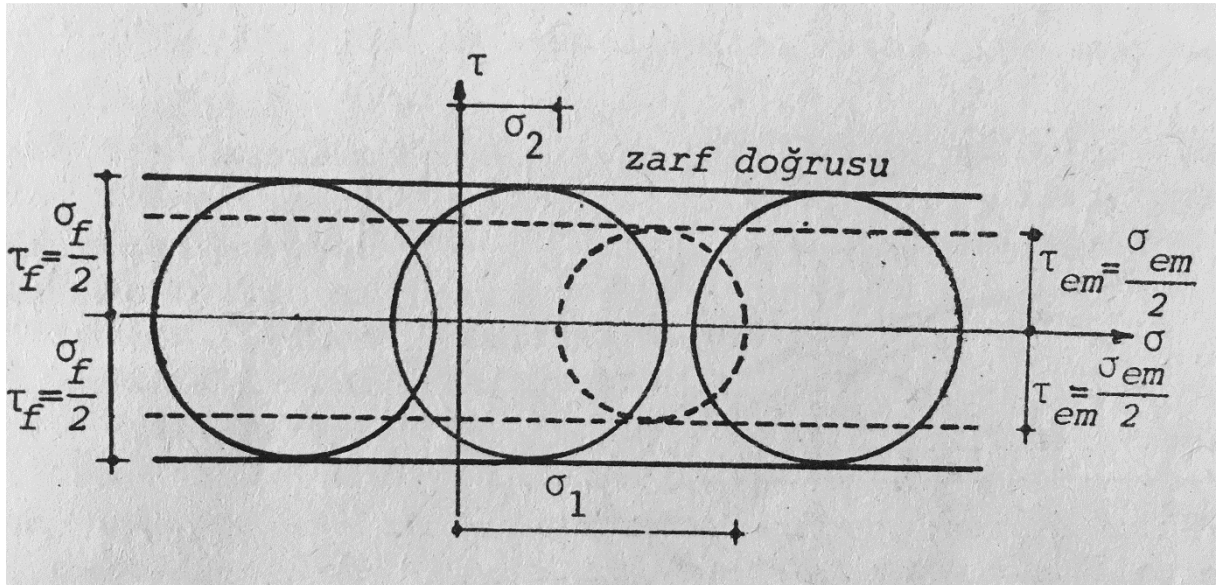
$$\sigma_1 - \sigma_3 = \sigma_f$$

ile akma şartı elde edilmiş olur. İki eksenli gerilme halinde ise akma şartı,

$$\sigma_1 - \sigma_2 = \sigma_f$$

şeklinde ve emniyet şartı da,

Bu hipoteze göre iki eksenli gerilme hali için emniyet şartı, aşağıdaki şekilde Mohr Çemberi yardımıyla da elde edilebilir. Kayma gerilmesinin akma sınırının yarısına eşit olması halindeki Mohr Çemberleri, $\tau = \pm\tau_f = \pm\sigma_f/2$ doğrularına teğet olacaktır. Bu doğrulara zarf doğruları denir. Bu hal için emniyet bölgesi, $\tau_{em} = \pm\sigma_{em}/2$ doğruları ile sınırlı olan bölgedir. Şayet σ_1, σ_2 asal gerilmeleri ile verilen gerilme haline ait Mohr Çemberi, taralı bölge içinde ise, gerilme hali emniyet şartını sağlar.



Bu hipotez, çekme ve basınçta aynı özelliği gösteren sünek malzemelerde iyi sonuçlar verir. Buna karşılık gevrek malzemede, bu hipotezle tatmin edici sonuçlar elde edilemez.

İki eksenli gerilme hali σ_1, σ_2 asal gerilmeleri yerine $\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy}$ gerilmeleri ile verilmişse, σ_1, σ_2 asal gerilmelerinin karşılıkları,

$$\sigma_1 - \sigma_2 = \sigma_f$$

de yerlerine konularak akma şartı için,

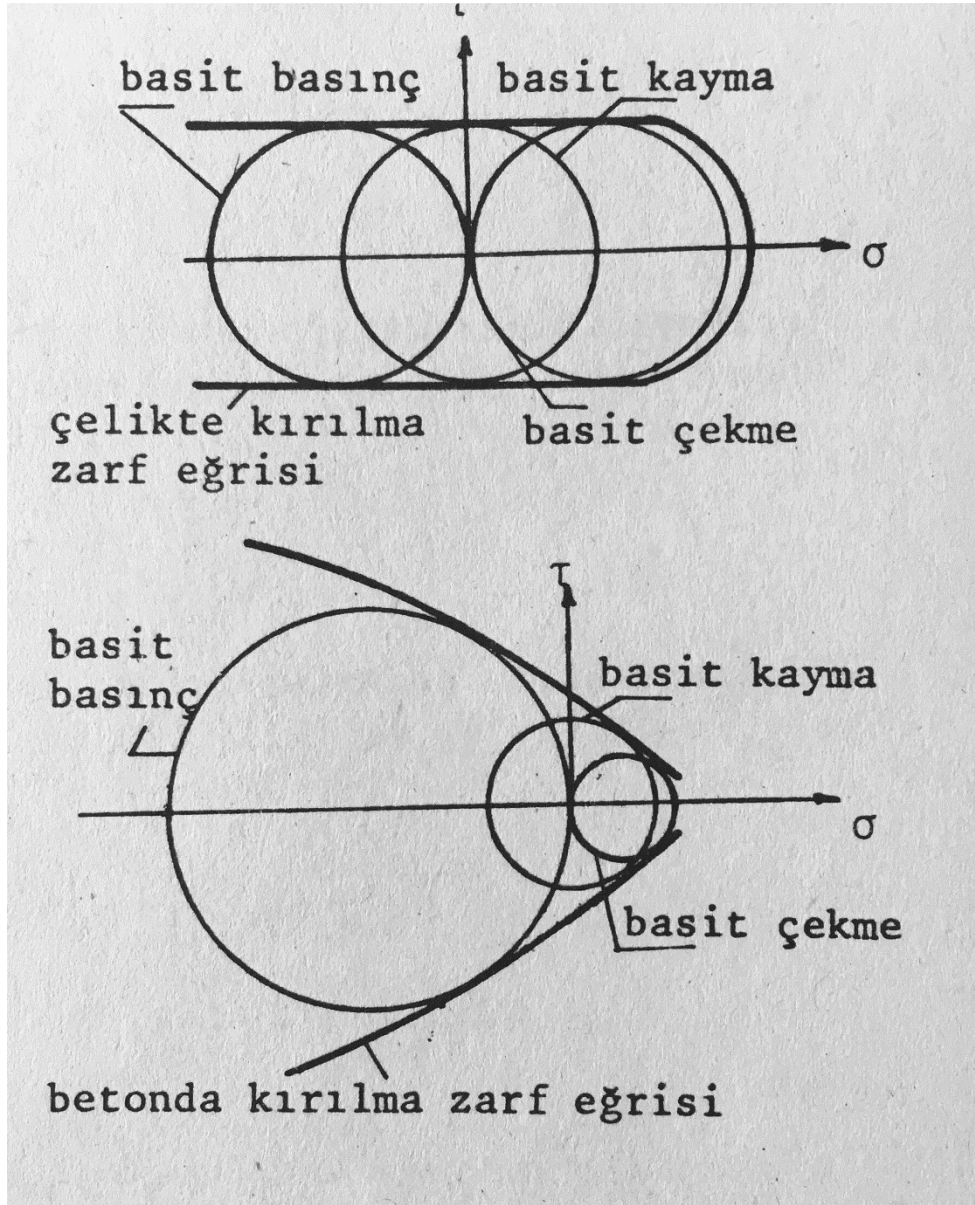
$$2 \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + (\tau_{xy}^2)} = \sigma_f$$

elde edilir. Benzer şekilde emniyet şartı için,

$$2 \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + (\tau_{xy}^2)} \leq \sigma_{em}$$

Mohr Kayma Gerilmesi Hipotezi

Bu hipoteze göre de kırılma için esas olan gerilme, maksimum kayma gerilmesidir. Fakat kırılma $\tau = f(\sigma)$ gibi bir bağıntının sağlanması halinde meydana gelecektir. Burada $f(\sigma)$ her malzeme için tayin edilmesi gereken bir fonksiyondur.



Emniyet zarf eğrisi ise, kırılma zarf eğrisinin emniyet katsayısı oranında küçülmüşü olacaktır. Verilen bir gerilme haline ait Mohr Çemberi taralı bölge içinde kalıyorsa emniyet şartı sağlanmış olur.

Genel olarak kırılma zarf eğrisi,

$$(a\sigma + b^2) = \tau^3$$

şeklinde kabul edilebilir. Burada a ve b , malzeme cinsine göre değişen katsayılardır.

Pratikte kırılma zarf eğrisi yerine yaklaşık olarak, malzemenin basit çekme, basınç ve basit kayma hallerine ait Mohr Çemberine çizilen ortak teğet doğrular alınabilir.

Bu hipotez bilhassa, çekme ve basınç mukavemeti farklı olan gevrek malzemelerde iyi neticeler verir.

2. Şekil Değiştirme Hipotezleri

Bu hipotezler kırılmanın, maksimum birim uzama veya maksimum açı değişimi belirli bir sınıra ulaştığında meydana geldiğini kabul ederler. St. Venant, Poncelet, Mariotte tarafından ortaya atılan bu hipotezlerin bugün için kullanılma sahaları çok sınırlıdır. Bu hipotezlerden burada yalnız biri ele alınacaktır.

Maksimum Birim Uzama Hipotezi

Bu hipoteze göre, maksimum birim uzama (ε_{max}) değeri, sünek malzemede ε_f , gevrek malzemede ise ε_b değerine erişince kırılma meydana gelecektir. Burada ε_f , akma gerilmesine karşılık gelen birim uzamayı, ε_b ise kırılma gerilmesine karşılık gelen birim uzamayı göstermektedir. Buna göre;

$$\text{Sünek malzemede} \quad \varepsilon_{max} = \varepsilon_f \quad (1)$$

$$\text{Gevrek malzemede} \quad \varepsilon_{max} = \varepsilon_b$$

olduğunda akma (veya kırılma) başlayacaktır.

σ_1, σ_2 asal gerilmeleri ile verilen bir düzlem gerilme halinde Hooke Kanununa göre,

$$\varepsilon_1 = \frac{1}{E}(\sigma_1 - \nu\sigma_2) \quad (2)$$

$$\varepsilon_2 = \frac{1}{E}(\sigma_2 - \nu\sigma_1)$$

olacaktır. Diğer taraftan basit çekme veya basınç halinde σ_f akma gerilmesine karşılık gelen birim uzama,

$$\varepsilon_f = \frac{\sigma_f}{E} \quad (3)$$

dir. Asal birim uzamalar içinde en büyüğü ε_1 ise (1) bağıntısına göre (2) ve (3) bağıntıları kullanılarak,

$$\frac{1}{E}(\sigma_1 - \nu\sigma_2) = \frac{1}{E}\sigma_f$$

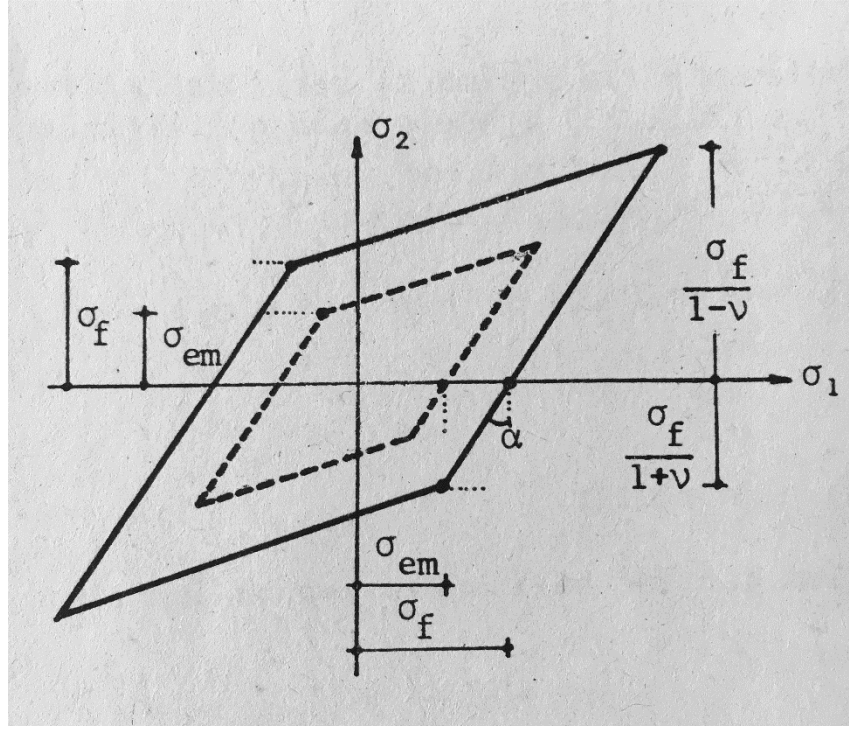
veya,

$$\sigma_1 - \nu\sigma_2 = \sigma_f \quad (4)$$

şeklinde akma şartı elde edilir (Gevrek malzeme halinde σ_f yerine, σ_b alınacaktır). Emniyet şartı için ise,

$$\sigma_1 - \nu\sigma_2 \leq \sigma_{em}$$

Aşağıdaki şekilde σ_1, σ_2 eksen takımında akma ve emniyet sınırları gösterilmiştir.



Düzlem gerilme hali σ_x, σ_y ve τ_{xy} gerilmeleri ile verilmişse asal gerilme değerleri (4) de yerlerine konularak akma şartı için,

$$(1 - \nu) \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} + (1 + \nu) \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2} = \sigma_f$$

Ve emniyet şartı için,

$$(1 - \nu) \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} + (1 + \nu) \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2} \leq \sigma_{em}$$

elde edilir.

3. Enerji Hipotezleri

Bu hipoteze göre, cisimde şekil değiştirme enerjisi belirli bir sınır değere ulaştığında sünek malzemede akma, gevrek malzemede ise kırılma olayı başlar.

$\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ asal gerilmeleriyle verilmiş bir gerilme halinde birim hacimdeki şekil değiştirme enerjisi (a_i) için,

$$a_i = \frac{1}{2E} [\sigma_x^2 + \sigma_y^2 + \sigma_z^2 - 2\nu(\sigma_x\sigma_y + \sigma_x\sigma_z + \sigma_y\sigma_z)] \\ + \frac{1}{2Gk'_y} (\tau_{xy}^2 + \tau_{xz}^2 + \tau_{yz}^2)$$

elde edilmiştir. Hipoteze göre akma veya kırılmanın başlaması için, şekil değiştirme enerjisinin ulaşması gereken sınır değer, tek eksenli gerilme halinde akmanın başladığı anda ortaya çıkan ve değeri,

$$a_i = \frac{\sigma_f^2}{2E}$$

ile hesaplanan birim hacimdeki şekil değiştirme enerjisidir. Yukardaki iki bağıntının eşitliğinden akma şartı için,

$$\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2 - 2\nu(\sigma_1\sigma_2 + \sigma_1\sigma_3 + \sigma_2\sigma_3) = \sigma_f^2$$

bağıntısı elde edilir.

Düzlem gerilme hali bahis konusu ise akma şartı,

$$\sigma_1^2 + \sigma_2^2 - 2\nu\sigma_1\sigma_2 = \sigma^2$$

olacaktır. Bu gerilme hali için emniyet şartı;

$$\sigma_1^2 + \sigma_2^2 - 2\nu\sigma_1\sigma_2 \leq \sigma_{em}^2$$

dir.

Biçim Değiştirme Enerjisi Hipotezi

Bu hipoteze göre bir cisimde akma veya kırılma, biçim değiştirme enerjisinin belirli bir sınır değere ulaşması halinde meydana gelecektir.

$\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ asal gerilmeleriyle verilmiş bir gerilme halinde, akmanın başlaması için erişilmesi gereken sınır değer, basit çekme halindeki biçim değiştirme enerjisine eşit olacaktır. Basit çekmede akma başladığı andaki gerilme σ_f olduğundan,

Biçim değiştirme enerjisi;

$$a_f = \frac{1}{6G} [\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2 - (\sigma_1\sigma_2 + \sigma_1\sigma_3 + \sigma_2\sigma_3)]$$

denkleminde, $\sigma_1 = \sigma_f$ ve $\sigma_2 = \sigma_3 = 0$ konularak biçim değiştirme enerjisi için,

$$a_f = \frac{1}{6G} \sigma_f^2$$

bulunur. Bu değer üç eksenli gerilme halinde yukardaki biçim değiştirme enerjisi bağıntısı ile eşitlenir ise, akma şartı olarak;

$$\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2 - (\sigma_1\sigma_2 + \sigma_1\sigma_3 + \sigma_2\sigma_3) = \sigma_f^2$$

elde edilir. Mises tarafından ortaya konulan bu hipotez plastisite teorisinde çokça kullanılmaktadır.

Düzlem gerilme halinde ise akma şartı,

$$\sigma_1^2 + \sigma_2^2 - \sigma_1\sigma_2 = \sigma_f^2$$

olacaktır. Emniyet şartıda,

$$\sigma_1^2 + \sigma_2^2 - \sigma_1\sigma_2 \leq \sigma_{em}^2$$