

Bölüm 14

KOMÜTATÖRLER

Bu bölümde gruplarda tanımlanan değişmeli bir çarpımın oluşturduğu alt grupları vereceğiz. Komütatör olarak adlandırılan bu çarpım terimler grupların üreteçlerini belirlemekte önemli rol oynarlar.

14.1 Komütatörler

Tanım (Komütatör): G grubunda, $x, y \in G$ ise, $x y x^{-1} y^{-1}$ çarpımına x ve y elemanlarının komütatörü denir ve $[x, y]$ şeklinde gösterilir. Tüm komütatörler tarafından üretilen G grubunun alt grubuna G grubunun **komütatör alt grubu** denir ve bu grup G' ile gösterilir.

Önerme 14.1.1 Komütatörün tersi de bir komütatördür.

İspat: $[x, y] = x y x^{-1} y^{-1} = z$ denirse,

$$z^{-1} = (x y x^{-1} y^{-1})^{-1} = y x y^{-1} x^{-1} = [y, x] \text{ olur.}$$

Önerme 14.1.2 G grubunun G' komütatör alt grubu, G nin normal alt grubudur.

İspat: $g \in G$ ve $h \in G'$ olduğunda, $g h g^{-1} \in G'$ olduğunu göstermeliyiz. Burada $x_1 = g x g^{-1}$ ve $y_1 = g y g^{-1}$ dersek, buradan $x_1^{-1} = g x^{-1} g^{-1}$ ve $y_1^{-1} = g y^{-1} g^{-1}$ elde edilir.

Eğer $h = x y x^{-1} y^{-1}$ şeklinde bir komütatörse,

$$\begin{aligned} g h g^{-1} &= (g x g^{-1})(g y g^{-1})(g x^{-1} g^{-1})(g y^{-1} g^{-1}) \\ &= (g x g^{-1})(g y g^{-1})(g x g^{-1})^{-1}(g y g^{-1})^{-1} \\ &= x_1 y_1 x_1^{-1} y_1^{-1} = [x_1, y_1] \in G' \end{aligned}$$

elde edilir. Böylece G' komütatör alt grubu, G nin normal alt grubudur.

O halde normal alt grup tanımından $G' \triangleleft G$ dir.

Önerme 14.1.3 G grubunun Abelyen olması için gerek ve yeter koşul $G' = \{e\}$ olmasıdır.

İspat: G grubunun değişmeli olduğunu kabul edelim ve $x, y \in G$ olarak alalım.
 $xy = yx$ şeklinde değişmeli olduğundan,

$$[x, y] = xyx^{-1}y^{-1} = yxx^{-1}y^{-1} = ye y^{-1} = e$$

olur. Bu halde, $G' < G$, e elemanı tarafından üretilen bir alt gruptur ve $G' = \{e\}$ olur.
Tersine, $G' = \{e\}$ olsun. Bu durumda herhangi bir komütatör için

$$[x, y] = xyx^{-1}y^{-1} = e$$

olur. Böylece,

$$(xyx^{-1}y^{-1})y = y \text{ ve } (xyx^{-1})x = yx \text{ veya } xy = yx$$

yazılır. Bu da, G grubunun değişmeli olduğunu gösterir.

Önerme 14.1.4 $(G, *)$ bir grup ve $N \triangleleft G$ olsun. G/N bölüm grubunun değişmeli olması için g.v.y.k. $G' \subset N$ olmasıdır.

İspat: $(G, *)$ grubunun değişmeli olması için g.v.y.k. $\forall a, b \in G$ için $[a, b] = e$ olmasıdır.

G/N bölüm grubunun değişmeli olması için g.v.y.k. $a * N, b * N \in G/N$ için

$$\begin{aligned} N = [a * N, b * N] &= (a * N) \otimes (b * N) \otimes (a * N)^{-1} \otimes (b * N)^{-1} \\ &= (a * b * a^{-1} * b^{-1}) * N \\ &= [a, b] * N \end{aligned}$$

olmasıdır.

$$N = [a, b] * N \Rightarrow [a, b] \in N$$

dır ve N değişmeli ise $[a, b] = e$ olmalıdır. Böylece G/N değişmelidir.

$[a, b]$ ve N iki komütatör olduğundan çarpımları $[G, G]$ komütatör grubunda bulunur.

Böylece, $G' \triangleleft G/N \Rightarrow G' \subset N$ dir.

14.2 Komütatör Örnekleri

Örnek 1 $D_4 = \{x, y \mid x^4 = y^2 = e \text{ ve } xy = yx^3\}$ dihedral grubunun komütatör alt grubunu bulunuz.

Çözüm: $D_4 = \{ e, x, x^2, x^3, y, yx, yx^2, yx^3 \}$ ün elemanlarının komütatörlerini hesaplayalım:

$[x, y] = x y x^{-1} y^{-1}$ tanımına göre,

$$a = x, b = x \Rightarrow [x, x] = x x x^{-1} x^{-1} = x^2 x^{-2} = e$$

$$a = y, b = y \Rightarrow [y, y] = y y y^{-1} y^{-1} = y^2 y^{-2} = e$$

$$a = x, b = y \Rightarrow [x, y] = x y x^{-1} y^{-1} = x \underbrace{y x^3}_{xy} y = x^2 \underbrace{y^2}_e = x^2$$

$$a = x^2, b = y \Rightarrow [x^2, y] = x^2 y x^{-2} y^{-1} = x^2 \underbrace{y x^2}_{x^2 y} y = \underbrace{x^4}_e \underbrace{y^2}_e = e$$

$$a = x, b = yx \Rightarrow [x, yx] = x y x x^{-1} (yx)^{-1} = x \underbrace{y x^3}_{xy} y = x^2 \underbrace{y^2}_e = x^2$$

$$a = y, b = yx \Rightarrow [y, yx] = \underbrace{y y x}_e y^{-1} (yx)^{-1} = x \underbrace{y x^3}_{xy} y = x^2 \underbrace{y^2}_e = x^2$$

$$a = x^2, b = yx \Rightarrow [x^2, yx] = x^2 y x x^{-2} (yx)^{-1} = x^2 y x^3 x^{-1} y = x^2 \underbrace{y x^2}_{x^2 y} y = x^4 = e$$

$$a = x, b = yx^2 \Rightarrow [x, yx^2] = x y x^2 x^{-1} (yx^2)^{-1} = x y x x^{-2} y^{-1} = x \underbrace{y x^3}_{xy} y = x^2$$

$$a = y, b = yx^2 \Rightarrow [y, yx^2] = \underbrace{y y x^2}_e y^{-1} (yx^2)^{-1} = x^2 y x^{-2} y = x \underbrace{y x x}_y y = \underbrace{xyx}_y y = e$$

$$a = x^2, b = yx^2 \Rightarrow [x^2, yx^2] = x^2 y \underbrace{x^2 x^{-2}}_e (yx^2)^{-1} = x^2 y x^{-2} y = x^2 \underbrace{y x^2}_{x^2 y} y = x^4 = e$$

$$a = x, b = yx^3 \Rightarrow [x, yx^3] = x y x^3 x^{-1} (yx^3)^{-1} = x y x^2 x^{-3} y = x \underbrace{y x^3}_{xy} y = x^2$$

$$a = y, b = yx^3 \Rightarrow [y, yx^3] = y y x^3 y^{-1} (yx^3)^{-1} = x^3 y x^{-3} y = x^3 \underbrace{y x y}_{x^3} = x^6 = x^2$$

$$a = x^2, b = yx^3 \Rightarrow [x^2, yx^3] = x^2 y x^3 x^{-2} (y x^3)^{-1} = x^2 y x x^{-3} y = x^2 \underbrace{y x^2}_{x^2 y} y = x^4 = e$$

O halde komütatörler kümesi olarak $G' = \{e, x^2\}$ elde edilir.

Örnek 2 $D_3 = \{e, x, x^2, y, yx, yx^2\}$ dihedral grubunun komütatör alt grubunu bulunuz.

Çözüm: $D_3 = \{e, x, x^2, y, yx, yx^2\}$ ün elemanlarının komütatörlerini hesaplayalım:

$[x, y] = x y x^{-1} y^{-1}$ tanımına ve $xy = yx^2 = yx^{-1}$ bağıntısına göre,

$$a = x, b = x \Rightarrow [x, x] = x x x^{-1} x^{-1} = x^{-2} x^2 = e$$

$$a = y, b = y \Rightarrow [y, y] = y y y^{-1} y^{-1} = y^2 y^{-2} = e$$

$$a = x, b = y \Rightarrow [x, y] = x y x^{-1} y^{-1} = x \underbrace{y x^2}_{xy} y = x^2 \underbrace{y^2}_e = x^2$$

$$a = x^2, b = y \Rightarrow [x^2, y] = x^2 y x^{-2} y^{-1} = x^2 \underbrace{y x y}_{x^2 y} = x^4 \underbrace{y^2}_e = x$$

$$a = x, b = yx \Rightarrow [x, yx] = x y x x^{-1} (yx)^{-1} = x \underbrace{y x^2}_{xy} y = x^2 \underbrace{y^2}_e = x^2$$

$$a = y, b = yx \Rightarrow [y, yx] = \underbrace{y y x}_{e} y^{-1} (yx)^{-1} = x \underbrace{y x^2}_{xy} y = x^2 \underbrace{y^2}_e = x^2$$

$$a = x^2, b = yx \Rightarrow [x^2, yx] = x^2 y x x^{-2} (yx)^{-1} = x^2 y x^{-1} x^{-1} y = x^2 \underbrace{y x y}_{x^2 y} = x$$

$$a = x, b = yx^2 \Rightarrow [x, yx^2] = x y x^2 x^{-1} (yx^2)^{-1} = x y x x^{-2} y = x \underbrace{y x^2}_{xy} y = x^2$$

$$a = y, b = yx^2 \Rightarrow [y, yx^2] = y y x^2 y^{-1} (yx^2)^{-1} = \underbrace{x^2 y}_{yx} x^{-2} y = y x x^{-1} y = e$$

$$a = x^2, b = yx^2 \Rightarrow [x^2, yx^2] = x^2 y x^2 x^{-2} (yx^2)^{-1} = x^2 y x^{-2} y = x^2 \underbrace{y x y}_{x^2 y} = x^4 = x$$

O halde komütatörler kümesi olarak $G' = \{e, x, x^2\}$ elde edilir.

Bölüm 15

GRUP İZOMORFİZMA TEOREMLERİ

Bu bölümde grup teorisinde izomorfizma teoremleri olarak bilinen teoremleri vereceğiz. Bu teoremler, bölüm grupları ile ilgili olup, bölüm grupları arasındaki eş yapıları belirleyen dönüşümleri açıklar.

15.1 İzomorfizma Teoremleri

Teorem 15.1.1 (Birinci İzomorfizma Teoremi): G ve H iki grup ve $\varphi: G \rightarrow H$ bir grup homomorfizması olsun. $\text{Ker } \varphi = N$ olmak üzere

$$G/N \cong \varphi(G)$$

dir. φ epimorfizma ise $G/N \cong H$ dir.

İspat: $\varphi: G \rightarrow H$ epimorfizma ve $K < G$ ise $\varphi(K) < H$ idi. $\text{Ker } \varphi = N < G$ ve $\varphi(G) < H$ ise

$$\delta: G \rightarrow G/N$$

doğal homomorfizması mevcuttur. O zaman

$$\theta: G/N \rightarrow \varphi(G), \quad \theta(aN) = \varphi(a), \quad \forall aN \in G/N \text{ için}$$

izomorfizması mevcuttur. Yani 1-1, örten ve homomorfizma koşulları sağlanır.

1-1 olması: $\theta(aN) = \theta(bN) \Leftrightarrow aN = bN$ olduğunu göstermeliyiz:

$$\begin{aligned} \theta(aN) = \theta(bN) &\Rightarrow \varphi(a) = \varphi(b) \Rightarrow \varphi(a)\varphi(b)^{-1} = e_H \\ &\Rightarrow \varphi(a)\varphi(b^{-1}) = e_H \\ &\Rightarrow \varphi(ab^{-1}) = e_H \\ &\Rightarrow ab^{-1} \in \text{Ker } \varphi = N \\ &\Rightarrow (ab^{-1})N = N \\ &\Rightarrow aN = bN \end{aligned}$$

Örten olması:

$\forall \varphi(a) \in \varphi(G)$ için $\theta(aN) = \varphi(a)$ olacak şekilde $\exists aN \in G/N$ mevcuttur.

Homomorfizma olması:

$\theta[(aN)(bN)] = \theta(aN).\theta(bN)$ olduğunu göstermeliyiz:

$$\theta[(aN)(bN)] = \theta((a b)N) = \varphi(a b) = \varphi(a).\varphi(b) = \theta(aN).\theta(bN)$$

Teorem 15.1.2 (İkinci İzomorfizma Teoremi): G bir grup, $H < G$ ve $K \triangleleft G$ ise

$$H/H \cap K \cong HK/K$$

dır.

İspat: G bir grup, $H, K \triangleleft G$ ise $HK = KH$ ve $HK < G$ dir.

$\varphi: H \rightarrow HK/K$ grup homomorfizması olmak üzere $\text{Ker } \varphi$

$$\begin{aligned} \text{Ker } \varphi &= \{a \in H \mid \varphi(a) = eK = K\} \\ &= \{a \in H \mid h k K = h K = aK = K\} \\ &= \{a \in H \mid a \in K\} = H \cap K \end{aligned}$$

elde edilir. Buradan

$\delta: H \rightarrow H/H \cap K$ doğal homomorfizması ve

$\theta: H/H \cap K \rightarrow HK/K$ izomorfizması

mevcuttur. 1. İzomorfizma Teoremi gereğince

$$H/H \cap K \cong HK/K$$

dır.

Teorem 15.1.3 (Üçüncü İzomorfizma Teoremi): G bir grup, $H, K \triangleleft G$ ve $K < H$ olsun.

$K \triangleleft H$ ise $H/K \triangleleft G/K$ dır.

$$G/H \cong G/K/H/K$$

dır.

İspat 1: $\varphi: G \rightarrow G/K/H/K$ grup homomorfizması olmak üzere $\text{Ker } \varphi$

$$\begin{aligned}\text{Ker } \varphi &= \{a \in G \mid \varphi(a) = (aK)H/K = eH/K\} \\ &= \{a \in G \mid (aK)H/K = H/K\} \\ &= \{a \in H \mid aK \in H/K\} = \{a \in H \mid a \in H\} = H\end{aligned}$$

elde edilir. Buradan

$\delta: G \rightarrow G/H$ doğal homomorfizması ve

$\theta: G/H \rightarrow G/K/H/K$ izomorfizması

mevcuttur. 1. İzomorfizma Teoremi gereğince

$$G/H \cong G/K/H/K$$

dır.

İspat 2: $\varphi: G/K \rightarrow G/H$, $\varphi(aK) = aH$ grup homomorfizması olmak üzere $\text{Ker } \varphi$

$$\begin{aligned}\text{Ker } \varphi &= \{a \in G/K \mid \varphi(a) = eH = H\} \\ &= \{aK \mid \varphi(aK) = eH = H\} \\ &= \{aK \mid aH = H\} = \{aK \mid a \in H\} = H/K\end{aligned}$$

elde edilir. Buradan

$\delta: G/K \rightarrow G/K/H/K$ doğal homomorfizması ve

$\theta: G/K/H/K \rightarrow G/H$ izomorfizması

mevcuttur. 1. İzomorfizma Teoremi gereğince

$$G/K/H/K \cong G/H$$

dır.

15.2 İzomorfizma Teoremi ile İlgili Örnekler

Örnek 1 $G = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \right\}$ bir grup,

$$\varphi: G \rightarrow G', \quad \varphi \left(\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \right) = \det \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = ad - bc$$

örten izomorfizması (epimorfizma) verildiğinde 1. İzomorfizma Teoremini gerçekleyiniz.

Çözüm: Önce çekirdeği bulmalıyız:

$$\begin{aligned} \text{Ker } \varphi &= \left\{ a \in G \mid \varphi(a) = e_{G'} = 1 \right\} \\ &= \left\{ a \in G \mid \varphi \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = 1, \varphi \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = 1 \right\} \end{aligned}$$

olduğuna göre

$\delta: G \rightarrow G/\text{Ker } \varphi$ doğal homomorfizması ve

$\theta: G/\text{Ker } \varphi \rightarrow \varphi(G) = G'$ izomorfizması mevcuttur.

O halde $G/\text{Ker } \varphi \cong \varphi(G) = G'$ dür.

Örnek 2 $G = Z_{40}$, $H = \langle 4 \rangle$, $K = \langle 10 \rangle$ olsun. 2. İzomorfizma Teoremini uygulayınız.

Çözüm: $G = Z_{40}$ grubunda işlem $+$ olduğundan HK yerine $H + K$ almalıyız.

$$\begin{aligned} H = \langle 4 \rangle &= \{0, 4, 8, 12, \dots, 36\} < G \\ K = \langle 10 \rangle &= \{0, 10, 20, 30\} < G \\ H + K &= \{0, 2, 4, \dots, 36, 38\} = \langle 2 \rangle \end{aligned}$$

Çekirdeğini bulalım:

$\text{Ker } \varphi = H \cap K$ olacağından $H \cap K = \{0, 20\} = \langle 20 \rangle$ dir.

$\varphi: H \rightarrow H + K/K$ grup homomorfizmasına karşılık $\varphi: \langle 4 \rangle \rightarrow \langle 2 \rangle / \langle 10 \rangle$

$\delta: H \rightarrow H/H \cap K$ doğal homomorfizmasına karşılık $\delta: \langle 4 \rangle \rightarrow \langle 4 \rangle / \langle 20 \rangle$

$$\theta: H/H \cap K \rightarrow H + K/K \text{ izomorfizmasına karşılık } \theta: \langle 4 \rangle / \langle 20 \rangle \rightarrow \langle 2 \rangle / \langle 10 \rangle$$

1. İzomorfizma Teoremi gereğince

$$H/H \cap K \cong H + K/K \text{ ya karşılık } \langle 4 \rangle / \langle 20 \rangle \cong \langle 2 \rangle / \langle 10 \rangle \cong Z_5$$

elde edilir.

Örnek 3 $G = Z$, $H = 2Z$, $K = 6Z$ olsun. 3. İzomorfizma Teoremini uygulayınız.

Çözüm:

$$H = 2Z \triangleleft Z \text{ ve } K = 6Z \triangleleft Z \text{ ve } 6Z < 2Z \text{ olduğuna göre,}$$

$$G/K = Z/6Z$$

$$G/K/H/K = G/H \Rightarrow Z/6Z/2Z/6Z = Z/2Z$$

$$H/K = 2Z/6Z = \text{Ker } \varphi \text{ olmak üzere}$$

$$\delta: G/K \rightarrow G/K/H/K \text{ doğal homomorfizmasına karşılık}$$

$$\delta: Z/6Z \rightarrow Z/6Z/2Z/6Z$$

doğal homomorfizması ve

$$\theta: G/K/H/K \rightarrow G/H \text{ izomorfizmasına karşılık}$$

$$\theta: Z/6Z/2Z/6Z \rightarrow Z/2Z$$

izomorfizması mevcuttur. Dolayısıyla

$$Z/6Z/2Z/6Z = Z/2Z \cong Z_2$$

elde edilir.

$$\text{veya; } H = 2Z = \text{Ker } \varphi \text{ olmak üzere}$$

$$\delta: G \rightarrow G/H \text{ doğal homomorfizmasına karşılık}$$

$$\delta: Z \rightarrow Z/2Z$$

doğal homomorfizması ve

$\theta: G/H \rightarrow G/K/H/K$ izomorfizmasına karşılık

$$\theta: \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}/6\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}/6\mathbb{Z}$$

izomorfizması mevcuttur. Dolayısıyla

$$\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} = \mathbb{Z}/6\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}/6\mathbb{Z} \cong \mathbb{Z}_2$$

elde edilir.