

Bölüm 6

KOSETLER VE LAGRANGE TEOREMİ

Bu bölümde verilen bir G grubunun H alt grubu yardımıyla tanımlanan denklik bağıntısı sonucunda elde edilen denklik sınıflarını yani kosetleri inceleyeceğiz.

6.1 Kosetler (Yan -Kümeler)

Tanım (Koset): G bir grup ve $H < G$ olsun. Bir $a \in G$ için aH (veya Ha) alt kümesine H alt grubunun sol (yada sağ) koseti (yan-küme) denir. Burada a elemanına da aH **nın temsilcisi** denir.

$$\begin{aligned} H * a &= \{ h * a \mid h \in H \} && \text{sağ koset} \\ a * H &= \{ a * h \mid h \in H \} && \text{sol koset} \end{aligned}$$

şeklindedir.

Önerme 6.1.1 Eğer $(H, *)$ ve $(G, *)$ grubunun bir alt grubu ise o zaman $a * H = H$ dır. Yalnız ve yalnız $a \in H$ ise.

İspat: $a * H = H$ olsun. $e \in H$ olduğundan $a = a * e \in a * H$ dır. $a \in a * H = H$ olduğundan $a \in H$ olur.

$a \in H$ olsun. $H, *$ işlemine göre kapalı olduğundan $a * H \subset H$ olur. Ayrıca

$\forall h \in H$ için $h = a * (a^{-1} * h)$ yazılabilir. $a^{-1} * h \in H$ dan $h \in a * H$ ve $H \subset a * H$ olur. Böylece $a * H = H$ elde edilir.

Önerme 6.1.2 Eğer $(H, *)$ ve $(G, *)$ grubunun bir alt grubu ise o zaman $a * H = b * H$ dır. Yalnız ve yalnız $a^{-1} * b \in H$ ise.

İspat: $a * H = b * H$ olsun. Eğer $a * h_1 \in a * H$ ise o zaman $\exists h_2 \in H$ vardır öyleki $a * h_1 = b * h_2$ dir. Buradan $\underbrace{h_1 * h_2^{-1}}_{\in H} = a^{-1} * b \in H$ ve $a^{-1} * b \in H$ elde edilir.

$a^{-1} * b \in H$ olsun. Önerme 5.1.1 den $(a^{-1} * b) * H = H$ dır.

Bir $h_1 \in H$ ve $h_2 \in H$ için bu eşitlikten

$$h_1 = (a^{-1} * b) * h_2 = a^{-1} * (b * h_2)$$

yazılabilir. Buradan $a * h_1 = b * h_2$ elde edilir. Böylece $a * H = b * H$ dır.

Önerme 6.1.3 G nin bir alt grubu H olsun. O zaman sol koset çarpımı

$$(aH)(bH) = (ab)H$$

ise H , G nin bir normal alt grubudur.

İspat: $a \in aH$ ve $b \in bH$, $(aH)(bH) = (ab)H$ şeklinde tanımlı olduğu kabul edilsin. $e \in H$ olduğuna göre,
 $aHa^{-1} = aHa^{-1}e \subset (aH)(a^{-1}H) = (aa^{-1})H = eH = H$ olur. Böylece $H \triangleleft G$ dir.

Sonuç önerme: G bir grup ve $N < G$ olmak üzere, her $a \in G$ için $aN = Na$ ise,
 $\forall a \in G$ için $(aN)(bN) = (ab)N$ dir.

İspat: $(aN)(bN) = a(Nb)N = a(bN)N = (ab)NN$ dir. N çarpma işlemine göre kapalı olduğundan $NN \subset N$ dir. Ayrıca, $N = eN \subset NN$ olduğundan, $NN = N$ dir. Böylece,
 $(aN)(bN) = (ab)N$ dir.

Sonuç: G nin H alt grubu sonlu ve mertebesi n ise her aH veya Ha kalan sınıfı da sonlu olup, eleman sayısı n dir.

İspat: aH ile H sonludur ve aH nın eleman sayısı, H nın mertebesi olan n ' ye eşittir. Yani; aH ile H aynı kuvvettedir. Ayrıca herhangi iki kalan sınıfı (koset) aH , bH da aynı kuvvettedir.

Önerme 6.1.4 $N \triangleleft G$ olsun. G/N kümesi, $aN, bN \in G/N$ olmak üzere,
 $(aN)(bN) = (ab)N$ işlemine göre bir gruptur.

İspat: i) $\forall a, b \in G$ için $(aN)(bN) = (ab)N$ olduğundan G/N kapalılık özelliğine sahiptir.

ii) G bir grup ise birleşme özelliği olduğundan G/N de de birleşme özelliği vardır.

$$\begin{aligned} (aN)[(bN)(cN)] &= [(aN)(bN)](cN) \\ (aN)(bc)N &= (ab)N(cN) \\ (abc)N &= (abc)N \end{aligned}$$

iii) $eN = N$ koseti G/N nin birim elemanıdır.

iv) $\forall aN \in G/N$ için $a^{-1} \in G$ olduğundan $a^{-1}N \in G/N$ olduğundan $(aN)(a^{-1}N) = (aa^{-1})N = eN = N$ olduğundan invers eleman vardır.

Böylece G/N nin bir grup olduğu gösterilmiş olur.

Önerme 6.1.5 $N \triangleleft G$ olmak üzere $f : a \rightarrow aN$ şeklinde tanımlanan $f : G \rightarrow G/N$ fonksiyonu örten bir homomorfizmadır. Bu homomorfizmanın çekirdeği N dir.

İspat: $\forall a, b \in G$ için $f(ab) = (ab)N = (aN)(bN) = f(a).f(b)$ olduğundan bir homomorfizmadır.

G/N deki $\forall aN$ için $f(a) = aN$ olacak şekilde $\exists a \in G$ vardır. Yani, örtendir.

G/N de birim eleman eN olduğundan, $f(a) = aN = eN = N$ olup, $\ker f = N$ elde edilir.

Örnek: Z_6 grubu abelyendir. Z_6 nın $H = \{0, 3\}$ alt grubunun kosetlerinin parçalanışını bulunuz.

$H = \{0, 3\}$ ün kendisi bir kosettir. 1 ' i içeren koset $1 + \{0, 3\} = \{1, 4\}$, 2 ' i içeren koset $2 + \{0, 3\} = \{2, 5\}$ dir. $\{0, 3\}$, $\{1, 4\}$, $\{2, 5\}$ kosetleri Z_6 nın tüm kosetleridir. Z_6 nın parçalanışı aşağıda verilmiştir.

$+_6$	0	3	1	4	2	5
0	0	3	1	4	2	5
3	3	0	4	1	5	2
1	1	4	2	5	3	0
4	4	1	5	2	0	3
2	2	5	3	0	4	1
5	5	2	0	3	1	4

Böylece $Z_6 = \{H\} \cup \{1 + H\} \cup \{2 + H\}$ elde edilir. Aynı zamanda Z_6 grubu abelyen olduğundan sol kosetler ile sağ kosetler eşittir.

Örnek: $C_{12} = \{e, g^1, g^2, \dots, g^{11}\}$ devirli grubunda, $H = \{e, g^4, g^8\}$ alt grubunun sağ kosetlerini bulunuz.

Çözüm: H , kendi kendine bir kosettir. Diğer bir koset,

$$Hg = \{g^1, g^5, g^9\}$$

şeklindedir. Bu iki koset C_{12} devirli grubunu dolduramaz. H veya H_g yan kosetlerinde olmayan g^2 elemanını seçelim. Buna göre, üçüncü sağ koset,

$$Hg^2 = \{g^2, g^6, g^{10}\} \text{ ve}$$

dördüncü koset de

$$Hg^3 = \{g^3, g^7, g^{11}\}$$

olarak bulunur. Böylece, H , Hg , Hg^2 ve Hg^3 sağ kosetleri ikişer ikişer ayrık ve

$$C_{12} = H \cup Hg \cup Hg^2 \cup Hg^3$$

olduğu için, bu H , Hg , Hg^2 ve Hg^3 kümeleri, istenen sağ yan kosetlerdir.

Örnek: $G = \{1, a, a^2, a^3\}$ grubu a elemanı tarafından üretilen ve mertebesi 4 olan bir devirli grup olsun. $H = \{1, a^2\}$ olarak verildiğinde H kümesinin (H bir alt grup) G grubundaki tüm sağ kosetlerini bulunuz.

Çözüm: $H = \{1, a^2\}$ nin sağ kosetleri

$$He = H = \{1, a^2\}, \quad Ha = \{a, a^3\}, \quad Ha^2 = \{a^2, a^4\} = \{1, a^2\} = H$$

$$Ha^3 = \{a^3, a^5\} = \{a^3, a\} = Ha$$

şeklinde elde edilir. H ve Ha sağ kosetleri ayrıktır ve birleşimleri G yi verir. Yani,

$$H \cup Ha = \{1, a, a^2, a^3\} = G$$

dir.

6.2 Lagrange Teoremi

Bu kısımda devirli olmayan bir grubun alt gruplarının nasıl bulunduğunu belirleyen önemli bir teoremi vereceğiz.

Önerme 6.2.1 (Lagrange Teoremi) Sonlu bir G grubunun her H alt grubunun mertebesi, G grubunun mertebesini böler.

İspat: G sonlu bir grup ve $o(G) = n$, $H < G$ ve $o(H) = m$ olsun. $m \mid n$ olduğunu göstermeliyiz. Bunun için her sol koset aynı sayıda eleman içermelidir. Sol kosetler G grubunun bir ayrışımını oluştururlar. k , H nın G deki farklı sol kosetlerinin sayısı ise $n = km$ dir. Böylece, $m \mid n$ elde edilir.

Tanım (indeks): G bir grup ve $H < G$ olmak üzere H nın G deki farklı sağ ve sol kosetlerinin sayısına H nın G deki indeksi denir ve $[G : H]$ ile gösterilir.

Sonuç 1: G sonlu bir grup ve $H < G$ olmak üzere, $[G : H] = \frac{o(G)}{o(H)}$ dir.

Sonuç 2: G sonlu bir grup ve $o(G) = n$ olsun. $\forall a \in G$ için, $o(a) \mid n$ dir ve $a^n = e$ elde edilir.

Lagrange Teoremine göre, bir sonlu grubun her alt grubunun mertebesini böldüğünü önerme 6.1.2 den biliyoruz. Ayrıca G bir grup ise $o(G)$ nin yani G nin mertebesinin her pozitif bölenine karşılık bir ve yalnız bir alt grubu mevcuttur. Fakat herhangi bir G sonlu grubu için bu doğru değildir. Yani, Lagrange teoreminin tersi her zaman doğru değildir.

Önerme 6.2.2 G sonlu bir grup ve $a \in G$ olsun. Bu durumda a elemanının mertebesi G grubunun mertebesini böler.

İspat: G sonlu bir grup ve $a \in G$ olsun. $\langle a \rangle < G$ olduğundan Lagrange teoremi gereğince

$$o(\langle a \rangle) \mid o(G) \text{ dir.}$$

Aynı zamanda $o(a) = o(\langle a \rangle)$ olduğundan $o(a) \mid o(G)$ dir.

Önerme 6.2.3 G sonlu bir grup olmak üzere K ve H , $K < H$ olacak şekilde G nin iki alt grubu olsun. Bu durumda

$$(G : K) = (G : H)(H : K)$$

dır.

İspat: Lagrange Teoreminden

$$[G : H] = \frac{o(G)}{o(H)} \text{ ya da } o(G) = (G : H) \cdot o(H)$$

$$o(H) = (H : K) \cdot o(K)$$

$$o(G) = (G : K).o(K)$$

eşitlikleri yazılabilir. Diğer taraftan

$$\begin{aligned} o(G) &= (G : H).o(H) = (G : H).(H : K).o(K) \\ &= (G : K).o(K) = (G : H).(H : K).o(K) \end{aligned}$$

eşitliklerinden

$$(G : K) = (G : H)(H : K)$$

elde edilir.

Örnek: Z_6 grubu abelyendir. Z_6 nın $H = \{0, 3\}$ alt grubunun kosetlerinin $Z_6 = \{H\} \cup \{1 + H\} \cup \{2 + H\}$ parçalanışına göre Lagrange Teoremini gerçekleyiniz.

Çözüm: $Z_6 = \{H\} \cup \{1 + H\} \cup \{2 + H\}$ ve aynı zamanda Z_6 grubu abelyen olduğundan sol kosetler ile sağ kosetler eşittir.

Kosetlerin mertebeleri

$$o(1 + H) = o(2 + H) = o(H) = 2$$

olduğundan

$$o(Z_6) = o(H) + o(1 + H) + o(2 + H)$$

yazabiliriz. Ayrıca $o(Z_6) = 3.o(H)$ olup, $o(H) \mid o(Z_6)$ yani; $2 \mid 6$ yazarız. Böylece Lagrange Teoremine göre alt grubun mertebesi grubun mertebesini böldüğü gerçekleşmiş olur.

Örnek: G mertebesi 189 olan bir grup ve $a, b \in G$ için $o(a) = 9$, $o(b) = 21$ olsun. $H \neq G$ olmak üzere Lagrange teoremi yardımıyla $H = \langle a, b \rangle$ alt grubunun mertebesini bulunuz.

Çözüm: G grubu sonlu olduğundan $H = \langle a, b \rangle < G$ için Lagrange teoremi gereğince $o(H) \mid 189$ dur. Bu durumda $o(H) = 1, 3, 7, 9, 21, 27, 63$ veya 189 olabilir. $H \neq G$ olduğundan $o(H) \neq 189$ dur. $\langle a \rangle < H$ olduğundan $o(a) \mid o(H)$ yani $9 \mid o(H)$ dır. Benzer şekilde $\langle b \rangle < H$ olduğundan $o(b) \mid o(H)$ yani $21 \mid o(H)$ dır. Eğer $9 \mid o(H)$ ve $21 \mid o(H)$ ise $\text{ekok}(9, 21) = 63 \mid o(H)$ olacağından $o(H) = 63$ bulunur.

Bölüm 7

NORMAL ALT GRUPLAR

Bu bölümde, bir grupta tanımlanan denklik bağıntısı sonucunda elde edilen sağ ve sol kosetler ne zaman birbirine eşit olmalıdır sorusuna cevap arayacağız. Bu koşulu sağlayan grupları inceleyeceğiz.

7.1 Normal Alt Gruplar

Tanım (Normal alt grup): Bir $(G, *)$ grubunun $(N, *)$ alt grubuna

$$\forall g \in G \text{ ve } \forall n \in N \text{ için } g * n * g^{-1} \in N \text{ ise}$$

$(G, *)$ grubunun normal (invariant) alt grubu denir. $N \triangleleft G$ ile gösterilir.

$N \triangleleft G$ olduğunda aşağıdaki ifadeler birbirine denktir:

- i) $\forall a \in G, \forall n \in N \text{ için } a * n * a^{-1} \in N$
- ii) $\forall a \in G \text{ için } a * N * a^{-1} \subset N$
- iii) $\forall a \in G \text{ için } a * N * a^{-1} = N$
- iv) $\forall a \in G \text{ için } a * N = N * a$
- v) $\forall a, b \in G \text{ için } (aN)(bN) = (abN)$

Son ifade sol- koset çarpımı olarak adlandırılır.

Önerme 7.1.1 $(N, *)$, $(G, *)$ grubunun normal alt grubudur. Yalnız ve yalnız $\forall g \in G$ için $g * N * g^{-1} = N$ ise.

İspat: $N \triangleleft G$ olsun. Eğer $g \in G$ ise $g * N * g^{-1} \subset N$ ve $g^{-1} \in G$ için

$$g^{-1} * N * g = g^{-1} * N * (g^{-1})^{-1} \subset N \text{ dir. Yani, } g^{-1} * N * g \subset N \text{ dir.}$$

$$N = g * (g^{-1} * N * g) * g^{-1} \subset g * N * g^{-1} \text{ ve}$$

$N \subset g * N * g^{-1}$ olur. Böylece $N = g * N * g^{-1}$ bulunur.

Tersine, $\forall g \in G$ için $g * N * g^{-1} = N$ ise $g * N * g^{-1} \subset N$ dir.

Böylece $\forall g \in G$ ve $\forall n \in N$ için $g * n * g^{-1} \in N$ den $(N, *) \triangleleft (G, *)$ elde edilir.

Önerme 7.1.2 $(G, *)$ grubunun bir alt grubu N olmak üzere,

$\forall g \in G$ için $g * N * g^{-1} = N$ ise, $\forall g \in G$ için $g * N = N * g$ dir.

İspat: $g * N * g^{-1} = N$ eşitliği sağdan g ile işleme konursa

$N * g = (g * N * g^{-1}) * g = g * N * g^{-1} * g = g * N * e = g * N$ elde edilir.

Önerme 7.1.3 G bir grup ve H indeksi 2 olan bir alt grup olsun. Bu alt grup, G nin bir normal alt grubudur.

İspat: H , G nin indeksi iki olan bir alt grubu olsun. $\forall a \in G$ için $aH = Ha$ olduğunu göstermeliyiz.

Eğer $a \in aH$ ise $aH = Ha = H$ olacağından $H \triangleleft G$ dir.

Eğer $a \notin aH$ ise $aH \neq Ha$ olacaktır. Ancak indeks 2 olduğundan H nin dışında bir tek koset vardır ve aH ve Ha kosetleri H ya eşit olmalıdır.

O halde iki durumda da $aH = Ha$ dır.

Önerme 7.1.4 G bir grup ve $a, b \in G$ olsun. H , G nin bir normal alt grubu ise

$ab \in H$ iken $ba \in H$ dır.

İspat: $H \triangleleft G$ ve $ab \in H$ olsun.

$$ba = babb^{-1} = b(ab)b^{-1}$$

$ab \in H$ ve $b \in G$ olduğundan H nin bir normal alt grup olması nedeniyle

$ba = babb^{-1} = b(ab)b^{-1} \in H \Rightarrow ba \in H$ olur.

Önerme 7.1.5 N , bir G grubunun sonlu ve devirli normal alt grubu ise, N nin bir K öz alt grubu G nin bir normal alt grubudur.

İspat: $K = \langle a \rangle$ grubu sonlu ve devirli olduğundan bir $a \in G$ vardır. $o(a) = n$ olsun.

Bir $g \in G$ için $(g a g^{-1})^n = g a^n g^{-1} = e$ dir.

Bir $r \in \mathbb{Z}^+$ için $(g a g^{-1})^r = e$ iken $g a^r g^{-1} = e$ olur. Buradan $a^r = e$ elde edilir.

$o(a) = n$ olduğundan $n \mid r$ dir ve böylece $o(g a g^{-1}) = n$ olur. $N \triangleleft G$ olduğundan, $g a g^{-1} \in N$ dir ve $\langle g a g^{-1} \rangle$, N nin n inci mertebeden bir alt grubudur. Buradan $\langle g a g^{-1} \rangle = K$ yazılabilir. O halde,

$\forall g \in G$ ve $\forall k \in K$ için $k = a^s$ olup $g k g^{-1} = g a^s g^{-1} = (g a g^{-1})^s = K$ dir. Yani, $K \triangleleft G$ dir.

Tanım (Merkezleyici): $(G, *)$ bir grup, $a \in G$ nin sabit bir elemanı olmak üzere a elemanının merkezleyicisi

$$M(a) = \{ g \in G \mid a * g = g * a \}$$

şeklinde tanımlanır. Yani $M(a)$ kümesi a ile değişmeli olan G deki bütün elemanların kümesidir.

Önerme 7.1.6 $(M(a), *)$, $(G, *)$ grubunun bir alt grubudur.

İspat: $a \in G$ ve $e \in G$ için $e a = a e = a$ olduğundan $M(a) \neq \emptyset$ dir.

$b, c \in M(a)$ için $b * c^{-1} \in M(a)$ olduğunu göstermeliyiz:

$$\begin{aligned} \forall a \in G \text{ için } a * (b * c^{-1}) &= (a * b) * c^{-1} \\ &= (b * a) * c^{-1} = b * (a * c^{-1}) \\ &= b * (c^{-1} * a) = (b * c^{-1}) * a \end{aligned}$$

elde edilir. Böylece $(M(a), *)$, $(G, *)$ nin bir alt grubudur.

Önerme 7.1.7 $(M(a), *)$, $(G, *)$ grubunun normal alt grubudur.

İspat: $a \in G$ ve $\forall g \in M(a)$ için $a * g = g * a$ olduğundan $a * g * a^{-1} = g$ olur. Böylece $a \in G$ ve $\forall g \in M(a)$ için $a * g * a^{-1} \in M(a)$ olur. Buradan $(M(a), *) \triangleleft (G, *)$ elde edilir.

Önerme 7.1.8 $f : (G, *) \rightarrow (H, o)$ çekirdeği $\text{Ker} f$ olan bir homomorfizma ise, $\text{Ker} f$ çekirdeği G grubunun normal bir alt grubudur.

İspat: Önce G grubunun $\text{Ker} f$ çekirdeğinin bir alt grup olduğunu gösterelim.

$a, b \in \text{Ker} f$ ise, $f(a) = e_H \in H$ ve $f(b) = e_H \in H$ olur.

f dönüşümü bir homomorfizma olduğundan,

$$f(a * b) = f(a) \circ f(b) = e_H \circ e_H = e_H$$

yazılır. Böylece, $a * b \in \text{Ker} f$ olur.

$a, b \in \text{Ker} f$ ise, $f(a) = e_H$ ve $f(b) = e_H$ olduğundan,

$$f(a * b^{-1}) = f(a) \circ f(b^{-1}) = f(a) \circ [f(b)]^{-1} = e_H \circ e_H^{-1} = e_H$$

olur. $a * b^{-1} \in \text{Ker} f$ elde edilir. Böylece, $\text{Ker} f$ kümesi G kümesinin bir alt grubu olur.

Şimdi $\text{Ker} f$ alt grubunun bir normal alt grup olduğunu gösterelim:

Herhangi $g \in G$ ve $k \in \text{Ker} f$ elemanları için $g * k * g^{-1} \in \text{Ker} f$ olduğunu göstermeliyiz.

Yani, $f(k) = e_H$ olduğunda, $f(g * k * g^{-1}) = e_H$ olduğunu göstermek yeterlidir. Bu da,

$$\begin{aligned} f(g * k * g^{-1}) &= f(g) \circ f(k) \circ f(g^{-1}) \\ &= f(g) \circ e_H \circ [f(g)]^{-1} \\ &= f(g) \circ [f(g)]^{-1} \\ &= e_H \end{aligned}$$

şeklinde yazılır. Yani, $\text{Ker} f$ kümesi bir normal alt gruptur.

Önerme 7.1.9 $f : (G, *) \rightarrow (H, \circ)$ ye bir homomorfizma olsun.

- i) f örten ise G nin her normal alt grubunun f altındaki görüntüsü H nin bir normal alt grubudur.
- ii) H nin her normal alt grubunun f altındaki ters görüntüsü G nin bir normal alt grubudur.

İspat: i) f örten ve $N \triangleleft G$ olsun. $f(N) < H$ ve $f(N) \triangleleft H$ olduğunu gösterelim:

$\forall h \in H, \forall f(a) \in f(N)$ dir. f örten olduğundan $h = f(b)$ olacak şekilde $\exists b \in G$ vardır.

$$h \circ f(a) \circ h^{-1} = f(b) \circ f(a) \circ f(b)^{-1} = f(b) \circ f(a) \circ f(b^{-1}) = f(\underbrace{b * a * b^{-1}}_{\in N}) \in f(N)$$

$$b * a * b^{-1} \in N \text{ ise } N \triangleleft G \text{ ve } h \circ f(a) \circ h^{-1} \in f(N) \text{ ise } f(N) \triangleleft H$$

elde edilir.

ii) $K \triangleleft H$ olsun. $f^{-1}(K) < G$ ve $f^{-1}(K) \triangleleft G$ olduğunu gösterelim:

$$\forall a \in G, \forall b \in f^{-1}(K) \text{ için}$$

$$f(a * b * a^{-1}) = f(a) \circ f(b) \circ f(a^{-1}) = \underbrace{f(a) \circ f(b) \circ f(a)^{-1}}_{\in K} \in K$$

$$a * b * a^{-1} \in f^{-1}(K) \text{ ve } f^{-1}(K) \triangleleft G$$

elde edilir.

Tanım (Eşlenik): G bir grup ve $H < G$ olsun. $a \in G$ olmak üzere

$$a^{-1} H a = \{ a^{-1} h a \mid h \in H \}$$

kümesine H nın G de a ' ya göre eşleniği (ya da dönüştürülmüşü) denir.

Tanım (Normalizatör): G grubunun belirli bir a elemanı ile komütatif olan bütün elemanlarından oluşan $N_a \subset G$ alt kümesinin normal kümesi (normalizatörü),

$$N_a = N_G(a) = \{ g \in G \mid a * g = g * a \}$$

olarak tanımlanır. $N_a < G$ olduğunu gösterelim:

i) $\forall g, h \in N_a$ için $g \cdot h \in N_a$ dır. $a * g = g * a$ ve $a * h = h * a$ olup, birleşme özelliği ile

$$a * (g * h) = (a * g) * h = (g * a) * h = g * (a * h) = g * (h * a) = (g * h) * a \text{ elde edilir.}$$

ii) $\forall g \in N_a$ için $g^{-1} \in N_a$ dır. Çünkü $a * g^{-1} = g^{-1} * a$ elde edilir. Böylece $N_a < G$ dır.

Önerme 7.1.10 Bir G grubunda bir a elemanının birbirinden farklı eşleniklerinin sayısı, a 'nın normalizatörünün G içindeki indeksine eşittir. $[G : N_a]$ dır.

İspat: $a \in G$ olmak üzere, N_a nın G içindeki indeksi j ve G nin N_a ya göre sol kosetlere ayrılışı

$$G = b_0 N_a + b_1 N_a + b_2 N_a + \cdots + b_{j-1} N_a \quad (b_0 = 1_G)$$

şeklinde olsun. a nın bütün $g \in G$ lerle eşleniklerini düşünelim:

$$N_a = N_G(a) = \{g \in G \mid g * a * g^{-1} = a\}$$

$g \in b_0 N_a = N_a$ ise $a.g = g.a$ ve dolayısıyla $g.a.g^{-1} = a$ dır.

$g \in b_i N_a$ ise $h \in N_a$ için $g = b_i.h$ dır. Buradan

$$g.a.g^{-1} = (b_i.h)a(h^{-1}.b_i^{-1}) = b_i(h.a.h^{-1})b_i^{-1} = b_i.a.b_i^{-1}$$

elde edilir. Yani, a nın $b_i N_a$ daki tüm elemanlarla eşlenikleri, b_i ile eşleniğine eşittir. Buna göre a nın

$$a, b_1.a.b_1^{-1}, b_2.a.b_2^{-1}, \dots, b_{j-1}.a.b_{j-1}^{-1}$$

gibi j tane eşleniği elde edilmiş olur. Bu eşlenikler birbirinden farklıdır ve sayısı normalizatörün G içindeki indeksine eşittir.

7.2 Normal Alt Grup Örnekleri

Örnek 1 H ve K bir G grubunun iki normal alt grubu ve $H \cap K = \{e\}$ ise $\forall h \in H$ ve $\forall k \in K$ için $h * k = k * h$ olduğunu gösteriniz.

Çözüm: $\forall h \in H$ ve $\forall k \in K$ için $H \triangleleft G$ olduğundan,

$$k * h^{-1} * k^{-1} \in H \Rightarrow h * (k * h^{-1} * k^{-1}) \in H$$

ve $K \triangleleft G$ olduğundan,

$$h * k * h^{-1} \in K \Rightarrow (h * k * h^{-1}) * k^{-1} \in K$$

bulunur. O halde,

$$h * k * h^{-1} * k^{-1} \in H \cap K = \{e\} \Rightarrow h * k * h^{-1} * k^{-1} = e \Rightarrow h * k = k * h$$

elde edilir.

Örnek 2 Bir G grubunun verilen mertebeden tek bir alt grubu varsa bu alt grup normal alt gruptur. Gösteriniz.

Çözüm: $\forall a \in G$ için $|aNa^{-1}| = |N|$ olacağından $aNa^{-1} = N$ olup, $N \triangleleft G$ dir.

Örnek 3 $H < G$ ve $K < G$, G nin iki alt grubu ve $K \triangleleft G$ ise $H \cap K \triangleleft H$ olduğunu gösteriniz.

Çözüm: $a \in H \cap K$ ise $a \in H, k \in K$ dır.

$a \in K, h \in H < G$ ve $K \triangleleft G$ göz önüne alınırsa $hah^{-1} \in K$

ve

$a \in H, h \in H < G$ olduğundan $hah^{-1} \in H$ olur. Böylece hah^{-1} hem H hem de K nin elemanıdır. O halde $hah^{-1} \in H \cap K$ ve $H \cap K \subset H$ olduğundan $H \cap K \triangleleft H$ elde edilir.

Örnek 4 K, G nin devirli bir normal alt grubu $K \triangleleft G$ ve $H < K$ ise $H \triangleleft G$ olduğunu gösteriniz.

Çözüm: $K = \langle a \rangle \triangleleft G$ ve $H < K$ olduğundan her devirli grubun bir alt grubu da devirli olduğundan H da devirlidir. $H = \langle a^n \rangle$

$\forall g \in G$ için $K = \langle a \rangle \triangleleft G$ olduğundan $gag^{-1} \in K$ yazabiliriz.

$a^m = gag^{-1} \in K$ dersek, $\forall (a^n)^k \in H$ için $ga^{nk}g^{-1} \in H$ olduğunu göstermeliyiz:

$ga^{nk}g^{-1} = (gag^{-1})^{nk} = (a^m)^{nk} = (a^n)^{mk} \in H$ olup, $H \triangleleft G$ elde edilir.

Bölüm 8

SONLU PERMÜTASYON GRUPLARI

Bu bölümde sonlu bir kümenin permütasyonları incelenerek, permütasyon (simetrik) grupları tanımlanacaktır. Ayrıca; Cayley Teoremi ile her grubun bir permütasyon grubunun alt grubuna izomorf olduğu gösterilecektir.

8.1 Simetrik Gruplar

Tanım (Simetrik grup): $N = \{1, 2, 3, \dots, n\}$ n-elemanlı bir kümenin kendi üzerine 1-1 bir fonksiyonuna bir n-li permütasyon denir.

N nin bütün n-li permütasyonlarının kümesi, bileşke işlemi altında bir grup oluşturur. Bu grup S_n ile gösterilir ve simetrik grup veya permütasyon grubu olarak adlandırılır. S_n kümesi sonlu olup, $n!$ tane farklı eleman içerir.

$n \geq 3$ için S_n grubu değişmeli (komütatif) grup değildir.

Herhangi bir $f \in S_n$ olmak üzere f fonksiyonu,

$$f = \{ (1, f(1)), (2, f(2)), \dots, (n, f(n)) \}$$

şeklinde belirtilebilir. Bu gösterim her ne kadar geçerli ise de genellikle iki çizgi formu diyeceğimiz matrisyel şekle benzer bir gösterim

$$f = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & n \\ f(1) & f(2) & \dots & f(n) \end{pmatrix}$$

ile gösterilir. Burada üst satırdaki elemanların sırası önemsizdir, sütunlar yer değiştirebilir.

İki permütasyonun bileşkesi komütatif değildir. Fakat iki devir ortak eleman içermiyorsa, yani ayrık devir iseler bileşkesi komütatiftir.

Örnek: $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 5 & 4 & 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} = (153) \circ (24) = (24) \circ (153)$

Tanım (k-devir): Bir f permütasyonu $j_1, j_2, \dots, j_k$ ($k > 1$), 1 ile n arasında farklı k tane doğal sayı olmak üzere

$$f(j_1) = j_2, f(j_2) = j_3, \dots, f(j_k) = j_1$$

ile tanımlı ise $f = (j_1, j_2, \dots, j_k)$ ile gösterilir ve k -devir veya k -uzunluğunda devir denir.

Örnek: $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 3 & 5 & 4 & 2 \end{pmatrix} = (2\ 3\ 5) = (3\ 5\ 2) = (5\ 2\ 3)$ 3-devir permütasyondur.

Tanım (Transpozisyon): En basit permütasyon olan 2-devirli permütasyonlara transpozisyon denir.

Önerme 8.1.1 Her devir 2-li devirlerin bir çarpımıdır.

İspat: $(i_1, i_2, \dots, i_r) = (i_1\ i_r) \dots (i_1\ i_3)(i_1\ i_2)$ yazılabildiğinden ispat elde edilir.

Tanım (Çift ve Tek Permütasyon): Bir permütasyon çift sayıda 2-linin çarpımı ise bu permütasyona çift, aksi halde tek permütasyon denir.

Tanım (İndeks): $f = (j_1 j_2 \dots j_k)$ bir permütasyon olsun. Bu permütasyon k tane ayrık devirin çarpımı

$$(j_1 j_2 \dots j_k) = (j_1 j_k)(j_1 j_{k-1}) \dots (j_1 j_3)(j_1 j_2)$$

olarak ifade edilsin. Bu devirlerin mertebeleri sırasıyla $r_1, r_2, \dots, r_k$ olsun.

$$I(f) = (r_1 - 1) + (r_2 - 1) + \dots + (r_k - 1)$$

sayısına f nin indeksi denir. $I(f)$ çift ise çift permütasyon, $I(f)$ tek ise tek permütasyon olarak adlandırılır.

Örnek: $f = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 4 & 1 & 5 & 2 \end{pmatrix} = (13)(2\ 4\ 5) = (245)(13)$ için

$$I(f) = (2-1) + (3-1) = 1+2 = 3 \text{ ve } 3 \text{ tek sayı olduğundan tek permütasyondur.}$$

Özdeş permütasyon daima sıfır indekse sahiptir ve çift permütasyon kabul edilir.

Örnek: $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 3 & 5 & 2 & 1 & 6 & 4 \end{pmatrix} = (132564) = (14)(16)(15)(12)(13)$

olup bir tek permütasyondur.

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 5 & 3 & 2 & 4 & 1 \end{pmatrix} = (15)(23)$$

olup bir çift permütasyondur.

Tanım (Mertebe): Bir permütasyonun mertebesi, ayrıldığı ayırık devirlerin uzunluklarının (mertebelerinin) en küçük ortak katına eşittir

Örnek: $f = (34)(125)$ permütasyonunun mertebesi $o(f) = \text{ekok}(2, 3) = 6$ ve $g = (34)(1235) = (12345)$ permütasyonunun mertebesi $o(g) = 5$ dir.

Örnek: $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 2 & 5 & 4 & 3 & 1 & 6 \end{pmatrix} = (125)(34)(6)$, $\text{ekok}(3, 2) = 6$ dir.

Örnek: $\alpha = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 1 & 3 & 5 & 6 & 2 & 4 \end{pmatrix}$ ve $\beta = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 2 & 3 & 6 & 5 & 4 & 1 \end{pmatrix}$

olmak üzere α^{-1} , β^{-1} , $(\alpha\beta)^{-1}$ ve $(\beta\alpha)^{-1}$ permütasyonlarını bulunuz.

Çözüm: $\alpha^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 1 & 5 & 2 & 6 & 3 & 4 \end{pmatrix}$ ve $\beta^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 6 & 1 & 2 & 5 & 4 & 3 \end{pmatrix}$

$$\alpha\beta = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 3 & 5 & 4 & 2 & 6 & 1 \end{pmatrix} = (134256)$$

$$\beta\alpha = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 2 & 6 & 4 & 1 & 3 & 5 \end{pmatrix} = (126534)$$

$$(\alpha\beta)^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 6 & 4 & 1 & 3 & 2 & 5 \end{pmatrix} = (165243)$$

$$(\beta\alpha)^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 4 & 1 & 5 & 3 & 6 & 2 \end{pmatrix} = (143562)$$

Sonuç: $(123\dots k)^{-1} = (k\ k-1\ k-2\dots 321)$ dir.

Tanım (A_n Alterne grubu): $n \geq 2$ olmak üzere S_n simetrik grubunun tüm çift permütasyonlarının kümesi $n!/2$ elemanlı bir alt gruptur ve A_n n -dereceli alterne grup olarak adlandırılır.

Önerme 8.1.2 S_n simetrik grubunun ($n \geq 2$) bütün çift permütasyonlarının kümesi A_n , S_n nin $n!/2$ elemanlı bir alt grubudur.

İspat: $I \in A_n$ olduğundan $A_n \neq \emptyset$ dir. α ve β iki çift permütasyon olmak üzere $\forall \alpha, \beta \in A_n$ için $\alpha\beta \in A_n$ dir. Aynı zamanda, $\forall \alpha^{-1} \in A_n$ olduğundan, $\alpha\alpha^{-1} \in A_n$ olur.. Böylece $A_n < S_n$ dir.

S_n simetrik grubunun tek ve çift permütasyonları aynı sayıda elemana sahiptir yani $n!/2$ tane elemana sahiptirler.

Örnek: 3 elemanın permütasyonlarından oluşan S_3 grubunun tüm permütasyonlarını ele alalım.

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} = (I), \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix} = (123), \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix} = (132)$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix} = (12), \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} = (13), \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix} = (23)$$

$S_3 = \{ (I), (123), (132), (12), (13), (23) \}$ şeklindedir. İlk gruptaki permütasyonları

$$(123) = (13)(12), \quad (132) = (12)(13)$$

şeklinde çift sayıda transpozisyonların çarpımı olarak ifade edebiliriz. O halde çift permütasyonların sayısı $6!/2 = 3$ tane olarak

$$A_3 = \{ (I), (123), (132) \}$$

şeklinde elde edilir.

Önerme 8.1.3 A_n alterne grubu S_n simetrik grubunun bir normal alt grubudur. Yani $A_n \triangleleft S_n$ dir.

İspat: $[S_n : A_n] = \frac{n!}{n!/2} = 2$ olup, indeksi 2 olan alt grup normal alt grup olacağından

$A_n \triangleleft S_n$ dir.

Önerme 8. 1.4 $\sigma \in S_n$ için,

$$\sigma(i_1, i_2, \dots, i_r) \sigma^{-1} = (\sigma(i_1) \sigma(i_2) \dots \sigma(i_r)) \text{ dir.}$$

Sonuç: İki devirin eşlenik olmaları için g.v.y.k aynı uzunlukta olmalarıdır.

Örnek: S_5 de (1234) ve (1345) eşlenik midir ?

Çözüm: $\sigma(1234) \sigma^{-1} = (\sigma(1) \sigma(2) \sigma(3) \sigma(4)) = (1345)$ olacak şekilde $\exists \sigma \in S_5$ bulunabilir

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 3 & 4 & 5 \end{pmatrix} = (2345) = (3452) = (4523) = (5234)$$

O halde eşleniktirler.

Örnek: $f = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 5 & 4 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ nin $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 4 & 1 & 5 & 2 \end{pmatrix}$ ile eşleniğini bulunuz.

Çözüm: $f = (134)(25)$ ve $\sigma = (13)(245)$ olduğuna göre,

$$\begin{aligned} \sigma f \sigma^{-1} &= \sigma(134) \sigma^{-1} = (\sigma(134) \sigma^{-1})(\sigma(25) \sigma^{-1}) \\ &= (\sigma(1) \sigma(3) \sigma(4) \sigma(2) \sigma(5)) \\ &= (315)(42) \end{aligned}$$

bulunur.

Tanım (Eşlenik sınıfı): G grubunda $\approx$ denklik bağıntısının belirttiği denklik sınıflarına eşlenik sınıfları denir. $a \in G$ nin belirttiği eşlenik sınıfı

$$C(a) = E_a = \{ g \cdot a \cdot g^{-1} \mid g \in G \}$$

ve bu sınıfın eleman sayısı da c_a yada s_i ile gösterilir. Eşlenik sınıfları $E_1, E_2, \dots, E_k$ ve bunların eleman sayıları sırasıyla $s_1, s_2, \dots, s_k$ ise

$$G = E_1 + E_2 + \dots + E_k$$

ve dolayısıyla

$$|G| = s_1 + s_2 + \dots + s_k$$

bağıntısına G grubunun sınıf denklemi adı verilir.

Tanım (Eşlenik sınıf ayrışımı): G nin eşlenik sınıflara ayrılışı

$$G = C(a_1) \cup C(a_2) \cup \dots \cup C(a_k)$$

şeklindedir.

Tanım (n nin ayrışımı): $n \in \mathbb{N}$ olsun. $n_1 \leq n_2 \leq \dots \leq n_k$ ve $n = n_1 + n_2 + \dots + n_k$ koşullarını sağlayan bir $n_1, n_2, \dots, n_k$ doğal sayılar dizisine n nin ayrışımı denir ve $p(n)$ ile gösterilir.

Önerme 8.1.5 S_n de eşlenik sınıflarının sayısı $p(n)$ dir.

Tanım (Eşlenik sınıf denklemi): G nin eşlenik sınıflara ayrılışı

$$G = C(a_1) \cup C(a_2) \cup \dots \cup C(a_k)$$

ise $o(G) = \sum_{i=1}^k (G | M(a_i))$ denkleminde G nin eşlenik sınıf denklemi denir. Burada $M(a) < G$ ve a 'nın merkezleştiricisidir.

Örnek: S_3 ün eşlenik sınıflarını ve sınıf denklemini yazınız.

Çözüm: Önce $p(3)$ ü bulalım:

$$1 = 1 \Rightarrow p(1) = 1$$

$$2 = 2, 2 = 1 + 1, 2 \Rightarrow p(2) = 2$$

$$3 = 3, 3 = 1 + 2, 3 = 1 + 1 + 1 \Rightarrow p(3) = 3$$

elde edilir.

$S_3 = \{ (1), (123), (132), (12), (13), (23) \}$ olduğundan, eşlenik sınıfları,

$$C_1 = \{ I \}$$

$$C_2 = \{ (12), (13), (23) \}$$

$$C_3 = \{(123), (132)\}$$

olup, S_3 ün sınıf denklemi de $6=1+3+2$ dır.

Örnek: S_4 ün eşlenik sınıflarını ve sınıf denklemini yazınız.

Çözüm: Önce $p(4)$ ü bulalım:

$$1 = 1 \Rightarrow p(1) = 1$$

$$2 = 2, 2 = 1 + 1, 2 \Rightarrow p(2) = 2$$

$$3 = 3, 3 = 1 + 2, 3 = 1 + 1 + 1 \Rightarrow p(3) = 3$$

$$4 = 4, 4 = 1 + 3, 4 = 1 + 1 + 2, 4 = 1 + 1 + 1 + 1, 4 = 2 + 2 \Rightarrow p(4) = 5$$

elde edilir. Eşlenik sınıfları ise,

$$C_1 = \{I\}$$

$$C_2 = \{(12), (13), (14), (23), (24), (34)\}$$

$$C_3 = \{(12)(34), (13)(24), (14)(23)\}$$

$$C_4 = \{(123), (132), (124), (142), (134), (143), (234), (243)\}$$

$$C_5 = \{(1234), (1243), (1324), (1342), (1423), (1432)\}$$

olup, aynı ayrışımı veren permütasyonlardan oluşurlar. O halde S_4 ün sınıf denklemi de

$$24=1+6+3+8+6 \text{ dır.}$$

Önerme 8.1.6 G sonlu bir grup ve $a \in G$ olsun. a nın merkezleştiricisi $M(a) = \{x \in G \mid ax = xa\}$ G nin bir alt grubudur ve $c_a = (G \mid M(a))$ dır.

Örnek: S_4 simetrik grubunda $a = (123)$ nın eşlenik sınıfını ve $M(a)$ merkezleştiricisini bulunuz.

Çözüm: S_4 de 3- uzunluğundaki tüm devirler a nın eşlenikleridir. k -lı devirlerin sayısı

$$(k-1)! \binom{n}{k} = \frac{n!}{k \cdot (n-k)!}$$

formülünden 3-lü devirlerin sayısı $c_a = (3-1)! \binom{4}{3} = \frac{4!}{3 \cdot (4-3)!} = 8$ bulunur.

$$C(a) = \{(123), (132), (124), (142), (134), (143), (234), (243)\}$$

dir. Şimdi merkezleştiricisini bulalım: $M(a) = \{ x \in S_4 \mid x a = a x \}$

$$x \in M(a) \Leftrightarrow a x = x a \Rightarrow a = x a x^{-1} = x(1) x(2) x(3)$$

$$a = (123) = (231) = (312) = x(1) x(2) x(3)$$

eşitliklerinden

$$x(1) = 1 \quad x(1) = 2 \quad x(1) = 3$$

$$x(2) = 2 \quad x(2) = 3 \quad x(2) = 1$$

$$x(3) = 3 \quad x(3) = 1 \quad x(3) = 2$$

sırasıyla $x_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} = I$, $x_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$, $x_3 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ permütasyonları elde edilir.

O halde, $M(a) = \{ I, (123), (132) \}$ bulunur. Ayrıca, $c_a = (S_4 \mid M(a)) = 8$ eşitliğide sağlanmış olur.

Örnek: $a = (123)(45)$ nın S_5 deki merkezleştiricisi bulunuz.

Çözüm: S_5 de a ile değişmeli olan elemanlar, a nın $M(a)$ merkezleştiricisini oluştururlar.

$$b \in S_5, \quad ab = ba \Leftrightarrow b a b^{-1} = a = (b(1) b(2) b(3) b(4) b(5))$$

eşitliğini sağlayan $b \in S_5$ ler,

$$\begin{array}{lll} b(1) = 1 & b(1) = 2 & b(1) = 3 \\ b(2) = 2 & b(2) = 3 & b(2) = 1 \\ b(3) = 3 & b(3) = 1 & b(3) = 2 \end{array} \quad \text{ve} \quad \begin{array}{ll} b(4) = 4 & b(4) = 5 \\ b(5) = 5 & b(5) = 4 \end{array}$$

eşitliklerinden sırasıyla,

$$\begin{aligned} b_1 &= \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \end{pmatrix}, & b_2 &= \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 2 & 3 & 5 & 4 \end{pmatrix} \\ b_3 &= \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 3 & 1 & 4 & 5 \end{pmatrix}, & b_4 &= \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 3 & 1 & 5 & 4 \end{pmatrix} \\ b_5 &= \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 1 & 2 & 4 & 5 \end{pmatrix}, & b_6 &= \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 1 & 2 & 5 & 4 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

permütasyonları bulunur. O halde, bu permütasyonları devirler olarak yazarsak,

$$M(a) = \{ I, (45), (123), (123)(45), (132), (132)(45) \}$$

elde edilir.

8.2 Simetrik Grupların Kosetler ve Normal Alt Gruplar ile ilgili örnekleri:

Örnek: $H = A_3$ ve $K = \{ (1), (12) \}$, S_3 simetrik grubunun alt grupları olsun. H ve K alt gruplarının S_3 kümesindeki sağ ve sol yan kosetlerini bulunuz.

Çözüm: H alt grubunun sağ ve sol yan kosetleri ,

Sağ Kosetler

$$\begin{aligned} H &= \{ (1), (123), (132) \} \\ H(12) &= \{ (12), (13), (23) \} \end{aligned}$$

Sol Kosetler

$$\begin{aligned} H &= \{ (1), (123), (132) \} \\ (12)H &= \{ (12), (23), (13) \} \end{aligned}$$

şeklinde. Bu halde, sağ ve sol kosetler birbirinin aynısıdır. K kümesi için,

Sağ Kosetler

$$\begin{aligned} K &= \{ (1), (12) \} \\ K(13) &= \{ (13), (132) \} \\ K(23) &= \{ (23), (123) \} \end{aligned}$$

Sol yan Kosetler

$$\begin{aligned} K &= \{ (1), (12) \} \\ (13)K &= \{ (13), (123) \} \\ (23)K &= \{ (23), (132) \} \end{aligned}$$

yazılır. Bu halde sağ ve sol kosetler aynı değildir.

Örnek: $K = \{ (1), (13) \}$, $G_8 = \{ I, (13), (24), (12)(34), (13)(24), (14)(23), (1234), (1432) \}$ karenin grubunun bir normal alt grubu mudur? K alt grubunun G_8 deki sağ ve sol kosetlerini bulunuz.

Çözüm: K alt grubunun sağ ve sol yan kosetleri ,

Sağ Kosetler

$$\begin{aligned} K &= \{ (1), (13) \} \\ K(12)(34) &= \{ (12)(34), (1234) \} \\ K(13)(24) &= \{ (13)(24), (24) \} \\ K(1432) &= \{ (1432), ((14)(23)) \} \end{aligned}$$

Sol Kosetler

$$\begin{aligned} K &= \{ (1), (13) \} \\ (12)(34)K &= \{ (12)(34), (1432) \} \\ (13)(24)K &= \{ (13)(24), (24) \} \\ (1234)K &= \{ (1234), ((14)(23)) \} \end{aligned}$$

şeklindedir. Burada sağ ve sol yan kümeler farklıdır. Aynı zamanda indeksine bakarsak $[G_8 : K] = 4$ elde ederiz. Bu bize koset sayısını verir. Dolayısıyla, K , G_8 grubunun bir normal alt grubu değildir.

Not: S_n de bir H alt grubunun normal alt grup olup olmadığını anlamak için, S_n nin H ya göre sağ ve sol kosetlerini oluşturmak yerine, H nın her permütasyonu ile birlikte S_n nin bu permütasyonlar ile aynı tipte olan bütün elemanlarını içerip içermediğine bakmak yeterlidir.

Örnek: $H = \{(1), (12)\}$, S_3 ün bir normal alt grubu değildir. Çünkü S_3 ün (12) ile aynı tipte olan (13) veya (23) elemanı, H ya ait değildir.

Örnek: $B_4 = \{I, (12)(34), (13)(24), (14)(23)\}$, S_4 ün bir normal alt grubudur. Çünkü S_4 ün $(12)(34)$ ile aynı tipte olan üç elemanı da B_4 e aittir.

Örnek: $G_8 = \{I, (13), (24), (12)(34), (13)(24), (14)(23), (1234), (1432)\}$, S_4 ün bir normal alt grubu değildir. Çünkü (13) ile aynı tipte olan (12) , G_8 e ait değildir.

Uyarı: $G_8 = \{I, (13), (24), (12)(34), (13)(24), (14)(23), (1234), (1432)\}$ in $H = \{I, (13), (24), (13)(24)\}$ alt grubu için $[G_8 : H] = 2$ olduğundan H , G_8 in normal alt grubudur. Fakat H , G_8 in $(13)(24)$ ile aynı tipte olan $(12)(34)$ elemanını içermemektedir. Bu durum bir çelişki oluşturmaz. Çünkü H nın G_8 in normal alt grubu olması

$THT^{-1} \subset H$ ($\forall T \in G_8$) olması demektir.