

Bölüm 9

BÖLÜM GRUPLARI VE DOĞAL HOMOMORFİZMA

Bu bölümde normal alt gruplar yardımıyla oluşturulan bölüm gruplarını inceleyeceğiz.

9.1 Bölüm Grupları

Tanım 1 (Bölüm grubu): G bir grup ve $H < G$ olsun. G üzerinde H alt grubuna göre elde edilen kosetlerin kümesi $G/H = \{aH \mid a \in G\}$ şeklindedir. Bu durumda G/H kümesi için H alt grubu G grubunun bir normal alt grubu olmak zorundadır.

Tanım 2 (Bölüm grubu): Eğer H , G grubunun normal alt grubu ise o zaman H nin G deki farklı kosetlerinin bir koleksiyonu kümelerin çarpımı işlemine göre

$$\begin{aligned} G/H &= \{aH \mid a \in G\} \\ . : G/H \times G/H &\rightarrow G/H \\ (aH, bH) &\rightarrow (aH)(bH) = (ab)H \end{aligned}$$

şeklinde tanımlanan bir gruptur. Bu gruba bölüm grubu denir ve G/H ile gösterilir.

Önerme 9.1.1 $(G/H, .)$ bölüm grubu bir gruptur.

İspat: i) $aH, bH \in G/H$ için $(aH) \otimes (bH) = (ab)H$ (Kapalılık öz.)

ii) $aH, bH, cH \in G/H$ için

$$\begin{aligned} (aH) [(bH)(cH)] &= (aH)[(bc)H] = [a(bc)]H = [(ab)c]H \\ &= [(ab)H](cH) = [(aH)(bH)](cH) \end{aligned} \quad (\text{Birleşme öz.})$$

iii) $eH = H \in G/H$ ve $a \in G$ için

$$(eH)(aH) = (ea)H = aH = (aH)(eH) \quad (\text{Birim eleman})$$

iv) $aH, a^{-1}H \in G/H$, $a \in G$, $a^{-1} \in G$ için

$$(aH)(a^{-1}H) = (aa^{-1})H = eH = (a^{-1}a)H = (a^{-1}H)(aH) \quad (\text{Ters eleman})$$

Burada $\otimes : (aH)^{-1} = a^{-1}H$ dır. O halde, $(G/H, \otimes)$ bir gruptur.

Önerme 9.1.2 Devirli her grubun bölüm grubu da devirlidir.

İspat: $G = \langle a \rangle$, üretici a olan devirli bir grup ve $H \triangleleft G$ olsun. aH kosetlerinin G/H bölüm grubunu ürettiğini iddia edelim. aH ifadesinin tüm kuvvetlerini hesaplamalıyız. aH kümesinin tüm kuvvetleri, G kümesindeki a elemanlarının kuvvetlerinden başka bir şey değildir ve bu elemanların tümü yine G grubundadır. Böylece, aH kosetlerinin tüm kuvvetleri, gerçekten H nin tüm kosetlerini verir ve G/H bölüm grubu devirlidir. O halde G nin H ya göre kosetleri, gerçekten $aH, a^2H, \dots, a^{\mu-1}H$ dan ibarettir. Şu halde $H, aH, a^2H, \dots, a^{\mu-1}H$ kosetleri, sırasıyla $H, aH, (aH)^2, \dots, (aH)^{\mu-1}$ 'e eşittir. Öte yandan $a^\mu \in H$ ise $(aH)^\mu = a^\mu H = H$ dır. Buna göre $G/H = \{H, aH, \dots, (aH)^{\mu-1}\}$ dır, yani G/H , aH ile üretilmiş, μ üncü mertebeden devirli bir gruptur.

Önerme 9.1.3 G , n inci mertebeden devirli bir grup ise n nin her μ pozitif bölenine karşılık, G nin μ üncü mertebeden bir tek bölüm grubu vardır.

İspat: $\mu | n$ olduğundan, uygun bir $v \in \mathbb{N}$ için $n = \mu v$ dir. (Önerme: G , n inci mertebeden bir devirli grup ise n nin her pozitif bölenine karşılık, G nin v üncü mertebeden bir tek alt grubu vardır) G nin v üncü mertebeden bir tek H alt grubu vardır. G nin bu H alt grubuna göre bölüm grubunun mertebesi, $\frac{n}{v} = \mu$ dür.

Önerme 9.1.4 G sonsuz bir devirli grup ise her m doğal sayısına karşılık, G nin m inci mertebeden bir bölüm grubu vardır.

İspat: $G = \langle a \rangle$, a tarafından üretilmiş sonsuz devirli bir grup ise, G nin $H = \langle a^m \rangle$ alt grubuna göre bölüm grubu, m inci mertebededir.

Örnek: $4\mathbb{Z} = \{4k : k \in \mathbb{Z}\} = \{0, \pm 4, \pm 8, \dots\}$ kümesi ile $\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$ bölüm grubunu bulunuz.

Çözüm: $4\mathbb{Z}$, $\mathbb{Z}$ nin normal alt grubudur. Önce bunu göstermek için $\mathbb{Z}$ deki sol kosetlerini belirleyelim:

$$\begin{aligned} 0 + 4\mathbb{Z} &= \{0 + 4k \mid k \in \mathbb{Z}\} = \{\dots, -8, -4, 0, 4, 8, \dots\} \\ 1 + 4\mathbb{Z} &= \{1 + 4k \mid k \in \mathbb{Z}\} = \{\dots, -7, -3, 1, 5, 9, \dots\} \\ 2 + 4\mathbb{Z} &= \{2 + 4k \mid k \in \mathbb{Z}\} = \{\dots, -6, -2, 2, 6, 10, \dots\} \\ 3 + 4\mathbb{Z} &= \{3 + 4k \mid k \in \mathbb{Z}\} = \{\dots, -5, -1, 3, 7, 11, \dots\} \end{aligned}$$

O halde $\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$ bölüm grubu

$$\mathbb{Z}/4\mathbb{Z} = \{0 + 4\mathbb{Z} = 4\mathbb{Z}, 1 + 4\mathbb{Z}, 2 + 4\mathbb{Z}, 3 + 4\mathbb{Z}\}$$

şeklinde elde edilir.

Örnek: $(Z_6, +)$ grubunun bir alt kümesi $N = \{0, 3\}$ olsun. Z_6 / N bölüm grubunu bulunuz.

Çözüm: $N \triangleleft Z_6$ olup, sol kosetleri $Z_6 = \{H\} \cup \{1 + H\} \cup \{2 + H\}$ şeklinde elde edilmişti. Buna göre Z_6 / N bölüm grubu

$$Z_6 / N = \{0 + N = N, 1 + N, 2 + N\}$$

olarak bulunur.

Örnek: $(C_{36}, +)$ devirli grubunun $\langle 20 \rangle$ normal alt grubunu ve bölüm grubunu bulunuz.

Çözüm: $C_{36} = \{0, 1, 2, \dots, 36\}$ ve

$$\langle 20 \rangle = \left\{ 20, \underbrace{2.20}_4, \underbrace{3.20}_{24}, \underbrace{4.20}_8, \underbrace{5.20}_{28}, \underbrace{6.20}_{12}, \underbrace{7.20}_{32}, \underbrace{8.20}_{16}, \underbrace{9.20}_0 \right\} = \{0, 4, 8, 12, 16, 20, 24, 28, 32\}$$

olmak üzere $(20, 36) = 4 \Rightarrow \langle 20 \rangle \cong C_{36/4} = C_9$ olup, indeksini hesaplırsak,

$$[C_{36} : \langle 20 \rangle] = \frac{o(C_{36})}{o(\langle 20 \rangle)} = \frac{36}{9} = 4$$

bulunur. Bölüm grubu ise

$$C_{36} / \langle 20 \rangle = \{\langle 20 \rangle, 1 + \langle 20 \rangle, 2 + \langle 20 \rangle, 3 + \langle 20 \rangle\}$$

şeklinde olup, $C_{36} / \langle 20 \rangle \cong C_4$ dır. Yani bölüm grubu 4 elemanlı C_4 grubudur.

Örnek: $(C_{24}, +)$ devirli grubunun $\langle 18 \rangle$ normal alt grubunu ve bölüm grubunu bulunuz.

$$\mathbf{Çözüm:} \quad C_{24} = \{0, 1, 2, \dots, 24\} \text{ ve } \langle 18 \rangle = \left\{ 18, \underbrace{2.18}_{12}, \underbrace{3.18}_6, \underbrace{4.18}_0 \right\} = \{0, 6, 12, 18\}$$

olmak üzere $(18, 24) = 6 \Rightarrow \langle 18 \rangle \cong C_{24/4} = C_6$ olup, indeksini hesaplırsak,

$$[C_{24} : \langle 18 \rangle] = \frac{o(C_{24})}{o(\langle 18 \rangle)} = \frac{24}{6} = 4$$

bulunur. Bölüm grubu ise

$$C_{24}/\langle 18 \rangle = \{ \langle 18 \rangle, 1+ \langle 18 \rangle, 2+ \langle 18 \rangle, 3+ \langle 18 \rangle, 4+ \langle 18 \rangle, 5+ \langle 18 \rangle \}$$

şeklinde olup, $C_{24}/\langle 18 \rangle \cong C_6$ dır. Yani bölüm grubu 6 elemanlı C_6 grubudur.

Örnek: $B_4 = \{ I, (12)(34), (13)(24), (14)(23) \}$ dikdörtgenin grubu=Klein 4 ,
 $G_8 = \{ I, (13), (24), (12)(34), (13)(24), (14)(23), (1234), (1432) \}$ grubunun bir normal alt grubu mudur? Bölüm grubunu elde ediniz.

Çözüm: Lagrange Teoremine göre ve $[G_8 : B_4] = \frac{8}{4} = 2$ indeksine sahip olduğundan

$B_4 \triangleleft G_8$ dir. Aynı zamanda bölüm grubu oluşturulabilir. Kosetler

Sağ Kosetler

Sol Kosetler

$$B_4 = \{ I, (12)(34), (13)(24), (14)(23) \}$$

$$B_4 = \{ I, (12)(34), (13)(24), (14)(23) \}$$

$$B_4(13) = \{ (13), (1432), (24), (1234) \}$$

$$(13)B_4 = \{ (13), (1234), (24), (1432) \}$$

şeklinde olup, sağ ve sol kosetler aynıdır ve indeks 2 olduğundan koset sayısı da 2 dir.

Dolayısıyla, B_4 normal alt gruptur. Bölüm grubu ise $G_8 / B_4 = \{ B_4, (13)B_4 \}$ şeklindedir.

Örnek: $S_3 = \{ I, (12), (13), (23), (123), (132) \}$ simetrik grubunun bütün alt gruplarını Lagrange teoremi yardımıyla bulunuz.

Çözüm: $S_3 = \{ I, (12), (13), (23), (123), (132) \}$ sonlu bir gruptur. Eğer $H < S_3$ alt grup ise H nın mertebesi S_3 ün mertebesini bölen sayılar olmalıdır. Yani; $o(H) = 1, 2, 3$ veya 6 olabilir.

$$o(H) = 1 \Rightarrow H_1 = \langle (1) \rangle = \{ (1) \}$$

$o(H) = 2$ için mertebesi asal olan her grup devirli olduğundan

$$o(H) = 2 \Rightarrow H_2 = \langle (12) \rangle = \{ (1), (12) \}$$

$$\Rightarrow H_3 = \langle (13) \rangle = \{ (1), (13) \}$$

$$\Rightarrow H_4 = \langle (23) \rangle = \{ (1), (23) \}$$

$o(H) = 3$ için mertebesi asal olan her grup devirli olduğundan

$$o(H) = 3 \Rightarrow H_5 = \langle (123) \rangle = \{ (1), (123), (132) \} = \langle (132) \rangle = A_3 \text{ ve}$$

$$o(H) = 6 \Rightarrow H_6 = S_3 \text{ elde edilir.}$$

9.2 Doğal (Esas) Homomorfizma

Önerme 9.2.1 Eğer $f, (G, *)$ grubundan (H, o) grubuna bir homomorfizma ise bu durumda

$$(G / \text{Ker}(f), *) \cong (H, o), \quad \bar{f}(a * \text{Ker}(f)) = f(a)$$

dır.

İspat:

$$\begin{array}{ccc} (G, *) & \xrightarrow{f} & H, o \\ \pi \downarrow & & \bar{f}(a * \text{Ker}(f)) = f(a) \\ \downarrow & & \\ (G / \text{Ker}(f), *) & & \end{array}$$

$\bar{f}$ nin bir izomorfizm olduğunu göstermeliyiz.

$$\begin{aligned} \forall a, b \in G, \bar{f}(a * \text{Ker}(f) * b * \text{Ker}(f)) &= \bar{f}((a * b) * \text{Ker}(f)) \\ &= f(a * b) \\ &= f(a) o f(b) \\ &= \bar{f}(a * \text{Ker}(f)) o \bar{f}(b * \text{Ker}(f)) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \bar{f}(a * \text{Ker}(f)) &= \bar{f}(b * \text{Ker}(f)) \Rightarrow f(a) = f(b) \\ &\Rightarrow f(a) o f(b)^{-1} = f(a * b^{-1}) = e_H \\ &\Rightarrow a * b^{-1} \in \text{Ker}(f) \\ &\Rightarrow a * b^{-1} = e_H \\ &\Rightarrow a = b \end{aligned}$$

Böylece, $a * \text{Ker}(f) = b * \text{Ker}(f) \Rightarrow \bar{f}, 1-1$ dir.

$a \in G$ olmak üzere $f(a) \in H$ olduğundan, $a * \text{Ker}(f) \in G / \text{Ker}(f)$ için

$\bar{f}(a * \text{Ker}(f)) = f(a)$ ise $\bar{f}$, örtendir.

Bölüm 10

SONLU DEĞİŞMELİ GRUPLAR

Bu bölümde İsveçli matematikçi P. L. Sylow' a atfen Sylow Teoremleri olarak adlandırılan teoremleri ele alacağız. Aynı zamanda p-gruplar ve Sylow p-alt grupları tanımlayarak, bir grubun Sylow p-alt gruplarının direkt toplamı olarak nasıl yazılacağını araştıracağız.

10.1 p-Gruplar ve Sylow Teoremleri

Tanım (p -Grup): G bir grup ve p bir asal sayı olmak üzere G nin elemanlarının herbiri p' nin bir kuvveti olan mertebeye sahipse o zaman G grubuna bir p-grup denir.

Örnek: $G_8 = \langle a \rangle$, $a = (12345678)$ permütasyonu ile üretilen bu grup bir p-grup mudur? Gösteriniz.

Çözüm: $G_8 = \langle a \rangle$, $a = (12345678)$ grubu mertebesi 8 olan bir devirli grup olduğundan, Mertebenin $1,2,4,8 \mid 8$ bölenlerine göre alt gruplar,

$$\begin{aligned} k=1 & \quad \text{için} \quad H = \langle a \rangle = \{2, 2^2, 2^3, 2^4, 2^5, 2^6, 2^7, 2^8 = e\} \\ k=2 & \quad \text{için} \quad H = \langle a^2 \rangle = \{2^2, 2^4, 2^6, 2^8 = e\} \\ k=4 & \quad \text{için} \quad H = \langle a^4 \rangle = \{2^4, 2^8 = e\} \\ k=8 & \quad \text{için} \quad H = \langle a^8 \rangle = \{2^8 = e\} \end{aligned}$$

olduğuna göre

$$\begin{aligned} o(a) &= o(a^3) = o(a^5) = o(a^7) = 8 \\ o(a^2) &= o(a^6) = 4 \\ o(a^4) &= 2 \\ o(e) &= 1 \end{aligned}$$

olup, G_8 bir 2-gruptur.

Örnek: $(Z_6, +)$ grubu bir p-grup mudur?

Çözüm: $G = Z_6 = \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$ ve $o(Z_6) = 6$ olup, 6 bir asal sayı olmayıp fakat 2 ve 3 tamsayıları 6'yı bölen asal sayılar olduğundan $p=2$ için $G_2 = \{0, 3\}$ ve $p=3$ için $G_3 = \{0, 2, 4\}$ alt gruplarına sahiptir. Çünkü

$$o(1) = o(5) = 6$$

$$o(2) = o(4) = 3$$

$$o(3) = 2$$

$$o(0) = 1$$

dır.

Tanım (Sylow p - alt grubu): G bir grup, p asal sayı ve k , $p^k \mid o(G)$ ve $p^{k+1} \nmid o(G)$ olacak şekilde pozitif bir tamsayı ise o zaman p^k mertebeye sahip olan G nin bir alt grubuna Sylow p -alt grubu denir.

Örnek: $G = Z_6 = \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$ grubunun bir 2-grubu $G_2 = \{0, 3\}$ ve bir 3-grubu $G_3 = \{0, 2, 4\}$ vardır. Aynı zamanda bu gruplar G nin Sylow 2-alt grubu ve Sylow 3-alt grubudur.

Önerme 10.1.1 (Cauchy Teoremi): G değişmeli ve sonlu bir grup olsun. $o(G) = n$ ve p asal bir sayı olmak üzere $p \mid o(G)$ ise G grubu, mertebesi p olan en az bir elemana sahiptir. Dolayısıyla G_p , bir Sylow p -alt gruptur.

Önerme 10.1.2 $i = 1, 2, \dots, r$ için p_i ler farklı asal sayılar ve α_i ler pozitif tamsayılar olmak üzere G , mertebesi $n = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \dots p_r^{\alpha_r}$ olan bir değişmeli grup olsun. O zaman G_{p_i} ler p_i asallarına karşılık gelen G grubunun Sylow p_i -alt grupları olmak üzere G grubu $G_{p_1}, G_{p_2}, \dots, G_{p_r}$ alt gruplarının direkt toplamına eşittir. Yani

$$G = G_{p_1} \oplus G_{p_2} \oplus \dots \oplus G_{p_r}$$

dir.

Örnek: $G = Z_6 = \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$ grubunun bir 2-grubu $G_2 = \{0, 3\}$ ve bir 3-grubu $G_3 = \{0, 2, 4\}$ olduğuna göre G grubu alt grupların

$$G = Z_6 = G_2 \oplus G_3$$

direkt toplamına eşittir.

Önerme 10.1.3 (Birinci Sylow Teoremi): G sonlu bir grup, p bir asal sayı ve k pozitif bir tamsayı olmak üzere

$$p^k \mid o(G) \text{ ve } p^{k+1} \nmid o(G)$$

ise G grubunun p^k mertebeden bir alt grubu vardır.

Örnek: S_3 simetrik grubunun 3 tane Sylow 2-alt grubu ve 1 tane Sylow 3-alt grubu sırasıyla

$$\{I, (12)\}, \{I, (13)\}, \{I, (23)\} \text{ Sylow 2-alt grupları}$$

ve

$$\{I, (123), (132)\} \text{ Sylow 3-alt grubudur.}$$

Örnek: Bir G grubunun mertebesi $o(G) = 2^4 \cdot 3^2 \cdot 5^3 \cdot 7$ olsun. Birinci Sylow Teoremine göre G grubu 2,4,8,16,3,9,5,25,125,7 mertebeli en az bir alt gruba sahip olmalıdır.

Sonuç: G sonlu bir grup ve p asal sayı olmak üzere eğer

$$p^k \mid o(G) \text{ ve } p^{k+1} \nmid o(G)$$

ise o zaman G grubu $0 \leq m \leq k$ olacak şekilde herhangi bir m tamsayısı için p^m mertebeden bir alt gruba sahiptir.

Tanım: G bir grup $H < G$, $K < G$ olmak üzere $H = g^{-1}Kg$ olacak şekilde bir $g \in G$ varsa o zaman H ve K alt gruplarına eşleniktir denir.

Önerme 10.1.4 (İkinci Sylow Teoremi): G sonlu bir grup, p bir asal sayı olsun. G nin Sylow p -alt gruplarının sayısı n_p ise

$$i) \quad n_p \equiv 1 \pmod{p}$$

$$ii) \quad n_p \mid o(G)$$

iii) eğer H , G nin herhangi bir Sylow p -alt grubu ve H nin normalleyeni

$$N(H) = \{g \in G \mid g^{-1}Hg = H\}$$

ise

$$[G : N(H)] = n_p$$

dir.

Tanım (Basit grup): Eğer bir grup aşikar bir grup değilse ve aşikar olmayan öz normal alt gruplara sahip değilse bu grup basit grup olarak adlandırılır.

Yani, trivial (aşikar) alt gruplarından başka hiçbir normal alt grubu bulunmayan bir gruptur.

Önerme 10.1.5 Eğer p ve q , $p < q$ olmak üzere farklı asal sayılar ise o zaman pq uncu mertebeden her G grubu bir tek q uncu mertebeden alt gruba sahiptir ve G de normaldir. Böylece G basit değildir. Eğer q modülo p ye göre 1 ' e denk değilse o zaman G abelyendir ve devirlidir.

Tanım (Maksimal normal alt grup): G bir grup ve G ye eşit olmayan bir $M < G$ normal alt grubu olsun. M yi kapsayan G nin hiç bir öz normal alt grubu yoksa, M normal alt grubuna G nin maksimal normal alt grubu denir.

Yani, M ve N , G nin iki normal alt grubu olmak üzere $M < N \leq G$ olması $N = G$ olmasını gerektiriyorsa M , G nin maksimal normal alt grubudur.

Önerme 10.1.6 G bir grup olsun. M nin G nin maksimal normal alt grubu olması için g.v.y.k G/M bölüm grubunun basit grup olmasıdır.

İspat: M , G grubunun maksimal bir normal alt grubu olsun. G/M bir basit grup değilse, yani öz normal alt gruplara sahip ise $H < G$ alt grup olmak üzere, G/M nin H/M gibi bir öz normal alt grubu olur. Bu durumda $H \neq M$ ve $H \neq G$ dir. Böylece $H < G$ olur. Bu ise M nin maksimal normal alt grup olması ile çelişir. O halde G/M basit grup olmalıdır.

Tersine, G/M nin basit grup olduğunu kabul edelim. M nin maksimal normal alt grup olduğunu gösterelim:

$H < G$ ve $M \subset H$ olsun. $H < G$ olması için g.v.y.k $H/M < G/M$ olmasıdır. sonucundan $H/M < G/M$ olacaktır. G/M basit grup olduğundan $H/M = G/M$ veya $H/M = \{M\}$ dir. Yani, $H = G$ veya $H = M$ olmalıdır. O halde M bir maksimal normal alt grup olur.

10.2 Sylow Teoremleri ile İlgili Örnekler

Örnek 1 Mertebesi asal olan her grup basit gruptur. Aynı zamanda biliyoruz ki bu grup devirli gruptur. Çünkü Lagrange Teoremine göre bu tür bir grubun aşikar alt gruplarından başka hiçbir alt grubu yoktur.

Örnek 2 Bir grubun verilen mertebeden tek bir alt grubu varsa bu alt grubun normal alt grup olduğunu gösteriniz.

Çözüm: G grubunun verilen mertebeden tek bir alt grubu H olsun.

$\forall a \in G$ için aHa^{-1} ile H grupları aynı mertebededir. Çünkü aHa^{-1} alt grubu H nın eşleniği olup, eşlenik alt grupların mertebeleri aynı olacağından $o(aHa^{-1}) = o(H)$ olur.

Böylece H tek alt grup olup, bu alt grup $aHa^{-1} = H$ normal alt grubunu verir.

Örnek 3 Mertebesi 20 olan bir grubun basit olmayacağını gösteriniz.

Çözüm: $o(G) = 20 = 2^2 \cdot 5$, G nin mertebesi asal bir sayı değildir, basit grup olamaz, fakat 20 ' nin asal bölenleri 2 ve 5 olduğundan, G nin Sylow 2-alt grupları ve Sylow 5-alt grupları mevcuttur. Bunlardan Sylow 5-alt gruplarının sayısı 2. Sylow teoremine göre 20 ' yi böler ve

$$n_5 \equiv 1 \pmod{5}$$

denkliğini sağlayan sayı sadece 1 olduğundan tekdir. O halde Sylow 5-alt grubun sayısının tek olması nedeniyle normal alt gruptur. Böylece G grubu basit grup olamaz.

Örnek 4 Mertebesi 15 olan bir grubun basit olmayacağını gösteriniz.

Çözüm: $o(G) = 15 = 3 \cdot 5$, G nin mertebesi asal bir sayı değildir, basit grup olamaz, fakat 15 ' nin asal bölenleri 3 ve 5 olduğundan, G nin Sylow 3-alt grupları ve Sylow 5-alt grupları mevcuttur. Bunların sayısı 2. Sylow teoremine göre 15 ' i böler ve

$$n_3 \equiv 1 \pmod{3} \text{ ve } n_5 \equiv 1 \pmod{5}$$

denkliklerini sağlayan sayı sadece 1 olduğundan birer tanedir. O halde Sylow 3-alt grup ve Sylow 5-alt gruplarının sayısının tek olması nedeniyle bu alt gruplar normal alt gruptur. Böylece G grubu basit grup değildir.

Örnek 5 Mertebesi 28 olan bir grubun 7 nci mertebeden bir normal alt grubunun olacağını gösteriniz. Eğer bu grubun 4 üncü mertebeden bir normal alt grubu varsa, grubun değişmeli olacağını gösteriniz.

Çözüm: $o(G) = 28 = 2^2 \cdot 7$ ve 28 ' in bölenleri 1,2,4,7,14 ve 28 dir. 2. Sylow teoremine göre Sylow 7-alt gruplarının sayısının tek olması nedeniyle bu alt grup 7 nci mertebeden ve normal alt gruptur. Bu gruba H diyelim.

Eğer 4 üncü mertebeden bir normal alt grubu varsa, bu Sylow 2-alt grubudur ve mertebesi bir asal sayının karesi olduğundan değişmelidir. Bu gruba da K diyelim.

$o(H) = 7$ ve $o(K) = 4$ ve bu alt gruplar normal alt grup olduğundan,

$$H \cap K = \{e\} \text{ ve } o(HK) = \frac{o(H) o(K)}{o(H \cap K)} = \frac{28}{1} = 28$$

olduğundan $HK = G$ elde edilir. $G \cong H \times K$ olup, H ve K değişmelidir. Dolayısıyla G değişmelidir.

Örnek 6 p ve q asal sayılar, $p < q$ olsun. $o(G) = pq$ ise, o zaman G basit olamaz. Eğer , ek olarak $q \not\equiv 1 \pmod{p}$ ise $G \cong Z_p \times Z_q$ dir ve G devirli bir gruptur.

Çözüm: pq 'nun bölenleri 1, p , q , pq ve 2. Sylow teoremine göre, Sylow p -alt grubu tek olduğundan bu grup normal alt gruptur. Bu gruba H diyelim. Aynı şekilde Sylow q -alt grubu tek olduğundan bu grup da normal alt gruptur. Buna da K diyelim. Bu durumda G grubu basit değildir. Çünkü, kendisinden ve $\{e\}$ den başka normal alt grupları var demektir.

Eğer $q \not\equiv 1 \pmod{p}$ ve $o(G) = pq$ ise,

$$H \cap K = \{e\} \text{ ve } o(HK) = \frac{o(H) o(K)}{o(H \cap K)} = \frac{pq}{1} = pq$$

ise $HK = G$ olduğundan, $G \cong H \times K$ ve $H \cong Z_p$, $K \cong Z_q$ yazılabilir. Böylece

$$G \cong H \times K \cong Z_p \times Z_q \cong Z_{pq}$$

olup, G devirlidir.