Alıştırmalar 3.1

① $c=\{c_n\}\in l^\infty$ olsun.

$T_c: l^2 \to l^2$, $T_c(\{x_n\}) = \{c_n x_n\}$ $\Rightarrow$ $T_c^* = ?$

② $T: l^2 \to l^2$

$T(x_1, x_2, x_3, x_4, \dots) = (0, 4x_1, x_2, 4x_3, x_4, \dots)$

$\Rightarrow T^* = ?$

③ H bir Hilbert uzayı ve $y, z \in H$ olsun.

Eğer $T(x) = (x, y)z$ sınırlı lineer operatör ise

$T^*(u) = (u, z)y$ olduğunu gösteriniz.

Çözümler

① $\{x_n\}, \{y_n\} \in l^2$ ve $\{z_n\} = T_c^*\{y_n\}$ olsun.

$$(\{c_n x_n\}, \{y_n\}) = (T_c\{x_n\}, \{y_n\}) = (\{x_n\}, \{z_n\})$$

$$\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} c_n x_n \overline{y_n} = \sum_{n=1}^{\infty} x_n \overline{z_n}$$

Eğer tüm $n \in \mathbb{N}$ için $\overline{z_n} = c_n \overline{y_n}$ (yada $z_n = \overline{c_n} y_n$) ise bu eşitlik tüm $\{x_n\} \in l^2$ için sağlanır.

$\overline{c} = \{\overline{c_n}\}$ alınırsa $(T_c)^* = T_{\overline{c}}$ bulunur.

← adjoint tek olduğundan

(2) $x = \{x_n\},\ y = \{y_n\} \in l^2$ ve $z = \{z_n\} = T^*(\{y_n\})$ olsun.

$$(Tx, y) = (x, z)$$

$$\Rightarrow ((0, 4x_1, x_2, 4x_3, x_4, \dots), (y_1, y_2, y_3, y_4, \dots))$$
$$= ((x_1, x_2, x_3, x_4, \dots), (z_1, z_2, z_3, z_4, \dots))$$

$$\Rightarrow 4x_1\bar{y}_2 + x_2\bar{y}_3 + 4x_3\bar{y}_4 + \dots = x_1\bar{z}_1 + x_2\bar{z}_2 + x_3\bar{z}_3 + \dots$$

$$\Rightarrow z_1 = 4y_2,\ z_2 = y_3,\ z_3 = 4y_4, \dots$$

$$\Rightarrow T^*(y) = (4y_2, y_3, 4y_4, \dots)$$

(3) $T(x, w) = ((x,y)z, w) = (x,y)(z,w) = (x,y)\overline{(w,z)}$

[redacted] $= \overline{(w,z)}(x,y)$

$= (x, (w,z)y)$

2(b) (4 points) Find A^{-1} in terms of X, D, and C $\Rightarrow$ $T^*(w) = (w,z)y$

Alıştırmalar 3.2

1. $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ matrisi normalmidir?

2. Alıştırma 3.1 de (1) ve (2) deki operatörler normal midir? (T_c normal, T normal değil)

3. T_c operatörü ~~verilsin~~.

(a) $\forall n \in \mathbb{N}$ için $c_n \in \mathbb{R}$ ise T_c kendine-eştir

(b) $\forall n \in \mathbb{N}$ için $|c_n| = 1$ ise T_c üniterdir.

4. $S, T \in B(H)$ ve S kendine-eş ise $T^* S T$ de kendine eş

5. $A \in B(H)$ tersinir ve kendine-eş ise A^{-1} de kendine-eş

(A^* da tersinirdir ve $(A^*)^{-1} = (A^{-1})^*$ dir $\Rightarrow A = A^* \Rightarrow$)

6. $S, T \in B(H)$ kendine-eş op.ler olsun.

ST kendine-eş $\Longleftrightarrow$ $ST = TS$ gösteriniz

Çözümler 3.2

(1)

$$A=\begin{bmatrix}1&1\\0&1\end{bmatrix} \Rightarrow A^*=\begin{bmatrix}1&0\\1&1\end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow AA^*=\begin{bmatrix}1&1\\0&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&0\\1&1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2&1\\1&1\end{bmatrix}$$

$$A^*A=\begin{bmatrix}1&0\\1&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&1\\0&1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&1\\1&2\end{bmatrix}$$

$\Rightarrow$ $AA^*\neq A^*A$ olup A normal değildir.

(2)

(a) $T_c : l^2 \to l^2$, $T_c(\{x_n\})=\{c_n x_n\} \Rightarrow T_c^*=T_{\bar{c}}$ (bulundu)

$(*)$ $T_c^* T_c(\{x_n\}) = T_{\bar{c}} T_c(\{x_n\}) = T_{\bar{c}}(\{c_n x_n\})$

$= \{\bar{c}_n c_n x_n\} = \{|c_n|^2 x_n\} = T_{|c|^2}\{x_n\}$ olur.

$(**)$ $T_c T_c^*(\{x_n\}) = T_c T_{\bar{c}}(\{x_n\}) = T_c(\{\bar{c}_n x_n\})$

$= \{c_n \bar{c}_n x_n\} = \{|c_n|^2 x_n\} = T_{|c|^2}\{x_n\}$ olur.

$(*)$ ve $(**)$ dan $T_c T_c^* = T_c^* T$ yani T_c normal bul

(b) $T^*T(\{x_n\}) = T^*(0, 4x_1, x_2, 4x_3, x_4, \dots) = (4x_1, x_2, 4x_3, x_4, \dots)$

$TT^*(\{x_n\}) = T(4x_2, x_3, 4x_4, x_5, \dots) = (0, 4x_2, x_3, 4x_4, \dots)$

$\Rightarrow T^*T \neq TT^*$ ve T normal değildir.

---

(3) (a) $\forall n \in \mathbb{N}$ için $c_n \in \mathbb{R}$ ise T_c kendine-eştir:

$c = \bar{c}$ olup $T_c^* = T_{\bar{c}} = T_c$ yani T_c kendine-eştir.

(b) $\forall n \in \mathbb{N}$ için $|c_n| = 1$ ise T_c üniterdir.

$$T_c T_c^* = T_{|c|^2} = I \quad \text{ve} \quad T_c^* T = T_{|c|^2} = I$$

$\Rightarrow T_c$ üniterdir.

(4) $S, T \in B(H)$ ve S kendine-eş ise

$$(T^*(ST))^* \underset{(\text{Lemma } 3.8)}{=} (ST)^* T^{**} = T^* S^* T^{**} = T^* S T$$

S kendine-eş

eşleniğin eşleniği kendisi

olup T^*ST kendine-eştir.

(5) $A \in B(H)$ tersinir ve kendine-eş olsun.

~~(b) (3 points) Find A^{-1} in terms of X, D, and X^{-1}.~~ Bu durumda, A tersinir olduğundan A^* da tersinirdir ve $(A^*)^{-1} = (A^{-1})^*$ dır (Lemma 2.14)

$A = A^*$ (kendine-eş) $\Rightarrow$ $A^{-1} = (A^{-1})^*$ olur. Yani A^{-1} kendine-eştir.

(6) $S, T \in B(H)$ kendine-eş operatörler olsun.

$(ST)^* = T^* S^* = TS$ eşitliğinden

$ST = (ST)^* \Leftrightarrow ST = TS$ (Yani S ve T değişmeli olmalı)