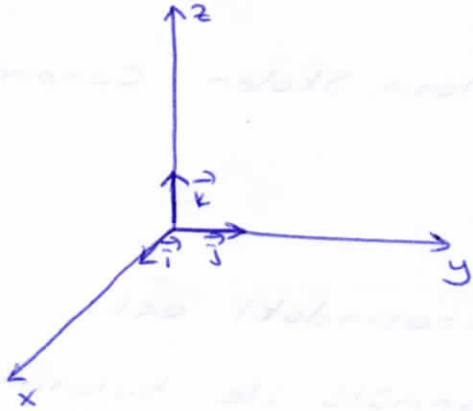


3-Boyutlu Uzayda Vektörler

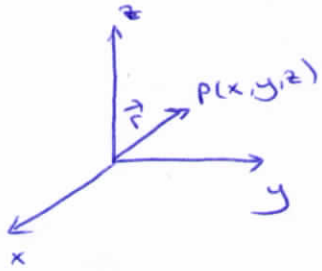
v. ①



3-boyutlu uzayda bir Kartezyen koordinat sistemi verildiğinde, sırasıyla orjinden $(1,0,0)$, $(0,1,0)$, $(0,0,1)$ noktalarına olan, oklarla temsil edilen üç standart baz vektörü $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$ olarak tanımlanır.

3-boyutlu uzaydaki herhangi bir vektör bu baz vektörlerinin bir lineer kombinasyonu olarak ifade edilebilir.

* Örneğin (x,y,z) noktasının yer vektörü:



$\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$ ile verilir. $\vec{r}$ vektörünün uzunluğu:

$$|\vec{r}| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \text{ dir.}$$

* $P_1(x_1, y_1, z_1)$ ve $P_2(x_2, y_2, z_2)$ 3-boyutlu uzayda iki nokta ise P_1 'den P_2 'ye olan $\vec{v} = \overrightarrow{P_1P_2}$ vektörü:

$$\vec{v} = \overrightarrow{P_1P_2} = \langle x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1 \rangle = (x_2 - x_1)\vec{i} + (y_2 - y_1)\vec{j} + (z_2 - z_1)\vec{k}$$

olarak tanımlanır.

* $\vec{u} = u_1\vec{i} + u_2\vec{j} + u_3\vec{k}$, $\vec{v} = v_1\vec{i} + v_2\vec{j} + v_3\vec{k}$, α : sabit

a) $\vec{u} + \vec{v} = (u_1 + v_1)\vec{i} + (u_2 + v_2)\vec{j} + (u_3 + v_3)\vec{k}$ c) $\vec{u} \parallel \vec{v} \Rightarrow \vec{u} = \alpha\vec{v}$ dir.

b) $\alpha\vec{u} = \alpha u_1\vec{i} + \alpha u_2\vec{j} + \alpha u_3\vec{k}$

Birim vektör: Uzunluğu 1 olan vektöre birim vektör denir. Her vektörün kendi doğrultu ve yönünde birim vektörü vardır. $\vec{u} = u_1\vec{i} + u_2\vec{j} + u_3\vec{k}$ için:

$\frac{\vec{u}}{|\vec{u}|} = \vec{v}$ vektörü $\vec{u}$ yönünde ve doğrultusunda olan birim vektördür.

Skaler Çarpım

(2)

$$\vec{u} = u_1\vec{i} + u_2\vec{j} + u_3\vec{k}$$

$$\text{ve } \vec{v} = v_1\vec{i} + v_2\vec{j} + v_3\vec{k}$$

vektörleri için

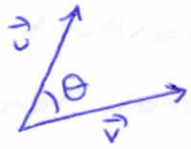
skaler çarpım:

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = u_1v_1 + u_2v_2 + u_3v_3$$

olarak tanımlanır. Skaler Çarpımın

sonucu bir sayıdır.

★ İki vektör arasındaki açı:



$\vec{u}$ ve $\vec{v}$ vektörleri arasındaki açı:

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = |\vec{u}| \cdot |\vec{v}| \cdot \cos \theta \quad \text{formülü ile bulunur.}$$

$$\star \theta = \frac{\pi}{2} \text{ ise } \vec{u} \cdot \vec{v} = 0 \text{ dir. } (\vec{u} \perp \vec{v} \text{ dir})$$

★ Skaler Çarpımın Özellikleri:

$$\textcircled{1} \vec{u} \cdot \vec{v} = \vec{v} \cdot \vec{u}$$

$$\textcircled{2} \vec{u} \cdot (\vec{v} + \vec{w}) = \vec{u} \cdot \vec{v} + \vec{u} \cdot \vec{w}$$

$$\textcircled{3} + \cdot (\vec{u} \cdot \vec{v}) = (+ \cdot \vec{u}) \cdot \vec{v} = \vec{u} \cdot (+ \cdot \vec{v})$$

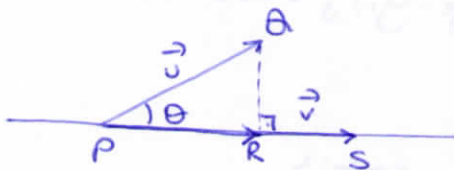
$$\textcircled{4} \vec{u} \cdot \vec{u} = |\vec{u}|^2$$

$$\textcircled{5} \vec{u} \perp \vec{v} \Leftrightarrow \vec{u} \cdot \vec{v} = 0$$

$$\textcircled{6} |\vec{u} \cdot \vec{v}| \leq |\vec{u}| \cdot |\vec{v}|$$

$$\textcircled{7} \vec{0} \cdot \vec{u} = \vec{0}$$

★ Vektör izdüşümleri



$\vec{u} = \vec{PQ}$ vektörünün, sıfırdan farklı

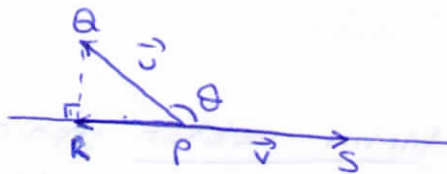
$\vec{v} = \vec{PS}$ vektörüne izdüşümü: Q'dan

PS doğru parçasına dik bir çizgi

çizilmesiyle elde edilen $\vec{PS}$ vektörü

dır. Bu vektör $\text{proj}_{\vec{v}} \vec{u}$ (u'nun v'ye

izdüşümü) ile gösterilir. $\text{proj}_{\vec{v}} \vec{u}$:



$$|\vec{u}| \cdot \cos \theta = \frac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{|\vec{v}|} \Rightarrow \vec{u} \text{ vektörünün } \vec{v} \text{ yönündeki skaler bileşeni denir.}$$

$$\text{proj}_{\vec{v}} \vec{u} = (|\vec{u}| \cdot \cos \theta) \cdot \frac{\vec{v}}{|\vec{v}|}$$

$$= \frac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{|\vec{v}|} \cdot \frac{\vec{v}}{|\vec{v}|}$$

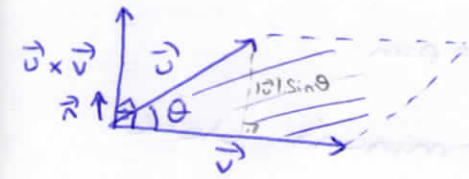
$$= \left(\frac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{|\vec{v}|^2} \right) \cdot \vec{v} \quad \text{formülü ile bulunur.}$$

Vektörel Çarpım

* Skaler çarpım $\mathbb{R}^n$ de geçerlidir; fakat vektörel çarpım sadece $\mathbb{R}^3$ de geçerlidir.

* İki vektörün skaler çarpımı sonucu bir sayı; vektörel çarpımı sonucu bir vektör oluşur.

* Vektörel çarpım $\mathbb{R}^3$ deki vektörleri çarpmanın diğer bir yoludur.



$$A = h \cdot |u| = |u| \cdot |v| \cdot \sin \theta$$

$$|u \times v| = |u| \cdot |v| \cdot \sin \theta$$

$\vec{u}$ ve $\vec{v}$ vektörleri paralel değilse bir düzlem belirlerler.

$\vec{u} \times \vec{v}$ vektörü bu düzleme ve dolayısıyla $\vec{u}$ ve $\vec{v}$ vektörlerine diktir. $|\vec{u} \times \vec{v}|$ taralı bölgenin alanına eşittir.

* $\vec{n}$, $\vec{u}$ ve $\vec{v}$ ye dik olan birim vektör olmak üzere

$$\vec{u} \times \vec{v} = (|\vec{u}| \cdot |\vec{v}| \cdot \sin \theta) \cdot \vec{n} \text{ dir. } (\theta: \vec{u} \text{ ile } \vec{v} \text{ arasındaki açısı})$$

$$\left. \begin{array}{l} \theta = 0 \\ \text{veya} \\ \theta = \pi \end{array} \right\} \Rightarrow \vec{u} \times \vec{v} = 0 \text{ dir. Yani } \vec{u} \parallel \vec{v} \text{ ise vektörel çarpımları 0'dır}$$

Vektörel Çarpımın Özellikleri:

$\vec{u}, \vec{v}$ birer vektör; r, s skaler olsun.

$$① (r\vec{u}) \times (s\vec{v}) = (rs)(\vec{u} \times \vec{v})$$

$$② \vec{u} \times \vec{v} = -(\vec{v} \times \vec{u})$$

$$③ 0 \times \vec{u} = \vec{u} \times 0 = 0$$

$$④ \vec{u} \times (\vec{v} + \vec{w}) = (\vec{u} \times \vec{v}) + (\vec{u} \times \vec{w})$$

$$⑤ (\vec{v} + \vec{w}) \times \vec{u} = \vec{v} \times \vec{u} + \vec{w} \times \vec{u}$$

$$⑥ \left. \begin{array}{l} (\vec{u} \times \vec{v}) \cdot \vec{u} = 0 \\ (\vec{u} \times \vec{v}) \cdot \vec{v} = 0 \end{array} \right\} \begin{array}{l} \vec{u} \times \vec{v} \perp \vec{u} \\ \vec{u} \times \vec{v} \perp \vec{v} \end{array}$$

⑦ $\vec{u}, \vec{v}$ ve $\vec{u} \times \vec{v}$ sağ el kuralı ile belirlenen bir üçlü oluşturur.

$$⑧ |\vec{u} \times \vec{v}| = |\vec{u}| \cdot |\vec{v}| \cdot \sin \theta$$

Vektörel Çarpım İçin Determinant Formülü

$\vec{u} = u_1\vec{i} + u_2\vec{j} + u_3\vec{k}$, $\vec{v} = v_1\vec{i} + v_2\vec{j} + v_3\vec{k}$ olsun.

$$\vec{u} \times \vec{v} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} u_2 & u_3 \\ v_2 & v_3 \end{vmatrix} \vec{i} - \begin{vmatrix} u_1 & u_3 \\ v_1 & v_3 \end{vmatrix} \vec{j} + \begin{vmatrix} u_1 & u_2 \\ v_1 & v_2 \end{vmatrix} \vec{k}$$

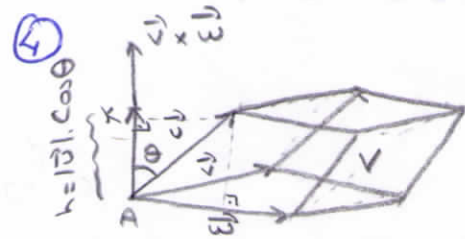
Karışık Çarpım

Herhangi $\vec{u} = \langle u_1, u_2, u_3 \rangle$, $\vec{v} = \langle v_1, v_2, v_3 \rangle$, $\vec{w} = \langle w_1, w_2, w_3 \rangle$ vektörleri için $\vec{u} \cdot (\vec{v} \times \vec{w})$ büyüklüğüne $\vec{u}$, $\vec{v}$ ve $\vec{w}$ vektörlerinin karışık çarpımı denir. Bu çarpımı:

$$\vec{u} \cdot (\vec{v} \times \vec{w}) = \begin{vmatrix} u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \\ w_1 & w_2 & w_3 \end{vmatrix} \text{ formülü determinant olarak hesaplanabilir.}$$

Özellikleri:

- ① $\vec{u} \cdot (\vec{v} \times \vec{w}) = \vec{v} \cdot (\vec{w} \times \vec{u}) = \vec{w} \cdot (\vec{u} \times \vec{v})$
- ② $\vec{u} \cdot (\vec{v} \times \vec{w}) = - \vec{u} \cdot (\vec{w} \times \vec{v})$
- ③ $\vec{u} \cdot (\vec{v} \times \vec{w}) = 0$ ise vektörler aynı düzlemindedir.



$$V = h \cdot S = \underbrace{|\vec{u}| \cos \theta}_{\text{Yükseklik}} \cdot \underbrace{|\vec{v} \times \vec{w}|}_{\text{Taban Alanı}} = |\vec{u} \cdot (\vec{v} \times \vec{w})|$$

★ $\vec{u}$, $\vec{v}$ ve $\vec{w}$ ile oluşturulmuş paralel yüzünün hacmi $|\vec{u} \cdot (\vec{v} \times \vec{w})|$ dir.

* $P(-3, 4, 1)$, $Q(-5, 2, 2)$, $R(1, 1, 1)$ noktaları verilsin.

(5)

- $\vec{PQ}$, $\vec{QR}$ vektörlerini;
- $\vec{PQ}$ vektörünün uzunluğunu;
- $\vec{PQ}$ yönündeki birim vektörü;
- $\vec{PQ}$ ve $\vec{QR}$ vektörleri arasındaki açıyı;
- $\vec{PQ}$ nun $\vec{QR}$ üzerine izdüşümünü;
- $\vec{PQ}$ ve $\vec{QR}$ ye dik olan bir vektör; bulunuz.

Cözüm

$$a) \vec{PQ} = \langle -5 - (-3), 2 - 4, 2 - 1 \rangle = \langle -2, -2, 1 \rangle = -2\vec{i} - 2\vec{j} + \vec{k}$$

$$\vec{QR} = \langle 1 - (-5), 1 - 2, 1 - 2 \rangle = \langle 6, -1, -1 \rangle = 6\vec{i} - \vec{j} - \vec{k}$$

$$b) |\vec{PQ}| = \sqrt{(-2)^2 + (-2)^2 + 1^2} = 3$$

$$c) \vec{u} = \frac{\vec{PQ}}{|\vec{PQ}|} = \frac{-2\vec{i} - 2\vec{j} + \vec{k}}{3} = \langle -\frac{2}{3}, -\frac{2}{3}, \frac{1}{3} \rangle$$

$$d) \vec{PQ} \cdot \vec{QR} = \langle -2, -2, 1 \rangle \cdot \langle 6, -1, -1 \rangle = -2 \cdot 6 + 2 \cdot 1 - 1 \cdot 1 = -12 + 2 - 1 = -11$$

$$|\vec{QR}| = \sqrt{6^2 + 1^2 + 1^2} = \sqrt{38}$$

$$\cos \theta = \frac{\vec{PQ} \cdot \vec{QR}}{|\vec{PQ}| \cdot |\vec{QR}|} = \frac{-11}{3 \cdot \sqrt{38}} \Rightarrow \theta = \arccos\left(\frac{-11}{3\sqrt{38}}\right)$$

$$e) \text{Proj}_{\vec{QR}} \vec{PQ} = \left(\frac{\vec{PQ} \cdot \vec{QR}}{|\vec{QR}|^2} \right) \vec{QR} = \frac{-11}{38} \cdot \langle 6, -1, -1 \rangle = \langle -\frac{66}{38}, \frac{11}{38}, \frac{11}{38} \rangle$$

$$f) \vec{v} = \vec{PQ} \times \vec{QR} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -2 & -2 & 1 \\ 6 & -1 & -1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -2 & 1 \\ -1 & -1 \end{vmatrix} \vec{i} - \begin{vmatrix} -2 & 1 \\ 6 & -1 \end{vmatrix} \vec{j} + \begin{vmatrix} -2 & -2 \\ 6 & -1 \end{vmatrix} \vec{k}$$

$$= 3\vec{i} + 4\vec{j} + 14\vec{k}$$

* 1. Vize buraya kadar :) Sınavlarınızda başarılar dilerim...

Sevgiler