İKİNCİ MERTEBEDEN LİNEER DENKLEMLERİN SERİ ÇÖZÜMLERİ

Birçok bilimsel problem bilinen elemanter yöntemlerle çözülememektedir. Örneğin, katsayıları bağımsız değişkene bağlı

$$P(x)y'' + Q(x)y' + R(x)y = 0$$

formunda verilen, ikinci mertebeden lineer denklemlerin çözümleri, genelde elemanter metodlarla bulunamaz. Bu tür denklemlerin bazıları, değişken dönüşümü ile sabit katsayılı denklemlere dönüştürülerek çözülmektedir. Fakat, uygun dönüşümün bulunması ve dönüşüme bağlı olarak diferansiyel denklemin çözümünü bulmak belli modeller dışında imkansız gibidir. Böyle durumlarda diferansiyel denklemin çözümleri, belli bir tanım bölgesinde yakınsak, sonsuz seriler şeklinde aranır. Yukarıdaki denkleme örnek olarak

Cauchy-Euler denklemi

$$a(x-x_0)^2y'' + b(x-x_0)y' + cy = 0, \quad a,b,c \to sbt$$

Bessel denklemi

$$x^2y'' + xy' + (x^2-\lambda^2)y = 0, \quad \lambda \to sbt$$

Legendre denklemi

$$(1-x^2)y'' - 2xy' + \lambda y = 0, \quad \lambda \to sbt$$

Airy denklemi

$$y'' - \lambda x y = 0, \quad y \to sbt$$

Hermite denklemi

$$y'' - 2xy' + 2ny = 0, \quad n \in \mathbb{Z}$$

Chebyshev denklemi

$$(1-x^2)y'' - xy' + n^2 y = 0, \quad n \in \mathbb{Z}$$

KUVVET SERİLERİ

$$a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots + a_n x^n + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$$

biçiminde sonsuz terimli bir seriye x'e göre kuvvet serisi denir.

Bu serinin daha genel biçimi olan

$$a_0 + a_1(x-x_0) + a_2(x-x_0)^2 + \dots + a_n(x-x_0)^n + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-x_0)^n$$

serisi $t = x - x_0$ dönüşümü ile x_0 noktası orjine ötelenerek ilk seri formuna getirilebilir.

Tanım: Eğer bir kuvvet serisinin, kısmi toplamlar dizisinin limiti mevcut ise kuvvet serisine x noktasında yakınsak denir. Eğer kuvvet serisi bir x noktasında yakınsak değilse ıraksaktır.

Tanım: Eğer $\sum_{n=0}^{\infty} |a_n (x-x_0)^n|$ kuvvet serisi bir x noktasında yakınsak ise $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-x_0)^n$ kuvvet serisine mutlak yakınsaktır denir.

Ör/ $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-2)^n}{n \cdot 3^n}$ kuvvet serisinin yakınsak olduğu aralığı bulunuz.

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{(x-2)^{n+1}\cdot n\cdot 3^n}{(n+1)\cdot 3^{n+1}\cdot (x-2)^n}\right|$$

$$= \left|\frac{x-2}{3}\right| < 1$$

$$\Rightarrow \quad |x-2| < 3 \Rightarrow -3 < x-2 < 3 \Rightarrow -1 \leq x < 5$$

$x=-1$ için: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}$ Alt. Harmonik seri yakınsak

$x=5$ için $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ Harmonik seri ıraksak.

Serinin yakınsaklık aralığı $-1 \leq x < 5$ 'tir. Ancak seri $-1 < x < 5$ aralığında mutlak yakınsaktır.

Tanım: $R \geq 0$ olmak üzere, eğer bir kuvvet serisi $|x-x_0| < R$ için mutlak yakınsak ve $|x-x_0| > R$ için ıraksak ise R sayısına yakınsaklık yarıçapı denir. Ayrıca, $x_0 - R < x < x_0 + R$ aralığına da yakınsaklık aralığı denir. Eğer yakınsaklık aralığı sadece $x = x_0$ noktasından oluşuyorsa R yakınsaklık yarıçapı 0 'dır. Eğer bir kuvvet serisi her x değeri için yakınsak ise R yakınsaklık yarıçapı ∞ 'dur.

Lemma

Eğer $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n$ ve $\sum_{n=0}^{\infty} b_n(x-x_0)^n$

kuvvet serileri ortak bir aralıkta yakınsak ise;

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n + \sum_{n=0}^{\infty} b_n(x-x_0)^n = \sum_{n=0}^{\infty}(a_n+b_n)(x-x_0)^n$$

ve

$$\left[\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n\right]\left[\sum_{n=0}^{\infty} b_n(x-x_0)^n\right] = \sum_{n=0}^{\infty}\left[\sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k}\right](x-x_0)^n$$

dir. Ayrıca, yakınsak bir kuvvet serisi türevlenebilir.

Lemma

Eğer $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n$ kuvvet serisi, bir açık (a,b) aralığında yakınsak ise bu aralıkta $f(x)$'in türevleri

$$f'(x) = \sum_{n=0}^{\infty} n a_n (x-x_0)^{n-1} = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n (x-x_0)^{n-1}$$

$$f''(x) = \sum_{n=0}^{\infty} n(n-1) a_n (x-x_0)^{n-2} = \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1) a_n (x-x_0)^{n-2}$$

$$\vdots$$

şeklinde bulunur.

Tanım: Eğer $f(x)$ fonksiyonu $x=x_0$ noktasında

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n \qquad (1)$$

şeklinde yazılabiliyorsa (1) serisine $f(x)$'in $x=x_0$ noktasındaki Taylor serisi denir.

Tanım: Eğer $f(x)$ fonksiyonu $|x-x_0|<R$ için (R yakınsaklık yarıçapı), $x=x_0$ noktası civarında Taylor serisine açılabiliyorsa $f(x)$ fonksiyonuna $x=x_0$ noktasında analitiktir denir.

Tanım: Eğer $\forall x$ için

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-x_0)^n = \sum_{n=0}^{\infty} b_n (x-x_0)^n \Rightarrow a_n = b_n \quad (n=0,1,2,\dots)$$

ve

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-x_0)^n = 0 \Rightarrow a_0 = a_1 = \dots = a_n = \dots = 0 \text{ dır.}$$

Ör/ $$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!\,3^n} = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{x^i}{i!\,3^i}$$

Ör/ $$\sum_{n=4}^{\infty} \frac{x^n}{n!\,3^n} = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{x^{m+4}}{(m+4)!\,3^{m+4}}$$

Ör/ $\sum_{n=3}^{\infty} \frac{(x-x_0)^{n-3}}{n!}$ kuvvet serisini, genel teriminde $(x-x_0)^{n-3}$ yerinde $(x-x_0)^n$ olacak şekilde yazınız.

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(x-x_0)^n}{(n+3)!}$$

Adi Nokta, Tekil Nokta, Düzgün Tekil Nokta ve Düzgün Olmayan Tekil Nokta Tanımları

Değişken katsayılı

$$P(x)y'' + Q(x)y' + R(x)y = 0$$

veya

$$y'' + \frac{Q(x)}{P(x)}y' + \frac{R(x)}{P(x)}y = 0 \quad (P(x) \neq 0)$$

formundaki diferansiyel denklem için adi nokta, tekil nokta ve düzgün tekil nokta kavramlarını vereceğiz. Ancak $P(x)$, $Q(x)$ ve $R(x)$ fonksiyonlarının polinom veya analitik fonksiyon olmalarına bağlı olarak bu tanımlar değişmektedir. Bu nedenle önce $P(x)$, $Q(x)$ ve $R(x)$ fonksiyonlarının polinom mu yoksa analitik fonksiyon mu oldukları tespit edilmelidir.

İlk önce $P(x)$, $Q(x)$ ve $R(x)$ fonksiyonlarının polinom ve ortak bölenlerinin olmadığı durumda tanımları verelim:

<u>TANIM:</u> Eğer bir x_0 noktası için $P(x_0) \neq 0$ ise x_0 noktasına adi nokta denir.

<u>TANIM:</u> Eğer bir x_0 noktası için $P(x_0) = 0$ ise x_0 noktasına tekil nokta denir.

<u>NOT:</u> Eğer $\frac{Q(x)}{P(x)}$ ve $\frac{R(x)}{P(x)}$ kesirlerinde ortak çarpanlar varsa bunlar sadeleştirilir ve sadeleşmiş kesirlerin paydalarını sıfır yapan noktalar tespit edilir. Bu noktalar ele alınan diferansiyel denklemin tekil noktalarıdır.

Ör/ $x^2y''+xy'+(x^2-1)y=0$ diferansiyel denkleminin tekil ve adi noktalarını belirleyiniz.

$P(x)=x^2=0 \Rightarrow x=0$ tekil nokta, $x=0$ tekil noktası dışında kalan diğer tüm noktalar, ele alınan diferansiyel denkleminin adi noktalarıdır.

Ör/ $(x^2-4)y''+2xy'+ay=0$, $a=sbt$ diferansiyel denkleminin tekil ve adi noktalarını belirleyiniz.

$P(x)=x^2-4=0 \Rightarrow x=\mp 2$ tekil noktalardır. Bunlar dışındaki tüm noktalar denklemin adi noktalarıdır.

TANIM: $P(x)$, $Q(x)$ ve $R(x)$ fonksiyonları birer polinom olmak üzere, eğer x_0 tekil noktası için

$$\lim_{x\to x_0}(x-x_0)\frac{Q(x)}{P(x)} \to \text{sonlu}$$

ve

$$\lim_{x\to x_0}(x-x_0)^2\frac{R(x)}{P(x)} \to \text{sonlu}$$

ise x_0 noktasına denklemin düzgün tekil noktası denir. Eğer denklemin bir tekil noktası düzgün tekil nokta değilse düzgün olmayan tekil nokta adını alır.

Ör/ $(1-x^2)y''+y'+2y=0$ diferansiyel denkleminin tekil noktalarını bulunuz. Bulduğunuz tekil noktaları, düzgün tekil veya düzgün olmayan tekil nokta olmalarına göre sınıflayınız.

$P(x)=1-x^2$, $Q(x)=1$, $R(x)=2$

$1-x^2=0 \Rightarrow x=\mp 1$ tekil noktalardır.

$$\lim_{x\to 1}(x-1)\cdot\frac{1}{1-x^2}=\lim_{x\to 1}\frac{-1}{1+x}=\frac{-1}{2} \text{ sonlu.}$$

$$\lim_{x\to -1} (x+1) \cdot \frac{1}{1-x^2} = \lim_{x\to -1} \frac{1}{1-x} = \frac{1}{2} \text{ sonlu.}$$

$$\lim_{x\to 1} (x-1)^2 \frac{2}{1-x^2} = \lim_{x\to 1} \frac{-2(x-1)}{x+1} = 0 \text{ sonlu.}$$

$$\lim_{x\to -1} (x+1)^2 \frac{2}{1-x^2} = \lim_{x\to -1} \frac{2(x+1)}{1-x} = 0 \text{ sonlu.}$$

olduğundan $x = \mp 1$ noktaları düzgün tekil noktalardır.

Ör/ $x^2(1-x)y'' + (1-x)y' + y = 0$ diferansiyel denkleminin tekil noktalarını bulunuz. Bulduğunuz tekil noktaları, düzgün tekil veya düzgün olmayan tekil nokta olmalarına göre sınıflayınız.

$$P(x) = x^2(1-x) \qquad Q(x) = (1-x) \qquad R(x) = 1$$

$$\frac{Q(x)}{P(x)} = \frac{\cancel{1-x}}{x^2(1-x)} = \frac{1}{x^2}, \qquad \frac{R(x)}{P(x)} = \frac{1}{x^2(1-x)}$$

$\Rightarrow$ $x=0$ ve $x=1$ tekil noktalardır.

$x=0$ için; $\lim_{x\to 0} x \cdot \frac{1}{x^2} = \lim_{x\to 0} \frac{1}{x} = \infty$

$$\lim_{x\to 0} x^2 \frac{1}{x^2(1-x)} = \lim_{x\to 0} \frac{1}{1-x} = 1 \text{ sonlu.}$$

$x=0$, Limitlerin her ikisi de sonlu olmadığından düzgün olmayan tekil noktadır.

$x=1$ için; $\lim_{x\to 1} (x-1) \frac{1}{x^2} = 0$ sonlu

$$\lim_{x\to 1} (x-1)^2 \cdot \frac{1}{x^2(1-x)} = \lim_{x\to 1} \frac{1-x}{x^2} = 0 \text{ sonlu}$$

her iki Limit de sonlu olduğundan $x=1$ düzgün tekil noktadır.

Eğer $P(x), Q(x)$ ve $R(x)$ fonksiyonları analitik ise, verilen tanım ve kavramlar da genişletilmek zorundadır.

TANIM: Eğer

$$p(x) = \frac{Q(x)}{P(x)} \quad \text{ve} \quad q(x) = \frac{R(x)}{P(x)}$$

fonksiyonları bir x_0 noktasında analitik ise, yani $p(x)$ ve $q(x)$'e karşı

$$p(x) = \sum_{n=0}^{\infty} p_n (x-x_0)^n \quad (p_i \to sbt \quad i=0,1,2,\dots,n,\dots)$$

ve

$$q(x) = \sum_{n=0}^{\infty} q_n (x-x_0)^n \quad (q_i \to sbt \quad i=0,1,2,\dots,n,\dots)$$

Taylor serileri karşı geliyorsa, x_0 noktasına denklemin adi noktasıdır denir. Aksi durumda ise bu x_0 noktasına tekil nokta denir.

TANIM: x_0 bir tekil nokta, $P(x), Q(x)$ ve $R(x)$ fonksiyonları analitik olmak üzere, eğer

$$(x-x_0)\frac{Q(x)}{P(x)} \quad \text{ve} \quad (x-x_0)^2\frac{R(x)}{P(x)}$$

her iki fonksiyon da $x=x_0$ noktasının civarında yakınsak Taylor serisine açılabiliyorsa (analitik ise) x_0 noktasına denklemin düzgün tekil noktası denir. Eğer, denklemin bir tekil noktası, düzgün tekil nokta değil ise düzgün olmayan tekil nokta adını alır.

3) $(x-\frac{\pi}{2})^2 y'' + \cos x \, y' + \sin x \, y = 0$ diferansiyel denkleminin tekil noktalarını bulunuz. Bulduğunuz tekil noktaları, düzgün tekil veya düzgün olmayan tekil nokta olmalarına göre sınıflayınız.

$$P(x) = (x-\frac{\pi}{2})^2 \quad Q(x) = \cos x \quad R(x) = \sin x$$

$Q(x)$ ve $R(x)$ yani $\cos x$ ve $\sin x$ katsayıları analitik fonksiyon olduklarından, düzgün tekil nokta tanımlarından analitik fonksiyonlar için verilen tanımı dikkate alırız.

$P(x) = (x-\frac{\pi}{2})^2 = 0 \Rightarrow x = \frac{\pi}{2}$ denklemin tekil noktasıdır.

$$(x-\frac{\pi}{2}) \frac{Q(x)}{P(x)} = (x-\frac{\pi}{2}) \cdot \frac{\cos x}{(x-\frac{\pi}{2})^2} = \frac{\cos x}{x-\frac{\pi}{2}}$$

ve

$$(x-\frac{\pi}{2})^2 \frac{R(x)}{P(x)} = (x-\frac{\pi}{2})^2 \frac{\sin x}{(x-\frac{\pi}{2})^2} = \sin x$$

fonksiyonları göz önüne alınır. Bunlardan $\frac{\cos x}{x-\frac{\pi}{2}}$ fonksiyonundaki $\cos x$'in $x = \frac{\pi}{2}$ noktası civarındaki Taylor serisi

$$\cos x = \cos(\frac{\pi}{2}) + \frac{(x-\frac{\pi}{2})}{1!}\left[-\sin(\frac{\pi}{2})\right] + \frac{(x-\frac{\pi}{2})^2}{2!}\left[-\cos(\frac{\pi}{2})\right] + \frac{(x-\frac{\pi}{2})^3}{3!}\left[\sin(\frac{\pi}{2})\right] + \cdots$$

$$\Rightarrow \cos x = -(x-\frac{\pi}{2}) + \frac{1}{3!}(x-\frac{\pi}{2})^3 - \frac{1}{5!}(x-\frac{\pi}{2})^5 + \cdots$$

bulunur.

O halde

$$\frac{\cos x}{x-\frac{\pi}{2}} = -1 + \frac{(x-\frac{\pi}{2})^2}{3!} - \frac{(x-\frac{\pi}{2})^4}{5!} + \cdots$$

olur. Bu seri ise, her x için yakınsar.

Benzer şekilde, $\sin x$ fonksiyonu da $x=\frac{\pi}{2}$ noktasının civarında

$$\sin x = 1 - \frac{(x-\frac{\pi}{2})^2}{2!} + \frac{(x-\frac{\pi}{2})^4}{4!} - \cdots$$

şeklinde Taylor serisine açılabildiğinden, yukarıdaki tekil nokta tanımlarından, analitik fonksiyonlar için verilen tanım $x=\frac{\pi}{2}$ noktasında sağlanır. Dolayısıyla, $x=\frac{\pi}{2}$ tekil noktası denklemin düzgün tekil noktasıdır.

TEOREM: Eğer $x=x_0$ noktası

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = 0 \quad \left[p(x) = \frac{Q(x)}{P(x)},\; q(x) = \frac{R(x)}{P(x)} \right]$$

diferansiyel denkleminin bir adi noktası ise bu $x=x_0$ noktasının uygun bir civarında diferansiyel denklemin

$$y = a_0 + a_1(x-x_0) + a_2(x-x_0)^2 + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-x_0)^n$$

şeklinde bir seri çözümü bulunur.

Bu seri; R yarıçapı, $x=x_0$ adi noktasına en yakın tekil noktaya olan uzaklıktan daha küçük değer alan bir yakınsaklık yarıçapı olmak üzere $0<|x-x_0|<R$ aralığında yakınsak ve yakınsaklık aralığının $|x-x_0|=R$ uç noktalarında, yakınsak ve ıraksak da olabilir. Ayrıca bu seri $|x-x_0|>R$ aralığında ıraksaktır.

ADİ NOKTA CİVARINDA SERİ ÇÖZÜMLERİ

Adi nokta civarında

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = 0$$

diferansiyel denkleminin

$$y = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n$$

şeklinde bir seri çözümünün bulunduğu teoremle verildi. Örneklerle bu çözümlerin nasıl bulunacağını verelim. Dikkat edilmesi gereken aranan çözüm serisinin sonsuz tane $a_0, a_1, \ldots, a_n, \ldots$ katsayıya bağlı olmasıdır. Bir çözüm serisinde, bu katsayılar birbirleri ile belirli bir kuralla bağlantısız olabilecekleri gibi, bazen kısmen (bir kısmı birbirleri ile, belirli kuralla bağlı) veya bütün katsayılar iki katsayıya bağlı olarak yazılabilir. Eğer bir çözüm serisinin katsayıları belli kurallarla bağlı ise bu kural veya kurallara rekürans bağıntısı denir. Rekürans bağıntısı yardımı ile, bir çözüm serisinin sonsuz tane katsayısını arama problemi bazen iki katsayının bulunması problemine kadar indirilebilir.

Ör/ $y'' + xy' + y = 0$ diferansiyel denkleminin $x=1$ noktası civarında lineer bağımsız iki çözümünü bulunuz.

$P(x) = 1$, $Q(x) = x$, $R(x) = 1$ dir. Hepsi polinomdur. $P(x)$ sabit bir fonksiyon olduğundan her nokta diferansiyel denklemin adi noktasıdır.

$x=1$'de denklemin bir adi noktasıdır. Dolayısıyla $x=1$ adi noktası civarında diferansiyel denklemin

$$y = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-1)^n \qquad a_0 \neq 0$$

formunda seri çözümü aranır. Serinin türevleri

$$y' = \sum_{n=0}^{\infty} n a_n (x-1)^{n-1}$$

$$y'' \sum_{n=0}^{\infty} n(n-1) a_n (x-1)^{n-2}$$

dir. Denklemde yerine yazarsak;

$$\sum_{n=0}^{\infty} n(n-1) a_n (x-1)^{n-2} + x\left[\sum_{n=0}^{\infty} n a_n (x-1)^{n-1}\right] + \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-1)^n = 0$$

lur. İkinci serinin önündeki x çarpanı $x = 1 + (x-1)$ şeklinde gözönüne alınırsa;

$$\sum_{n=0}^{\infty} n(n-1) a_n (x-1)^{n-2} + x\left[\sum_{n=0}^{\infty} n a_n (x-1)^{n-1}\right] + \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-1)^n = 0$$

olur.

$$\sum_{n=0}^{\infty} n(n-1) a_n (x-1)^{n-2} + \sum_{n=0}^{\infty} n a_n (x-1)^{n-1} + \sum_{n=0}^{\infty} (n+1) a_n (x-1)^n = 0$$

dır. Üç seride de, $(x-1)$'in en küçük üssüne (burada $n-2$) göre gerekli indis ötelemesi yapılırsa

$$\sum_{n=0}^{\infty} n(n-1) a_n (x-1)^{n-2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_{n-1} (n-1)(x-1)^{n-2} + \sum_{n=2}^{\infty} a_{n-2} (n-1)(x-1)^{n-2} = 0$$

veya

$$\sum_{n=2}^{\infty} \left[a_n n\cdot(n-1) + a_{n-1}(n-1) + a_{n-2}(n-1)\right](x-1)^{n-2} = 0$$

bulunur. Seri sıfıra eşit olduğundan, $(x-1)$ in kuvvetlerini içeren terimlerin katsayıları da sıfır olur. Buradan

$n=0$ için $\quad a_0 \cdot (0) \cdot (-1) = 0 \Rightarrow \quad a_0 \neq 0$

$n=1$ için $\quad a_1 (1) \cdot (0) = 0 \Rightarrow \quad a_1 \neq 0$

dır. Bu nedenle a_0 ve a_1 keyfi iki sabittir.

$n \geq 2$ için $\quad a_n (n)(n-1) + a_{n-1}(n-1) + a_{n-2}(n-1) = 0$

veya

$$a_n = -\frac{a_{n-1}}{n} - \frac{a_{n-2}}{n}$$

olur. Bu son bağıntı serinin katsayıları arasındaki bağıntıyı verir. Dolayısıyla rekürans bağıntısıdır. $n \geq 2$ için, rekürans bağıntısından a_n'ler

$$a_2 = -\frac{a_1}{2} - \frac{a_0}{2}$$

$$a_3 = -\frac{a_2}{3} - \frac{a_1}{3} = \frac{1}{3}\left(\frac{a_1}{2} + \frac{a_0}{2}\right) - \frac{a_1}{3} = \frac{a_0}{6} - \frac{a_1}{6}$$

$$a_4 = -\frac{a_3}{4} - \frac{a_2}{4} = -\frac{1}{4}\left(\frac{a_0}{6} - \frac{a_1}{6}\right) + \frac{1}{4}\left(\frac{a_1}{2} + \frac{a_0}{2}\right)$$

$$= \frac{a_0}{12} + \frac{a_1}{6}$$

$$a_5 = -\frac{a_4}{5} - \frac{a_3}{5} = -\frac{1}{5}\left(\frac{a_0}{6} - \frac{a_1}{6}\right) - \frac{1}{5}\left(\frac{a_0}{12} + \frac{a_1}{6}\right)$$

$$= -\frac{a_0}{20}$$

$$\vdots$$

şeklinde bulunur. Görüldüğü gibi, çözüm serisinin sonsuz tane a_n katsayısı, rekürans bağıntısı yardımıyla a_0 ile a_1 cinsinden yazılabilir. Diferansiyel denklemin

$$y = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-1)^n, \quad a_0 \neq 0$$

formunda seri çözümü arandığından, bu seride a_0 ve a_1 cinsinden bulunan katsayılar yerine konur. Daha sonra a_0'lı terimler bir yerde ve a_1'li terimler bir yerde toplanırsa

$$y = a_0\left[1 - \frac{(x-1)^2}{2} + \frac{(x-1)^3}{6} + \frac{(x-1)^4}{12} - \frac{(x-1)^5}{20} - \dots\right]$$

$$+ a_1\left[(x-1) - \frac{(x-1)^2}{2} + \frac{(x-1)^3}{6} + \frac{(x-1)^4}{6} - \dots\right]$$

şeklinde aranan çözüm serisi bulunur. Bu seri $|x-1| < \infty$'da yakınsaktır.

Ör/ $y'' - (x-2)y' + 2y = 0$ diferansiyel denkleminin $x=2$ noktası civarında çözümünü bulunuz.

$P(x) = 1$, $Q(x) = -(x-2)$, $R(x) = 2$ her üçü de polinom ve ortak bölenleri yok. $P(x) \neq 0$ olduğundan her x değeri denklemin adi noktasıdır. Dolayısıyla $x=2$'de denklemin bir adi noktasıdır. O halde denklemin $x=2$ adi noktası civarında

$$y = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-2)^n$$

formunda seri çözümü aranır. Türevler alınırsa

$$y' = \sum_{n=0}^{\infty} n a_n (x-2)^{n-1}$$

$$y'' = \sum_{n=0}^{\infty} n(n-1) a_n (x-2)^{n-2}$$

dir. y, y' ve y'''yü denklemde yerine yazalım:

$$\sum_{n=0}^{\infty} n(n-1) a_n (x-2)^{n-2} - (x-2)\sum_{n=0}^{\infty} n a_n (x-2)^{n-1} + 2\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-2)^n = 0$$

$$\Rightarrow \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1) a_n (x-2)^{n-2} - \sum_{n=2}^{\infty} (n-2) a_{n-2} (x-2)^{n-2} + 2 a_{n-2} (x-2)^{n-2} = 0$$

$$\Rightarrow \sum_{n=2}^{\infty} \left[n(n-1)a_n - (n-2)a_{n-2} + 2a_{n-2} \right] (x-2)^{n-2} = 0$$

lur. Bu ifade her x için geçerli olduğundan, $\forall n \geq 2$ için '$(x-2)^{n-2}$ nin katsayıları sıfır olur. Buradan

$$n(n-1)a_n - (n-2)a_{n-2} + 2a_{n-2} = 0$$

$$\Rightarrow n(n-1)a_n - (n-4)a_{n-2} = 0$$

lur. Bu son ifade düzenlenirse

$$a_n = \frac{(n-4)}{n(n-1)} a_{n-2}$$

ekürans bağıntısı elde edilir. O halde $n \geq 2$ için aranan özüm serisinin ilk birkaç teriminin katsayıları

$$a_2 = \frac{(2-4)}{2(2-1)} a_0 = -a_0$$

$$a_3 = \frac{3-4}{3(3-1)} a_1 = -\frac{1}{6} a_1$$

$$a_4 = \frac{4-4}{4(4-1)} a_2 = 0$$

$$a_5 = \frac{5-4}{5(5-1)} a_3 = \frac{1}{20} \cdot \left(-\frac{1}{6}\right) a_1 = \frac{-1}{120} a_1$$

$$a_6 = \frac{6-4}{6(6-1)} a_4 = 0$$

$$\vdots$$

bulunur.

Bu katsayıları $y=\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-2)^n$'de yerine yazılırsa

$$y = a_0 \left[1-(x-2)^2 \right] + a_1 \left[(x-2) - \frac{1}{6}(x-2)^3 - \frac{1}{120}(x-2)^5 - \dots \right]$$

şeklinde bulunur. Buradaki a_0 ve a_1 keyfi iki sabittir.

Uygulamalar

1) $y' - 2xy = 0$

$$y = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots + a_n x^n + \dots$$

$$y' = a_1 + 2a_2 x + 3a_3 x^2 + \dots + n a_n x^{n-1} + \dots = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1}$$

$$y' - 2xy = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1} - \sum_{n=0}^{\infty} 2a_n x^{n+1} \Rightarrow$$ Bu iki seriyi toplayalım. Bunun için x'in kuvvetlerini eşitleyelim.

$$y' - 2xy = 1 \cdot a_1 x^0 + \sum_{n=2}^{\infty} n a_n x^{n-1} - \sum_{n=0}^{\infty} 2a_n x^{n+1}$$

$$= a_1 + \sum_{k=1}^{\infty} \left[(k+1)a_{k+1} - 2a_{k-1}\right] x^k = 0$$

$$a_1 + \sum_{k=1}^{\infty} \left[(k+1)a_{k+1} - 2a_{k-1}\right] x^k = 0$$ elde edilir.

$a_1 = 0$ ve $(k+1)a_{k+1} - 2a_{k-1} = 0 \quad k = 1, 2, 3, \dots$

$$a_{k+1} = \frac{2a_{k-1}}{k+1} \quad (k+1 \neq 0)$$ katsayılar bağıntısı

$k=1$ için $\quad a_2 = \dfrac{2a_0}{2} = a_0$

$k=2$ için $\quad a_3 = \dfrac{2a_1}{3} = 0$

$k=3$ için $\quad a_4 = \dfrac{2a_2}{4} = \dfrac{a_0}{2} = \dfrac{1}{2!} a_0$

$k=4$ için $\quad a_5 = \dfrac{2a_3}{5} = 0$

$k=5$ için $\quad a_6 = \dfrac{2a_4}{6_3} = \dfrac{a_0}{3.2} = \dfrac{1}{3!} a_0$

$\vdots$

$$y = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$$

$$y = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + \dots$$

$$y = a_0 + a_0 x^2 + \frac{1}{2!} a_0 x^4 + \frac{1}{3!} a_0 x^6 + \dots$$

$$y = a_0 \left(1 + x^2 + \frac{1}{2!} x^4 + \frac{1}{3!} x^6 + \dots\right) \Rightarrow y = a_0 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n}}{n!} = a_0 e^{x^2}$$

$$(1-x^2)y'' - 2xy' + \ell(\ell+1)y = 0$$

ℓ mertebeden Legendre dif. denklemi

Örnek: $(x^2+4)y'' + xy = x+2$ denklemini $x=0$ yöresinde çözünüz.

$x=0$ adi noktadır.

$$y = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n + \cdots$$

$$y' = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1} = a_1 + 2a_2 x + 3a_3 x^2 + \cdots + n a_n x^{n-1} + \cdots$$

$$y'' = 2a_2 + 3.2a_3 x + 4.3a_4 x^2 + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} (n+2)(n+1) a_{n+2} x^n$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} n(n-1) a_n x^{n-2} \quad (n=2) \to n=0$$

$$(x^2+4)\sum_{n=0}^{\infty} n(n-1)a_n x^{n-2} + x\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = x+2$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} n(n-1)a_n x^n + 4\sum_{n=0}^{\infty} n(n-1)a_n x^{n-2} + \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{n+1} = x+2 \quad (x\text{'i tertesitle})$$

$n-2 \qquad n-3$

$$\sum_{n=2}^{\infty} (n-2)(n-3) a_{n-2} x^{n-2} + 4\sum_{n=0}^{\infty} n(n-1)a_n x^{n-2} + \sum_{n=3}^{\infty} a_{n-3} x^{n-2} = x+2$$

$$\sum_{n=3}^{\infty} (n-2)(n-3) a_{n-2} x^{n-2} + 8a_2 + 4\sum_{n=3}^{\infty} n(n-1)a_n x^{n-2} + \sum_{n=3}^{\infty} a_{n-3} x^{n-2} = x+2$$

$$8a_2 + \sum_{n=3}^{\infty} \left[(n-2)(n-3)a_{n-2} + 4n(n-1)a_n + a_{n-3}\right] x^{n-2} = x+2$$

$$8a_2 = 2 \to \boxed{a_2 = \frac{1}{4}}$$

$n=3$ için $(1.0\,a_1 + 4.3.2\,a_3 + a_0)x = x$

$$24a_3 + a_0 = 1 \to \boxed{a_3 = \frac{1-a_0}{24}}$$

>3 için

$$(n-2)(n-3)a_{n-2} + 4n(n-1)a_n + a_{n-3} = 0$$

$$a_n = -\frac{a_{n-3} - (n-2)(n-3)a_{n-2}}{4n(n-1)} = -\frac{a_{n-3}}{4n(n-1)} - \frac{(n-2)(n-3)a_{n-2}}{4n(n-1)}$$

$$a_4 = -\frac{a_1}{48} - \frac{a_2 = \frac{1}{4}}{24} = -\frac{1}{96} - \frac{a_1}{48}$$

$$a_5 = -\frac{a_2 = \frac{1}{4}}{80} - \frac{3a_3 = \frac{1-a_0}{24}}{40} = -\frac{1}{160} + \frac{1}{320}a_0$$

$\vdots$

$$y = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + a_4 x^4 + a_5 x^4 + \cdots$$

$$y = a_0 + a_1 x + \frac{1}{4}x^2 + \left(\frac{1}{24} - \frac{1}{24}a_0\right)x^3 + \left(-\frac{1}{96} - \frac{1}{48}a_1\right)x^4 + \left(\frac{1}{160} + \frac{1}{320}a_0\right)x^5 \cdots$$

$$y = \left(\frac{1}{4}x^2 + \frac{1}{24}x^3 - \frac{1}{96}x^4 - \frac{1}{160}x^5 - \cdots\right) + a_0\left(1 - \frac{1}{24}x^3 + \frac{1}{320}x^5 - \cdots\right) + a_1\left(x - \frac{1}{48}x^4 + \cdots\right)$$

Örnek $y'' - (x^2+6x+9)y' - 3(x+3)y = 0$ denkleminin $x=-3$ yöresinde çözümünü

$x=-3$ adi nokta $\quad y = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x+3)^n \quad x+3=t \quad t=0$ yöresi $y = \sum_{n=0}^{\infty} a_n t^n$

$x+3=t$

$$\left.\begin{aligned} \frac{dy}{dx} &= \frac{dy}{dt} \\ \frac{d^2y}{dx^2} &= \frac{d^2y}{dt^2} \end{aligned}\right\} \quad y'' - t^2 y' - 3ty = 0$$

$$y = \sum_{n=0}^{\infty} a_n t^n$$

$$y' = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n t^{n-1} \qquad y'' = \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)a_n t^{n-2}$$

$$\sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)a_n t^{n-2} - t^2\sum_{n=1}^{\infty} n a_n t^{n-1} - 3t\sum_{n=0}^{\infty} a_n t^n = 0$$

$$\sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)a_n t^{n-2} - \sum_{n=1}^{\infty} n a_n t^{n+1} - 3\sum_{n=0}^{\infty} a_n t^{n+1} = 0$$

$$2a_2 + 6a_3 t - 3a_0 t + \sum_{n=4}^{\infty} n(n-1)a_n t^{n-2} - \sum_{n=1}^{\infty} n a_n t^{n+1} - 3\sum_{n=1}^{\infty} a_n t^{n+1} = 0$$

$(n+2)$ $\qquad (n-1)$ $\qquad (n-1)$

$$y'' - xy' - y = 0$$

$a_1(x) = -x$ ⎫ $(-\infty,\infty)$ da analitiktir.
$a_2(x) = -1$ ⎭ Verilen denklem için $(-\infty,\infty)$ aralığındaki noktalar birer adi noktadır.

$x=0$ adi noktadır.

$$y = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$$

$$y' = a_1 + 2a_2 x + 3a_3 x^2 + \dots = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1}$$

$$y'' = 2a_2 + 3.2a_3 x + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} (n+2)(n+1) a_{n+2} x^n$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} (n+2)(n+1) a_{n+2} x^n - \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^n - \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = 0$$

$$2a_2 + \sum_{n=1}^{\infty} (n+2)(n+1) a_{n+2} x^n - \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^n - a_0 - \sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n = 0$$

$$2a_2 - a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \Big[(n+2)(n+1) a_{n+2} \underbrace{- n a_n - a_n}_{-(n+1)a_n}\Big] x^n = 0$$

$2a_2 - a_0 = 0$ ve $(n+2)(n+1)a_{n+2} - (n+1)a_n = 0$

$$a_2 = \frac{a_0}{2} \qquad a_{n+2} = \frac{a_n}{n+2} \quad n = 1,2,3,\dots$$

$$a_3 = \frac{a_1}{3}$$

$$a_4 = \frac{a_2}{4} = \frac{a_0}{2.4}$$

$$a_5 = \frac{a_3}{5} = \frac{a_1}{3.5}$$

$$a_6 = \frac{a_4}{6} = \frac{a_0}{2.4.6}$$

$$a_7 = \frac{a_5}{7} = \frac{a_1}{3.5.7}$$

$$a_{2n} = \frac{1}{2^n n!} a_0$$

$$a_{2n+1} = \frac{2^n n!}{(2n+1)!} a_1$$

$$y = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + \dots$$

$$y = a_0\left(1 + \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{2.4} + \dots + \frac{x^{2n}}{2^n n!} + \dots\right) + a_1\left(x + \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{3.5} + \dots + \frac{x^{2n+1} 2^n n!}{(2n+1)!} + \dots\right)$$

Laplace Dönüşümleri

$\left[\int_\alpha^\beta K(s,t)\, f(t)\, dt \text{ bir int. dön.}\right]$

Tanım: $K(s,t) = \begin{cases} 0 & ; t<0 \\ e^{-st} & t \geq 0 \end{cases}$ şeklindeki fonk. olmak üzere

$$\int_0^\infty e^{-st} f(t)\, dt = F(s) = L\{f(t)\} \quad (s>0)$$

$f(t)$
$0 \leq t \leq R$
parçalı sürekli
k, a, M özel
$t \geq M$, $|f(t)| \leq k e^{at}$

şeklindeki ifadeye $f(t)$ fonksiyonunun Laplace dönüşümü denir.

Bazı elemanter fonk. Laplace dönüşümlerini verelim:

1) $f(t) = c$ (sabit)

$$L\{c\} = \int_0^\infty c\, e^{-st} dt = c\int_0^\infty e^{-st} dt = c.\lim_{A\to\infty} \int_0^A e^{-st} dt = c.\lim_{A\to\infty} \frac{-1}{s}\left(e^{-st}\right)\Big|_0^A$$

$$= \frac{-c}{s} \lim_{A\to\infty}\left(\underbrace{e^{-sA}}_{0} - \underbrace{e^{0}}_{1}\right) = \frac{c}{s}$$

$$\boxed{L\{c\} = \frac{c}{s}}$$

2) $f(t) = t$ $(s>0)$

$$L\{t\} = \int_0^\infty t e^{-st} dt = \lim_{A\to\infty} \int_0^A t e^{-st} = -\lim_{A\to\infty}\left(\frac{t}{s}e^{-st} + \frac{1}{s^2}e^{-st}\right)\Big|_0^A$$

$$\int t e^{-st} dt = \frac{-t}{s}e^{-st} + \frac{1}{s}\int e^{-st} dt = \frac{-t}{s}e^{-st} - \frac{1}{s^2}e^{-st}$$

$t = u \quad e^{-st}dt = dv$
$dt = du \quad -\frac{1}{s}e^{-st}$

$$= -\lim_{A\to\infty}\left(\underbrace{\frac{A}{s}e^{-As}}_{0} + \underbrace{\frac{1}{s^2}e^{-As}}_{0} - \left(0 + \frac{1}{s^2}\right)\right) = \frac{1}{s^2}$$

$$L\{t\} = \frac{1}{s^2}$$

$$L\{t^2\} = \int_0^\infty t^2 e^{-st} dt = \frac{1.2}{s^3}$$

$$L\{t^3\} = \int_0^\infty t^3 e^{-st} dt = \frac{1.2.3}{s^4}$$

$\vdots$

$$\boxed{L\{t^n\} = \frac{n!}{s^{n+1}}}$$

3) $f(t) = e^{at}$ $(s>a)$

$$L\{e^{at}\} = \int_0^{\infty} e^{at} e^{-st} dt = \int_0^{\infty} e^{(a-s)t} dt = \lim_{A\to\infty} \int_0^{A} e^{-(s-a)t} dt$$

$$= \lim_{A\to\infty} \left[\frac{-1}{s-a} e^{-(s-a)t} \right]_0^A = \lim_{A\to\infty} \left[-\frac{1}{s-a} \left(\underbrace{e^{-(s-a)A}}_{0} - \underbrace{e^{0}}_{1} \right) \right] = \frac{1}{s-a}$$

$$\boxed{L\{e^{at}\} = \frac{1}{s-a}}$$

4) $f(t) = \sin at$ $(s>0)$

$L\{\sin at\} = \int_0^{\infty} e^{-st} \sin at\, dt = F(s)$ (2 kere kısmi integrasyon ile...)

$$\boxed{L\{\sin at\} = \frac{a}{s^2+a^2}}$$

5) $f(t) = \cos at$ $(s>0)$ $L\{\cos at\} = \int_0^{\infty} e^{-st} \cos at\, dt = F(s)$

$$\boxed{L\{\cos at\} = \frac{s}{s^2+a^2}}$$

6) $f(t) = \sinh at$ $(s>0)$

$$L\{\sinh at\} = \int_0^{\infty} e^{-st} \sinh at\, dt = \int_0^{\infty} e^{-st} \left(\frac{e^{at} - e^{-at}}{2} \right) dt = \frac{a}{s^2-a^2}$$

$$\boxed{L\{\sinh at\} = \frac{a}{s^2-a^2}}$$

7) $f(t) = \cosh at$ $(s>0)$

$$L\{\cosh at\} = \int_0^{\infty} e^{-st} \cosh at\, dt = \frac{s}{s^2-a^2}$$

$$\boxed{L\{\cosh at\} = \frac{s}{s^2-a^2}}$$

Laplace Dönüşümünün Temel Özellikleri

1) Lineerlik özelliği: $c_1, c_2,$ sabitler olmak üzere

$$L\{c_1 f_1(t) + c_2 f_2(t) + \dots\} = c_1 L\{f_1(t)\} + c_2 L\{f_2(t)\} + \dots$$

örnek $L\{3t^2 - 4\sin 3t - 7e^{-2t}\}$

$$= 3L\{t^2\} - 4L\{\sin 3t\} - 7L\{e^{-2t}\} = 3\frac{2}{s^3} - 4\frac{3}{s^2+9} - 7\frac{1}{s+2}$$

$$= \frac{6}{s^3} + \frac{12}{s^2+9} - \frac{7}{s+2}$$

2) $\boxed{\text{Kaydırma Özelliği}}$

$L\{f(t)\} = F(s)$ ise $\boxed{L\{e^{at} f(t)\} = F(s-a)}$

örnek $L\{e^{-t}\cos 2t\} = ?$

$L\{\cos 2t\} = \dfrac{s}{s^2+4}$ $\quad L\{e^{-t}\cos 2t\} = \dfrac{s+1}{(s+1)^2+4}$

3) $\boxed{\text{Türevin Laplace Dönüşümü}}$

$L\{f(t)\} = F(s)$ olsun. $\quad e^{-st} = u \quad f'(t)dt = dv$

$\quad -se^{-st}dt = du \quad f(t) = v$

$$L\{f'(t)\} = \int_0^\infty e^{-st} f'(t)\,dt$$

$$= \lim_{A\to\infty} \int_0^A e^{-st} f'(t)\,dt = \lim_{A\to\infty}\left[e^{-st} f(t)\Big|_0^A + s\int_0^A e^{-st} f(t)\,dt \right]$$

$$= \lim_{A\to\infty}\left(\underbrace{e^{-sA} f(A)}_{(s>0\ \ e^{-sA}\to 0)} - f(0)\right) + s\underbrace{\int_0^\infty e^{-st} f(t)\,dt}_{F(s)}$$

$$L\{f'(t)\} = sF(s) - f(0)$$

$$L\{f''(t)\} = s^2F(s) - sf(0) - f'(0)$$

$$\vdots$$

$$L\{f^{(n)}(t)\} = s^nF(s) - s^{n-1}f(0) - s^{n-2}f'(0) - \dots - sf^{(n-2)}(0) - f^{(n-1)}(0)$$

örnek $f(t) = \cos 3t$

$$L\{f'(t)\} = sF(s) - f(0) = s\frac{s}{s^2+9} - 1 = \frac{s^2}{s^2+9} - 1 = \frac{-9}{s^2+9}$$

$$L\{-3\sin 3t\} = -3\frac{3}{s^2+9} = \frac{-9}{s^2+9}$$

) t^n ile çarpma

$$L\{f(t)\} = F(s) \quad \text{ise} \quad L\{t^n f(t)\} = (-1)^n \frac{d^n}{ds^n} F(s)$$

Örnek: $L\{t^2 e^{2t}\} = ?$

$$L\{e^{2t}\} = \frac{1}{s-2} = F(s) \qquad L\{t^2 e^{2t}\} = (-1)^2 \frac{d^2}{ds^2}\left(\frac{1}{s-2}\right) = \frac{2}{(s-2)^3}$$

$$\frac{d}{ds}\left(\frac{1}{s-2}\right) = \frac{-1}{(s-2)^2}$$

$$\frac{d^2}{ds^2}\left(\frac{1}{s-2}\right) = \frac{2}{(s-2)^3}$$

Ters Laplace Dönüşümü

$L\{f(t)\} = F(s)$ ise $f(t)$ ye $F(s)$ nin ters Laplace dönüşümü denir.

$$L^{-1}\{F(s)\} = f(t)$$

Ters Laplace Dönüşüm Bağıntıları:

(1) $F(s) = \frac{1}{s} \rightarrow L^{-1}\{F(s)\} = f(t) = 1$

$F(s) = \frac{1}{s^2} \rightarrow L^{-1}\{F(s)\} = f(t) = t$

$F(s) = \frac{1}{s^3} \rightarrow L^{-1}\{F(s)\} = f(t) = \frac{t^2}{2!}$

$\vdots$

$F(s) = \frac{1}{s^{n+1}} \rightarrow L^{-1}\{F(s)\} = f(t) = \frac{t^n}{n!}$

(2) $F(s) = \frac{1}{s-a}$ ise $L^{-1}\{F(s)\} = f(t) = e^{at}$

$F(s) = \frac{1}{(s-a)^2}$ ise $L^{-1}\{F(s)\} = f(t) = te^{at}$

$F(s) = \frac{1}{(s-a)^3}$ ise $L^{-1}\{F(s)\} = f(t) = \frac{t^2}{2!}e^{at}$

$\vdots$

$F(s) = \frac{1}{(s-a)^{n+1}}$ ise $L^{-1}\{F(s)\} = f(t) = \frac{t^n}{n!}e^{at}$

(3) $F(s) = \frac{1}{s^2+a^2}$ ise $L^{-1}\{F(s)\} = \frac{\sin at}{a}$

(4) $F(s) = \frac{s}{s^2+a^2}$ ise $L^{-1}\{F(s)\} = \cos at$

(5) $F(s) = \frac{1}{s^2-a^2}$ ise $L^{-1}\{F(s)\} = \frac{\sinh at}{a}$

(6) $F(s) = \frac{s}{s^2-a^2}$ ise $L^{-1}\{F(s)\} = \cosh at$

Ters Laplace Dönüşümünün Özellikleri

1) **Lineerlik** $c_1, c_2, \dots$ sabitler olmak üzere

$$L^{-1}\{c_1F_1(s)+c_2F_2(s)+\dots\} = c_1L^{-1}\{F_1(s)\}+c_2L^{-1}\{F_2(s)\}+\dots$$

örnek $L^{-1}\left\{\frac{4}{s-2}-\frac{3s}{s^2+16}+\frac{5}{s^2+4}\right\}$

$$= 4L^{-1}\left\{\frac{1}{s-2}\right\} - 3L^{-1}\left\{\frac{s}{s^2+16}\right\} + 5L^{-1}\left\{\frac{1}{s^2+4}\right\}$$

$$= 4e^{2t} - 3\cos 4t + 5\frac{\sin 2t}{2}$$

2) **Kaydırma Özelliği**

$L^{-1}\{F(s)\} = f(t)$ ise $L^{-1}\{F(s-a)\} = e^{+at}f(t)$

örnek $L^{-1}\left\{\frac{1}{s^2-2s+5}\right\} = L^{-1}\left\{\frac{1}{s^2-2s+1+4}\right\} = L^{-1}\left\{\frac{1}{(s-1)^2+4}\right\}$

$$= L^{-1}\left\{\frac{1}{(s-1)^2+2^2}\right\} = e^{+t}\frac{\sin 2t}{2}$$

Genel Alıştırmalar

1) $L\{t^3e^{-3t}\} = ?$ $\qquad L\{t^3e^{-3t}\} = (-1)^3\frac{d^3}{ds^3}\left(\frac{1}{s+3}\right) = \frac{6}{(s+3)^4}$

$$L\{e^{-3t}\} = \frac{1}{s+3}$$

$$\frac{d}{ds}\left(\frac{1}{s+3}\right) = \frac{-1}{(s+3)^2}; \quad \frac{d^2}{ds^2}\left(\frac{1}{s+3}\right) = \frac{2}{(s+3)^3}; \quad \frac{d^3}{ds^3}\left(\frac{1}{s+3}\right) = \frac{-6}{(s+3)^4}$$

veya

$$L\{t^3\} = \frac{3!}{s^4} = \frac{6}{s^4} \longrightarrow L\{e^{-3t}t^3\} = \frac{6}{(s+3)^4}$$

2) $L\{(t+2)^2e^t\} = L\{(t^2+4t+4)e^t\} = L\{t^2e^t+4te^t+4e^t\}$

$$= L\{t^2e^t\}+4L\{te^t\}+4L\{e^t\}$$

$$= \frac{2}{(s-1)^3} + 4\frac{1}{(s-1)^2} + 4\frac{1}{s-1}$$

3) $L\{(t^2-1)^2\sinh 3t\} = L\left\{(t^4-2t^2+1)\left(\frac{e^{3t}-e^{-3t}}{2}\right)\right\}$

$$= \frac{1}{2}L\{(t^4-2t^2+1)e^{3t} - (t^4-2t^2+1)e^{-3t}\}$$

$$= \frac{1}{2}\left[\frac{24}{(s-3)^5} - 2\frac{2}{(s-3)^3} + \frac{1}{s-3} - \frac{24}{(s+3)^5} + 2\frac{2}{(s+3)^3} - \frac{1}{s+3}\right]$$

4) $\mathcal{L}\{e^t\cos^2 t\} = \mathcal{L}\{e^t \frac{1+\cos 2t}{2}\} = \frac{1}{2}\mathcal{L}\{e^t(1+\cos 2t)\}$

$= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{s-1} + \frac{s-1}{(s-1)^2+4}\right)$

5) $f(t) = t\cos 2t$

$\mathcal{L}\{f''(t)\} = s^2F(s) - sf(0) - f'(0)$

$\mathcal{L}\{t\cos 2t\} = (-1)\frac{d}{ds}\left(\frac{s}{s^2+4}\right) = (-1)\left(\frac{s^2+4-2s^2}{(s^2+4)^2}\right) = \frac{s^2-4}{(s^2+4)^2}$

$f(0) = 0$

$f'(t) = \cos 2t - 2t\sin 2t \longrightarrow f'(0) = 1$

$\mathcal{L}\{f''(t)\} = s^2\frac{s^2-4}{(s^2+4)^2} - 1$

6) $F(s) = \frac{3}{s+4} \rightarrow \mathcal{L}^{-1}\{\frac{3}{s+4}\} = 3\mathcal{L}^{-1}\{\frac{1}{s+4}\} = 3e^{-4t}$

7) $F(s) = \frac{1}{2s-5} \rightarrow \mathcal{L}^{-1}\{\frac{1}{2s-5}\} = \mathcal{L}^{-1}\{\frac{1}{2(s-\frac{5}{2})}\} = \frac{1}{2}e^{\frac{5}{2}t}$

8) $F(s) = \frac{8s}{s^2+16} \rightarrow \mathcal{L}^{-1}\{\frac{8s}{s^2+16}\} = 8\cos 4t$

9) $F(s) = \frac{6}{s^2-9} \rightarrow \mathcal{L}^{-1}\{\frac{6}{s^2-9}\} = 6\frac{\sinh 3t}{3} = 2\sinh 3t$

10). $F(s) = \frac{1}{s^{10}} \rightarrow \mathcal{L}^{-1}\{\frac{1}{s^{10}}\} = \frac{t^9}{9!}$

11) $F(s) = \frac{2s+1}{s^2+s} \rightarrow \mathcal{L}^{-1}\{\frac{2s+1}{s(s+1)}\} = \mathcal{L}^{-1}\{\frac{2\cancel{s}}{\cancel{s}(s+1)} + \frac{1}{s^2+s}\}$

$= \mathcal{L}^{-1}\{\frac{2}{s+1}\} + \mathcal{L}^{-1}\{\frac{1}{s^2+s}\} = 2\mathcal{L}^{-1}\{\frac{1}{s+1}\} + \mathcal{L}^{-1}\{\frac{1}{(s+\frac{1}{2})^2-\frac{1}{4}}\}$

$= 2e^{-t} + e^{-\frac{t}{2}}\frac{\sinh\frac{t}{2}}{\frac{1}{2}}$

12) $\mathcal{L}^{-1}\{\frac{6s-4}{s^2-4s+20}\} = \mathcal{L}^{-1}\{\frac{6s-4}{(s-2)^2+16}\} = \mathcal{L}^{-1}\{\frac{6s}{(s-2)^2+16}\} - \mathcal{L}^{-1}\{\frac{4}{(s-2)^2+16}\}$

$= 6\mathcal{L}^{-1}\{\frac{s-2+2}{(s-2)^2+16}\} - 4\mathcal{L}^{-1}\{\frac{1}{(s-2)^2+16}\} = 6\mathcal{L}^{-1}\{\frac{s-2}{(s-2)^2+16}\} + 12\mathcal{L}^{-1}\{\frac{1}{(s-2)^2+16}\} - 4\mathcal{L}^{-1}\{\frac{1}{(s-2)^2+16}\}$

$= 6e^{2t}\cos 4t + 8e^{2t}\sin 2t$

13) $\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{4s+12}{s^2+8s+16}\right\} = 4\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{s+3}{(s+4)^2}\right\} = 4\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{s+4}{(s+4)^2}\right\} - 4\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{(s+4)^2}\right\}$

$= 4e^{-4t} - 4e^{-4t}\,t$

Sabit Katsayılı Lineer Dif. Denklemlerin Laplace Dönüşümü ile Çözümü

$$a_0 y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + a_2 y^{(n-2)} + \dots + a_{n-1} y' + a_n y = Q(t) \qquad y = y(t)$$

$$y(0) = y_0,\ y'(0) = y_1,\ y''(0) = y_2,\ \dots,\ y^{(n-1)}(0) = y_{n-1} \quad (y_i \in \mathbb{R})$$

Verilen dif. denklemin her teriminin Laplace dönüşümü alınarak bilinmeyen çözüm fonksiyonunun, dönüşüm cinsinden bir cebirsel denklemi elde edilir. Çözüm fonksiyonu, dönüşüm parametresi cinsinden düzenlenir. Bu düzenlenen fonksiyonun ters Laplace dönüşümü alınarak çözüm fonk.na ulaşılır.

Örnek

$$y'' - y' - 2y = 0 \ ; \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = 0$$

Normal çözüm:

$r^2 - r - 2 = 0 \qquad r_1 = -1, \ r_2 = 2 \qquad y = c_1 e^{-t} + c_2 e^{2t} \qquad y' = -c_1 e^{-t} + 2c_2 e^{2t}$

$y(0) = c_1 + c_2 = 1 \qquad y'(0) = -c_1 + 2c_2 = 0$

$c_1 + c_2 = 1$

$-c_1 + 2c_2 = 0$

$3c_2 = 1 \rightarrow c_2 = \frac{1}{3}, \ c_1 = \frac{2}{3} \qquad \boxed{y = \frac{2}{3}e^{-t} + \frac{1}{3}e^{2t}}$

Laplace ile

$\mathcal{L}\{y(t)\} = Y(s)$

$\mathcal{L}\{y'' - y' - 2y\} = 0$

$\mathcal{L}\{y''\} - \mathcal{L}\{y'\} - 2\mathcal{L}\{y\} = 0$

$s^2 Y(s) - s\underbrace{y(0)}_{1} - \underbrace{y'(0)}_{0} - [sY(s) - \underbrace{y(0)}_{1}] - 2Y(s) = 0$

$s^2 Y - s - sY + 1 - 2Y = 0$

$(s^2 - s - 2)Y - s + 1 = 0 \rightarrow Y = \frac{s-1}{s^2 - s - 2} \qquad \mathcal{L}^{-1}\{Y(s)\} = y(t)$

$y(t) = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{s-1}{s^2 - s - 2}\right\} = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{s-1}{(s+1)(s-2)}\right\} \qquad \frac{s-1}{(s+1)(s-2)} = \frac{A}{s+1} + \frac{B}{s-2} = \frac{2/3}{s+1} + \frac{1/3}{s-2}$

$y(t) = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{2/3}{s+1} + \frac{1/3}{s-2}\right\}$

$y(t) = \frac{2}{3}e^{-t} + \frac{1}{3}e^{2t}$

Örnek $y'' + 4y = 0 \qquad y(0) = 1;\ y'(0) = -2$

$L\{y(t)\} = Y(s)$

$L\{y'' + 4y\} = L\{y''\} + 4L\{y\} = 0$

$s^2Y(s) - s\underbrace{y(0)}_{1} - \underbrace{y'(0)}_{-2} + 4Y(s) = 0$

$s^2Y - s + 2 + 4Y = 0$

$(s^2+4)Y = s-2 \longrightarrow Y(s) = \dfrac{s-2}{s^2+4}$

$L^{-1}\{Y(s)\} = y(t)$

$L^{-1}\left\{\dfrac{s-2}{s^2+4}\right\} = L^{-1}\left\{\dfrac{s}{s^2+4}\right\} - 2L^{-1}\left\{\dfrac{1}{s^2+4}\right\} = \cos 2t - \cancel{2}\dfrac{\sin 2t}{\cancel{2}}$

$y(t) = \cos 2t - \sin 2t$

Örnek $y'' - 6y' + 9y = t^2e^{3t}, \quad y(0) = 2, \quad y'(0) = 6$

$L\{y'' - 6y' + 9y\} = L\{t^2e^{3t}\}$

$s^2Y(s) - s\underbrace{y(0)}_{2} - \underbrace{y'(0)}_{6} - 6(sY(s) - \underbrace{y(0)}_{2}) + 9Y(s) = \dfrac{2}{(s-3)^3}$

$s^2Y - 2s - \cancel{6} - 6sY + \cancel{12} + 9Y = \dfrac{2}{(s-3)^3}$

$(s^2 - 6s + 9)Y - 2(s-3) = \dfrac{2}{(s-3)^3}$

$(s-3)^2Y = 2(s-3) + \dfrac{2}{(s-3)^3} \longrightarrow Y(s) = \dfrac{2}{(s-3)} + \dfrac{2}{(s-3)^5}$

$L^{-1}\{Y(s)\} = L^{-1}\left\{\dfrac{2}{s-3} + \dfrac{2}{(s-3)^5}\right\} = 2e^{3t} + 2\dfrac{t^4}{4!}e^{3t}$

$y(t) = 2e^{3t} + \dfrac{1}{12}t^4e^{3t}$

BÖLÜM 7

Diferensiyel Denklem Sistemleri

Bu bölümde genel olarak lineer diferensiyel denklem sistemleri ve çözüm yöntemleri ele alınacaktır.

7.1 Operatör Yöntemi

Tanım 7.1. *Bir diferensiyel denklem sistemi: iki ya da daha fazla diferensiyel denklemden meydana gelir ve iki ya da daha fazla sayıdaki bağımlı değişkenlerin bir tek bağımsız değişkene göre türevlerini içerirler.*

Örneğin x, y ve z, t bağımsız değişkeninin fonksiyonları olmak üzere

$$\begin{aligned} 8\frac{d^2x}{dt^2} &= -6x + 3y \\ 3\frac{d^2x}{dt^2} &= 7x - 4y \end{aligned} \qquad \text{ve} \qquad \begin{aligned} x' - 2x + y' - z' &= 4 \\ x' \qquad - y' + 4z' &= t \\ x + y' - 7z' &= t + 2 \end{aligned}$$

ifadeleri birer diferensiyel denklem sistemidir. Burada bağımlı değişkenler $x = x(t)$, $y = y(t)$, $z = z(t)$ ve bağımsız değişken t dir. Bunlardan birincisi iki bilinmeyenli, ikincisi ise üç bilinmeyenli bir diferensiyel denklem sistemidir.

Tanım 7.2. *Diferensiyel denklem sisteminin çözümü: verilen aralıkta,* *denklem sistemindeki her bir denklemi sağlayan ve diferensiyellenebilen fonksiyonların kümesidir.*

Daha önceki konulardan bilindiği gibi, $a_0, a_1, \ldots, a_n$ sabitler olmak üzere,

$$a_n y^{(n)} + a_{n-1} y^{(n-1)} + \cdots + a_1 y' + a_0 y = f(t) \tag{7.1}$$

denklemine lineer diferensiyel denklem denir. Bu (7.1)denklemi D türev operatörü olmak üzere,

$$(a_n D^{(n)} + a_{n-1} D^{(n-1)} + \cdots + a_1 D + a_0) y = f(t) \tag{7.2}$$

şeklinde de yazılabilir.

7.1.1 Yoketme Yöntemi

Lineer denklem sistemini çözmenin en eski ve en kolay yolu **yoketme yöntemidir**. Bu yöntemin diferensiyel denklem sisteminin çözümünün bulunmasında nasıl kullanıldığı aşağıdaki örneklerde gösterilmiştir.

Örnek. 7.1.

$$\begin{aligned} Dy - 2x &= 0 \\ Dx - 3y &= 0 \end{aligned} \tag{7.3}$$

diferensiyel denklem sistemini çözünüz.

Çözüm. Verilen denklemlerden, birincisi D operatörü ile, ikincisi de 2 ile çarpılır ve taraf tarafa çıkarılırsa x değişkeni yok olur. Böylece,

$$D^2 y - 6y = 0$$

elde edilir. Bu denklemin karakteristik denklemi

$$a^2 - 6 = 0$$

olup, kökleri: $a_1 = \sqrt{6}$ ve $a_2 = -\sqrt{6}$ dir. Buradan,

$$y(t) = c_1 e^{\sqrt{6}\,t} + c_2 e^{-\sqrt{6}\,t} \tag{7.4}$$

elde edilir. y değişkenini yoketmek için de verilen denklem sisteminin birinci denklemini $+3$ ile ikinci denklemini de D operatörü ile çarpıp taraf tarafa toplarsak,

$$D^2 x - 6x = 0$$

olur. Bu denklemin karakteristik denklemi

$$a^2 - 6 = 0$$

olup, kökleri: $a_1 = \sqrt{6}$ ve $a_2 = -\sqrt{6}$ dir. Buradan,

$$x(t) = c_3 e^{\sqrt{6}\,t} + c_4 e^{-\sqrt{6}\,t} \tag{7.5}$$

elde edilir. (7.4) ve (7.5) ifadeleri her c_1, c_2, c_3 ve c_4 değerleri için (7.3) denklemlerini sağlamaz. (7.3) denklemlerini sağlayan c_1, c_2, c_3 ve c_4 değerlerini bulmak için, (7.4) ve (7.5) değerlerini (7.3) sistemindeki birinci denklemde (ikinci denklemde de yazılabilir) yerine yazalım, bu durumda,

$$(\sqrt{6}\,c_1 - 2c_3)e^{\sqrt{6}\,t} + (-\sqrt{6}\,c_2 - 2c_4)e^{-\sqrt{6}\,t} = 0$$

elde edilir. Bu ifadenin her t değeri için sıfır olabilmesi için:

$$\sqrt{6}\,c_1 - 2c_3 = 0 \qquad \text{ve} \qquad -\sqrt{6}\,c_2 - 2c_4 = 0$$

olmalıdır. Buradan,

$$c_3 = \frac{\sqrt{6}}{2}c_1 \ \text{ve}\ c_4 = -\frac{\sqrt{6}}{2}c_2$$

bulunur. Böylece (7.3) sisteminin çözümü,

$$x(t) = \frac{\sqrt{6}}{2}\left(c_1 e^{\sqrt{6}\,t} - c_2 e^{-\sqrt{6}\,t}\right)$$
$$y(t) = c_1 e^{\sqrt{6}\,t} + c_2 e^{-\sqrt{6}\,t}$$

olur.

Örnek. 7.2.

$$\begin{aligned} Dx + (D+1)y &= e^t \\ (D+2)x - Dz &= t \\ (D+1)y + (D+2)z &= 0 \end{aligned} \tag{7.6}$$

denklem sisteminin genel çözümünü bulunuz.

Çözüm. Üçüncü denklem birinciden çıkarıldığında,

$$Dx - (D+2)z = e^t \tag{7.7}$$

elde edilir. Bu denklem ile ikinci denklem birlikte çözülebilir. Çünkü ikisi de x ve z değişkenlerine bağlıdır. İkinci denkleme D operatörü ve (7.7) denklemi de $D+2$ operatörü uygulanarak taraf tarafa çıkarılırsa,

$$4(D+1)z = 1 - 3e^t$$

bulunur. Buradan,

$$z = c_1e^{-t} - \frac{3}{8}e^t + \frac{1}{4}$$

elde edilir. z değişkeninin bu değeri yukarıda yerine yazılırsa,

$$Dx = c_1e^{-t} - \frac{1}{8}e^t + \frac{1}{2}$$

olur. Buradan,

$$x = -c_1e^{-t} - \frac{1}{8}e^t + \frac{t}{2} + c_2$$

bulunur. x değişkeninin bu değeri denklem sistemindeki birinci denklemde yerine yazılırsa,

$$(D+1)y = -c_1e^{-t} + \frac{9}{8}e^t - \frac{1}{2}$$

olur. Buradan,

$$y = -c_1te^{-t} + \frac{9}{16}e^t - \frac{1}{2} + c_3e^{-t}$$

bulunur. x, y ve z nin değerleri verilen denklem sisteminin her bir denkleminde yerine yazılırsa,

$$c_2 = -\frac{1}{4}$$

bulunur. O halde iki bağımsız sabit içeren genel çözüm

$$x = -c_1e^{-t} - \frac{1}{8}e^t + \frac{t}{2} - \frac{1}{4}$$
$$y = -c_1te^{-t} + \frac{9}{16}e^t - \frac{1}{2} + c_3e^{-t}$$
$$z = c_1e^{-t} - \frac{3}{8}e^t + \frac{1}{4}$$

olur.

7.1.2 Determinant Yöntemi

L_1, L_2, L_3 ve L_4, sabit katsayılı lineer diferensiyel operatörler olmak üzere, x ve y değişkenlerine bağlı bir lineer diferensiyel denklem sistemi;

$$\begin{aligned} L_1x + L_2y &= g_1(t) \\ L_3x + L_4y &= g_2(t) \end{aligned} \tag{7.8}$$

şeklinde yazılır. Yoketme yöntemi kullanılarak, bu iki denklemden önce y ve sonrada x değişkeni yok edilirse:

$$(L_1L_4 - L_2L_3)x = f_1(t) \quad \text{ve} \quad (L_1L_4 - L_2L_3)y = f_2(t) \tag{7.9}$$

bulunur. Burada

$$f_1(t) = L_4g_1(t) - L_2g_2(t) \text{ ve } f_2(t) = L_1g_2(t) - L_3g_1(t)$$

şeklindedir. (7.9) ifadesi determinant yöntemi kullanılarak,

$$\begin{vmatrix} L_1 & L_2 \\ L_3 & L_4 \end{vmatrix} x = \begin{vmatrix} g_1 & L_2 \\ g_2 & L_4 \end{vmatrix} \quad \text{ve} \quad \begin{vmatrix} L_1 & L_2 \\ L_3 & L_4 \end{vmatrix} y = \begin{vmatrix} L_1 & g_1 \\ L_3 & g_2 \end{vmatrix} \tag{7.10}$$

olur. Eğer,

$$\begin{vmatrix} L_1 & L_2 \\ L_3 & L_4 \end{vmatrix} \neq 0 \tag{7.11}$$

ve n.mertebeden diferensiyel operatör ise,

- (7.8) sistemi x ve y'ye bağlı $2n$.mertebeden diferensiyel denklem sistemi olarak yeniden yazılabilir.

- (7.8) sisteminde bulunan her bir diferensiyel denklemin karakteristik denklemleri ve tamamlayıcı fonksiyonları aynıdır.

- x ve y 'nin her ikisi de görünüşte toplam $2n$ sayıda sabit içerirler. Fakat lineer bağımsız sabitlerin sayısı n kadardır.

Eğer,

$$\begin{vmatrix} L_1 & L_2 \\ L_3 & L_4 \end{vmatrix} = 0$$

ise, (7.8) sisteminin, birden fazla sayıda lineer bağımsız sabit ihtiva eden çözümü vardır veya çözümü yoktur. (7.8) sistemi daha fazla değişkenler için de geçerlidir.

Örnek. 7.3.

$$\begin{aligned} x' &= 3x - y - 1 \\ y' &= x + y + 4e^t \end{aligned} \tag{7.12}$$

sisteminin genel çözümünü bulunuz.

Çözüm. Verilen denklem sistemi D operatörü kullanılarak yeniden yazılırsa,

$$\begin{aligned} (D-3)x + y &= -1 \\ -x + (D-1)y &= 4e^t \end{aligned} \tag{7.13}$$

olur. Determinant yöntemi kullanılırsa bu denklemler,

$$\begin{vmatrix} D-3 & 1 \\ -1 & D-1 \end{vmatrix} x = \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 4e^t & D-1 \end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} D-3 & 1 \\ -1 & D-1 \end{vmatrix} y = \begin{vmatrix} D-3 & -1 \\ -1 & 4e^t \end{vmatrix}$$

şeklinde yazılırlar. Bu iki determinant açılırsa,

$$(D-2)^2 x = 1 - 4e^t$$

$$(D-2)^2 y = -1 - 8e^t$$

şeklinde değişkenlerine ayrılmış iki denklem elde ederiz. Bilinen yöntemler kullanılarak bu denklemlerin tamamlayıcı fonksiyonları ve özel çözümleri aşağıdaki şekilde bulunur.

$$x = x_c + x_p = c_1e^{2t} + c_2te^{2t} + \frac{1}{4} - 4e^t \tag{7.14}$$

$$y = y_c + y_p = c_3e^{2t} + c_4te^{2t} - \frac{1}{4} - 8e^t \tag{7.15}$$

x ve y nin (7.14) ve (7.15) değerleri (7.12) sistemindeki ikinci denklemde yerine yazılırsa,

$$(c_3 - c_1 + c_4)e^{2t} + (c_4 - c_2)te^{2t} = 0$$

elde. Buradan,

$$c_4 = c_2 \quad \text{ve} \quad c_3 = c_1 - c_4 = c_1 - c_2$$

bulunur. Böylece (7.12) sisteminin genel çözümü,

$$x(t) = c_1e^{2t} + c_2te^{2t} + \frac{1}{4} - 4e^t$$

$$y(t) = (c_1 - c_2)e^{2t} + c_2te^{2t} - \frac{1}{4} - 8e^t$$

olur.

Örnek. 7.4.

$$Dx + Dz = t^2$$

$$2x + D^2y = e^t$$

$$-2Dx - 2y + (D+1)z = 0$$

denklem sistemi veriliyor. y değişkenine bağlı diferensiyel denklemi bulunuz.

Çözüm. Verilen denklem sisteminin y değişkenine göre determinantı,

$$\begin{vmatrix} D & 0 & D \\ 2 & D^2 & 0 \\ -2D & -2 & D+1 \end{vmatrix} y = \begin{vmatrix} D & t^2 & D \\ 2 & e^t & 0 \\ -2D & 0 & D+1 \end{vmatrix}$$

şeklindedir. Her iki determinant birinci satıra göre açılırsa,

$$\left(D\begin{vmatrix} D^2 & 0 \\ -2 & D+1\end{vmatrix} + D\begin{vmatrix} 2 & D^2 \\ -2D & -2\end{vmatrix}\right) y = D\begin{vmatrix} e^t & 0 \\ 0 & D+1\end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ -2D & D+1\end{vmatrix} t^2 + D\begin{vmatrix} 2 & e^t \\ -2D & 0\end{vmatrix}$$

olur. Bu determinantlar hesaplanırsa,

$$D(3D^3 + D^2 - 4)y = 4e^t - 2t^2 - 4t$$

elde edilir. Diğer değişkenlere ait denklemler de benzer yolla elde edilir.

Alıştırmalar

Aşağıdaki diferensiyel denklem sistemlerini çözünüz.

1. $\begin{array}{l} \dfrac{dx}{dt} = 2x - y \\ \dfrac{dy}{dt} = x \end{array}$; (yanıt: $\begin{array}{l} x = c_1e^t + c_2te^t \\ y = (c_1 - c_2)e^t + c_2te^t \end{array}$)

2. $\begin{array}{l} \dfrac{dx}{dt} = -y + t \\ \dfrac{dy}{dt} = x - t \end{array}$; (yanıt: $\begin{array}{l} x = c_1\cos t + c_2\sin t + t + 1 \\ y = c_1\sin t - c_2\cos t + t - 1 \end{array}$)

3. $\begin{array}{r} (D^2 + 5)x - 2y = 0 \\ -2x + (D^2 + 2)y = 0 \end{array}$;

(yanıt: $\begin{array}{l} x = \frac{1}{2}c_1\sin t + \frac{1}{2}c_2\cos t - 2c_3\sin\sqrt{6}t - 2c_4\cos\sqrt{6}t \\ y = c_1\sin t + c_2\cos t + c_3\sin\sqrt{6}t + c_4\cos\sqrt{6}t \end{array}$)

4. $\begin{array}{l} \dfrac{d^2x}{dt^2} = 4y + e^t \\ \dfrac{d^2y}{dt^2} = 4x - e^t \end{array}$;

(yanıt: $\begin{array}{l} x = c_1e^{2t} + c_2e^{-2t} + c_3\sin 2t + c_4\cos 2t + \frac{1}{5}e^t \\ y = c_1e^{2t} + c_2e^{-2t} - c_3\sin 2t - c_4\cos 2t - \frac{1}{5}e^t \end{array}$)

5. $\begin{array}{r} Dx + D^2y = e^{3t} \\ (D+1)x + (D-1)y = 4e^{3t} \end{array}$;

(yanıt: $\begin{array}{l} x = c_1 - c_2\cos t + c_3\sin t + \frac{17}{15}e^{3t} \\ y = c_1 + c_2\sin t + c_3\cos t - \frac{4}{15}e^{3t} \end{array}$)

6. $$\begin{aligned} &(D^2-1)x - y = 0 \\ &(D-1)x + Dy = 0 \end{aligned} \;;$$

(yanıt: $$\begin{aligned} x &= c_1e^t + c_2e^{-t/2}\cos\tfrac{\sqrt{3}}{2}t + c_3e^{-t/2}\sin\tfrac{\sqrt{3}}{2}t \\ y &= \left(-\tfrac{3}{2}c_2 - \tfrac{\sqrt{3}}{2}c_3\right)e^{-t/2}\cos\tfrac{\sqrt{3}}{2}t + \left(\tfrac{\sqrt{3}}{2}c_2 - \tfrac{3}{2}c_3\right)e^{-t/2}\sin\tfrac{\sqrt{3}}{2}t \end{aligned}$$)

7. $$\begin{aligned} &2\frac{dx}{dt} - 5x + \frac{dy}{dt} = e^t \\ &\frac{dx}{dt} - x + \frac{dy}{dt} = 5e^t \end{aligned} \;;$$ (yanıt: $$\begin{aligned} x &= c_1e^{4t} + \tfrac{4}{3}e^t \\ y &= -\tfrac{3}{4}c_1e^{4t} + c_2 + 5e^t \end{aligned}$$)

8. $$\begin{aligned} &(D-1)x + (D^2+1)y = 1 \\ &(D^2-1)x + (D+1)y = 2 \end{aligned} \;;$$

(yanıt: $$\begin{aligned} x &= c_1 + c_2t + c_3e^t + c_4e^{-t} - \tfrac{1}{2}t^2 \\ y &= (c_1 - c_2+) + (c_2+1)t + c_4e^{-t} - \tfrac{1}{2}t^2 \end{aligned}$$)

9. $$\begin{aligned} &Dx = y \\ &Dy = z \\ &Dz = x \end{aligned} \;;$$

(yanıt: $$\begin{aligned} x &= c_1e^t + c_2e^{-t/2}\sin\tfrac{\sqrt{3}}{2}t + c_3e^{-t/2}\cos\tfrac{\sqrt{3}}{2}t \\ y &= c_1e^t + \left(-\tfrac{1}{2}c_2 - \tfrac{\sqrt{3}}{2}c_3\right)e^{-t/2}\sin\tfrac{\sqrt{3}}{2}t + \left(\tfrac{\sqrt{3}}{2}c_2 - \tfrac{1}{2}c_3\right)e^{-t/2}\cos\tfrac{\sqrt{3}}{2}t \\ z &= c_1e^t + \left(-\tfrac{1}{2}c_2 + \tfrac{\sqrt{3}}{2}c_3\right)e^{-t/2}\sin\tfrac{\sqrt{3}}{2}t + \left(-\tfrac{\sqrt{3}}{2}c_2 - \tfrac{1}{2}c_3\right)e^{-t/2}\cos\tfrac{\sqrt{3}}{2}t \end{aligned}$$)

10. $$\begin{aligned} &\frac{dx}{dt} - 6y = 0 \\ &x - \frac{dy}{dt} + z = 0 \\ &x + y - \frac{dz}{dt} = 0 \end{aligned} \;;$$ (yanıt: $$\begin{aligned} x &= -6c_1e^{-t} - 3c_2e^{-2t} + 2c_3e^{3t} \\ y &= c_1e^{-t} + c_2e^{-2t} + c_3e^{3t} \\ z &= 5c_1e^{-t} + c_2e^{-2t} + c_3e^{3t} \end{aligned}$$)

11. $$\begin{aligned} 2Dx + (D-1)y &= t \\ Dx + dy &= t^2 \end{aligned} \;;$$ (yanıt: $$\begin{aligned} x &= -c_1e^{-t} + c_2 + \tfrac{1}{3}t^3 - 2t^2 + 5t \\ y &= c_1e^{-t} + 2t^2 - 5t + 5 \end{aligned}$$)

12. $$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= -5x - y \\ \frac{dy}{dt} &= 4x - y \end{aligned} \;;$$ (yanıt: $$\begin{aligned} x &= e^{-3t+3} - te^{-3t+3} \\ y &= -e^{3t+3} + 2te^{-3t+3} \end{aligned}$$)