

* $f(x,y) = x^2 + 3y$ fonksiyonunun f_x ve f_y türevlerini türev tanımı ile bulunuz.

$$f_x = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h,y) - f(x,y)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(x+h)^2 + 3y - (x^2 + 3y)}{h}$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{x^2 + 2xh + h^2 - x^2}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{x(2x+h)}{x} = \underline{\underline{2x}}$$

$$f_y = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x,y+h) - f(x,y)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{x^2 + 3(y+h) - (3y + x^2)}{h}$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{x^2 + 3y + 3h - 3y - x^2}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{3h}{h} = \underline{\underline{3}}$$

* $f(x,y) = \ln(xy^2)$ fonksiyonunun x 'e göre 1. mertebe kısmi türevini türev tanımı ile bulunuz.

$$f_x = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h,y) - f(x,y)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\ln((x+h)y^2) - \ln(xy^2)}{h}$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \cdot (\ln((x+h)y^2) - \ln(xy^2))$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \left(\ln \frac{(x+h)y^2}{xy^2} \right)^{1/h} = \lim_{h \rightarrow 0} \ln \left(1 + \frac{h}{x} \right)^{1/h}$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \ln \left(1 + \frac{1}{x} \cdot h \right)^{1/h} = \ln(e^{1/x}) = \underline{\underline{\frac{1}{x}}}$$

$$\lim_{h \rightarrow 0} (1+ah)^{1/h} = e^a$$

* $f(x,y) = \begin{cases} \frac{2xy}{x^2+y^2}, & (x,y) \neq (0,0) \\ 0, & (x,y) = (0,0) \end{cases}$ fonksiyonunun orijin haric her noktada sürekli olduğunu gösteriniz.

$(x,y) \neq (0,0)$ için fonksiyon $f(x,y) = \frac{2xy}{x^2+y^2}$ ile tanımlıdır.

Bu fonksiyon $(0,0)$ haric her noktada sürekli dir.

* Fonksiyon $(0,0)$ da tanımlıdır. Ancak $(0,0)$ da limit yoktur. Çünkü;

$y=mx$ boyunca limit:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x \cdot mx}{x^2 + m^2 x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2mx^2}{x^2(1+m^2)} = \frac{2m}{1+m^2} \Rightarrow \text{Sonuç } m'ye \text{ bağı, Limit yok}$$

$(0,0)$ da fonksiyonun limiti mevcut olmadığından fonksiyon $(0,0)$ da sürekli değildir.

* Sonuç olarak fonksiyon $(0,0)$ haric her noktada sürekli dir.

* $f(x,y) = \begin{cases} \frac{3xy}{x^4+y^2}, & (x,y) \neq (0,0) \\ 0, & (x,y) = (0,0) \end{cases}$ fonksiyonu $(0,0)$ da sürekli midir?

$y=mx$ boyunca limit:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{3x \cdot mx}{x^4 + m^2 x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{3mx^2}{x^2(x^2 + m^2)} = \frac{3m}{m^2} = \frac{3}{m} \Rightarrow \text{limit } m'ye \text{ bağı,}$$

Limit yok

||

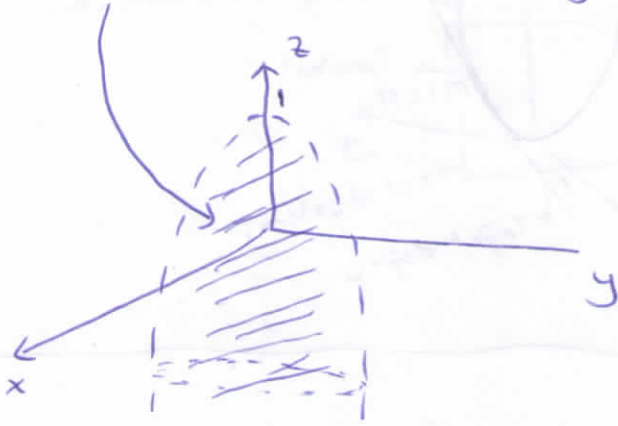
Fonk. Sürekli DEĞİL

* $f(x,y,z) = \frac{1}{\sqrt{1-z-x^2-y^2}}$ fonksiyonunun tanım bölgesini bulup çiziniz.

$$1-z-x^2-y^2 > 0 \text{ olmalı.}$$

$$1-x^2-y^2 > z$$

$z = 1-x^2-y^2 \rightarrow$ Tepe noktası $z=1$ de
Kolları aşağı doğru paraboloid

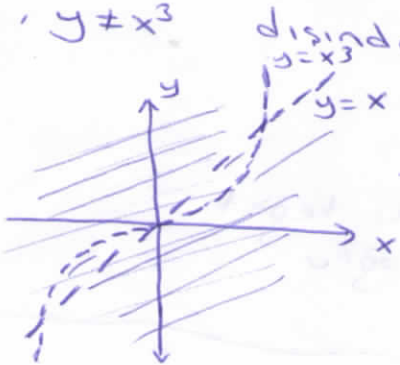


* $f(x,y) = \frac{(x-1) \cdot (y+2)}{(y-x) \cdot (y-x^3)}$ fonksiyonunun tanım bölgesini çiziniz.

$$y-x \neq 0 \text{ ve } y-x^3 \neq 0 \text{ olmalı}$$

$$y \neq x, y \neq x^3$$

dışındaki tüm noktalarda tanımlı.

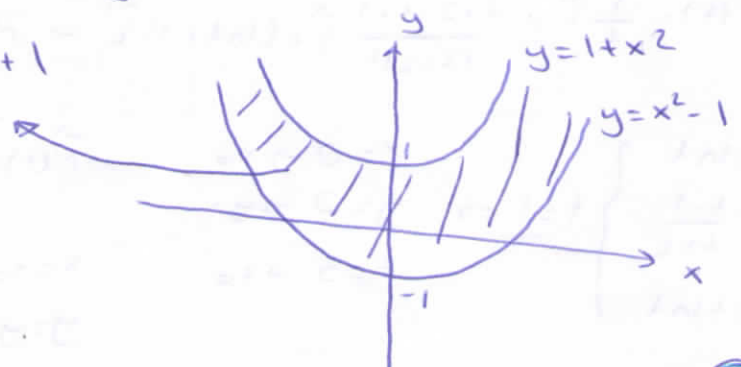


$\rightarrow$ Tanım bölgesi $y=x$ ve $y=x^3$
grafikinde bulunmayan tüm
(x,y) noktaları

* $f(x,y) = \text{ArcCos}(y-x^2)$ tanım bölgesini çiziniz.

$$-1 \leq y-x^2 \leq 1$$

$$x^2-1 \leq y \leq x^2+1$$

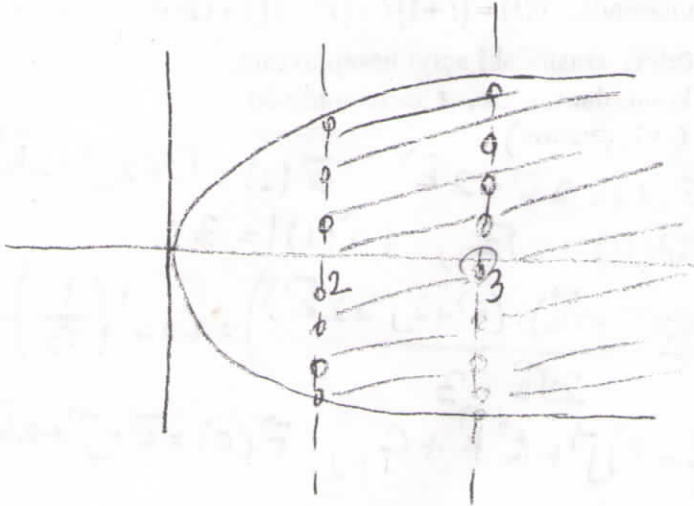


2-a) $f(x,y) = \frac{\sqrt{x-y^2}}{\ln(x-2)}$ ile verilen f fonksiyonunun tanım bölgesini belirleyiniz (Şekil çizilecek). (12 puan)

$$\sqrt{x-y^2}: x-y^2 \geq 0 \Rightarrow x \geq y^2 \checkmark$$

$$\ln(x-2): x-2 > 0 \Rightarrow x > 2$$

$$\frac{1}{\ln(x-2)}: \ln(x-2) \neq 0 \quad x-2 \neq 1 \quad x \neq 3$$



2-b) $\lim_{(x,y) \rightarrow (0^+, 2^-)} \frac{x+y-2}{\sqrt{x} + \sqrt{2-y}}$ (limitini hesaplayınız. (13 puan))

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0^+, 2^-)} \frac{(x+y-2)(\sqrt{x} - \sqrt{2-y})}{(x+y-2)} = 0$$

	YTÜ - Mühendislik Fakülteleri YAZ OKULU II. VİZE Sınav Soru ve Cevap Kağıdı				NOT TABLOSU				
					1. S	2. S	3. S	4. S	TOPLAM
Adı Soyadı									
Öğrenci Numarası				Grup No					
Bölümü						Sınav Tarihi			
Dersin Adı		MAT1072 MATEMATİK II			Sınav Süresi		90 dk	Sınav Yeri	
Dersi veren Öğretim Üyesinin Adı Soyadı							İmza		
YÖK nun 2547 sayılı Kanunun Öğrenci Disiplin Yönetmeliğinin 9. Maddesi olan “Sınavlarda kopya yapmak ve yaptırmak veya buna teşebbüs etmek” fiili işleyenler bir veya iki yarıyıl uzaklaştırma cezası alırlar.									

Soru -1-a) $\lim_{\substack{(x,y) \rightarrow (0,0) \\ x^2+y^2 \neq 0}} \frac{x^2+y^2}{1-\sqrt{1+x^2+y^2}}$ limitini hesaplayınız. (10 P)

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^2+y^2}{1-\sqrt{1+x^2+y^2}} = \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{(x^2+y^2)(1+\sqrt{1+x^2+y^2})}{1-(1+x^2+y^2)} =$$

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{(x^2+y^2)(1+\sqrt{1+x^2+y^2})}{-x^2-y^2} = - \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} (1+\sqrt{1+x^2+y^2}) = -2$$

Soru -1-b) Parçalı olarak $f(x,y) = \begin{cases} x^2 \cdot \sin \frac{1}{y}, & y \neq 0 \\ 0, & y = 0 \end{cases}$ ile verilen f fonksiyonunun $P(0,0)$ noktasındaki sürekliliğini araştırınız. (13)

$f, \forall b \neq 0$ için $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ şeklindeki noktalarda

sürekli.

$$\forall y \neq 0 \text{ için, } -1 \leq \sin \frac{1}{y} \leq 1$$

$$\forall x, y \neq 0 \text{ için, } -x^2 \leq x^2 \sin \frac{1}{y} \leq x^2$$

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} (-x^2) \leq \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} (x^2 \sin \frac{1}{y}) \leq \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} x^2$$

$\Rightarrow \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} (x^2 \sin \frac{1}{y}) = 0 = f(0,0)$ old. dan $f, (0,0)$ de süreklidir.

$$*) f(x,y) = \begin{cases} \frac{xy^2}{x^2+y^4} & , (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & , (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

fonksiyonunun

a) $f_x(0,0)$, $f_y(0,0)$ kısmi türevlerinin varlığını araştırınız.

b) $f(x,y)$ nin $(0,0)$ daki sürekliliğini inceleyiniz.

$$a) f_x(0,0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(0+h,0) - f(0,0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{0}{h} = \underline{0}$$

$$f_y(0,0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(0,0+h) - f(0,0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{0}{h} = \underline{0}$$

b) $x=my^2$ için $\lim_{y \rightarrow 0} \frac{my^2 \cdot y^2}{m^2y^4 + y^4} = \frac{m}{1+m^2} \rightarrow$ Sonuç m 'ye bağlı limit yok. Sürekli değil

$$*) f(x,y) = \frac{\sqrt{2x-y}-2}{2x-y-4} \quad \text{fonksiyonunun } (2,0) \text{ noktasındaki}$$

limitinin varlığını araştırınız.

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (2,0)} \frac{\sqrt{2x-y}-2}{2x-y-4} = \lim_{(x,y) \rightarrow (2,0)} \frac{\sqrt{2x-y}-2}{(\sqrt{2x-y}-2)(\sqrt{2x-y}+2)} = \frac{1}{4}$$

* $g\left(\frac{x}{z}\right) = yz \Rightarrow x \cdot z_x - y \cdot z_y = \underline{2}$ old. gasterinit.

Pinar Albayrak
2. Vize
2. Uygulama

f. $g\left(\frac{x}{z}\right) - yz = 0$

$$z_x = -\frac{f_x}{f_z} = -\frac{\frac{1}{z} \cdot g'\left(\frac{x}{z}\right)}{-\frac{x}{z^2} g'\left(\frac{x}{z}\right) - y} \Rightarrow x \cdot z_x = \frac{\frac{x}{z} \cdot g'\left(\frac{x}{z}\right)}{\frac{x}{z^2} g'\left(\frac{x}{z}\right) + y}$$

$$z_y = -\frac{f_y}{f_z} = -\frac{-z}{-\frac{x}{z^2} g'\left(\frac{x}{z}\right) - y} \Rightarrow -y \cdot z_y = \frac{yz}{\frac{x}{z^2} g'\left(\frac{x}{z}\right) + y}$$

$$+ \frac{\frac{x}{z} g'\left(\frac{x}{z}\right) + yz}{\frac{x}{z^2} g'\left(\frac{x}{z}\right) + y} = \underline{\underline{2}}$$

* $z = x + \frac{1}{x} g(xy) \Rightarrow x \cdot z_x - y \cdot z_y = 2x - z$ old. gasterin.

$$z_x = 1 - \frac{1}{x^2} g(xy) + \frac{1}{x} \cdot y g'(xy) \Rightarrow x z_x = x - \frac{1}{x} g(xy) + y g'(xy)$$

$$z_y = \frac{1}{x} \cdot x \cdot g'(xy) \Rightarrow -y z_y = -y g'(xy)$$

$$+ \frac{\quad}{\quad} \Rightarrow x z_x - y z_y = \underline{x - \frac{1}{x} g(xy) + y g'(xy) - y g'(xy)}$$

$$2x - z = 2x - x - \frac{1}{x} g(xy) = \underline{x - \frac{1}{x} g(xy)} \Rightarrow x z_x - y z_y = 2x - z$$

* $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} (x^2+y^2) \cdot \cos \frac{1}{x^2+y^2}$ limitini hesaplayınız.

$(x,y) \neq (0,0)$ için $-1 \leq \cos \frac{1}{x^2+y^2} \leq 1$ dir.

$$\downarrow$$
$$-(x^2+y^2) \leq (x^2+y^2) \cdot \cos \frac{1}{x^2+y^2} \leq x^2+y^2$$

$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} -(x^2+y^2) = \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} (x^2+y^2) = 0$ olduğundan Sıkıştırma

Teoremine göre $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} (x^2+y^2) \cdot \cos \frac{1}{x^2+y^2} = 0$ dir.

* Eğer $f(x,y) = \frac{2x^2y}{x^3+y^3}$ ise

a) $y=x$ boyunca $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x,y)$ hesaplayın.

b) $y=x^2$ "

c) $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x,y)$ mevcut mudur?

a) $y=x$ boyunca limit : $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x^2x}{x^3+x^3} = \frac{1}{1} = 1$

b) $y=x^2$ " : $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x^2 \cdot x^2}{x^3+x^6} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x^4}{x^3(1+x^3)} = \frac{0}{0}$

c) (a) ve (b) sıktındaki sonuçlar farklı çıktığından limit mevcut değildir.

$$\textcircled{*} z = x f(x+y) + y g(x+y) \Rightarrow \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 2 \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} \text{ old. gösterin.}$$

$$\frac{\partial z}{\partial x} = f(x+y) + x \cdot f'(x+y) + y g'(x+y)$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = f'(x+y) + f'(x+y) + x f''(x+y) + y g''(x+y) \quad (*)$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = x f'(x+y) + g(x+y) + y g'(x+y)$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = x f''(x+y) + g''(x+y) + g'(x+y) + y g''(x+y) \quad (**)$$

x'e göre türev

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = f'(x+y) + x f''(x+y) + g'(x+y) + y g''(x+y)$$

$$\begin{aligned} (*) + (**) &\Rightarrow \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 2f'(x+y) + 2x f''(x+y) + 2y g''(x+y) + 2g'(x+y) \\ &= 2 \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} \end{aligned}$$

$$\textcircled{*} e^{x+y+z} = x+y-z \Rightarrow z_x - z_y = 0 \text{ old. gösterin.}$$

$$f: e^{x+y+z} - x - y + z = 0 \rightarrow \text{Kapat. fonk.}$$

$$z_x = -\frac{f_x}{f_z} = -\frac{e^{x+y+z} - 1}{e^{x+y+z} + 1} \quad z_y = -\frac{f_y}{f_z} = -\frac{e^{x+y+z} - 1}{e^{x+y+z} + 1}$$

$$\checkmark z_x - z_y = 0$$



YTÜ - Fen-Edebiyat Fakültesi, 2015-2016
BAHAR 2.Ara Sınav Soru ve Cevap Kağıdı

NOT TABLOSU

BAHAR 2.Ara Sınav Soru ve Cevap Kağıdı				1.S	2.S	3.S	4.S	TOPLAM
Adı Soyadı								
Öğrenci No			Grup No					
Bölümü					Sınav Tarihi	30/04/2016		
Dersin Adı	MAT1072 MATEMATİK 2				Sınav Süresi	100dk	Sınav Yeri	
Dersi veren Öğretim Üyesinin Adı Soyadı						İmza		
YÖK nun 2547 sayılı Kanunun Öğrenci Disiplin Yönetmeliğinin 9. Maddesi olan “Sınavlarda kopya yapmak ve yaptırmak veya buna teşebbüs etmek” fiili işleyenler bir veya iki yarıyıl uzaklaştırma cezası alırlar.								

1-a) Uzayda hareket eden bir parçacığın hızı, t zamanında, $\vec{v}(t) = (t+1)\vec{i} + (t^2-1)\vec{j} + (2t)\vec{k}$

ile verilmiştir. $t=1$ anındaki hız ve ivme vektörleri arasındaki açıyı hesaplayınız.

Eğer $t=0$ anında parçacık $(1, -1, 2)$ noktasında konumlanmış ise, t zamanında bu parçacığın, $\vec{r}(t)$ konum vektörünü bulunuz. (12 puan)

$$\vec{a}(t) = \frac{d}{dt}(\vec{v}(t)) = \vec{i} + 2t\vec{j} + 2\vec{k} \quad \vec{v}(1) = 2\vec{i} + 2\vec{k} \quad \vec{a}(1) = \vec{i} + 2\vec{j} + 2\vec{k}$$

$$|\vec{v}(1)| = 2\sqrt{2}, \quad |\vec{a}(1)| = 3$$

$$\theta = \cos^{-1} \left(\frac{|\vec{v}(1) \cdot \vec{a}(1)|}{|\vec{v}(1)| \cdot |\vec{a}(1)|} \right) = \cos^{-1} \left(\frac{(2\vec{i} + 2\vec{k}) \cdot (\vec{i} + 2\vec{j} + 2\vec{k})}{2\sqrt{2} \cdot 3} \right) = \cos^{-1} \left(\frac{1}{\sqrt{2}} \right) = \frac{\pi}{4}$$

$$\vec{r}(t) = \int \vec{v}(t) dt = \left(\frac{t^2}{2} + t \right) \vec{i} + \left(\frac{t^3}{3} - t \right) \vec{j} + t^2 \vec{k} + C, \quad \vec{r}(0) = \vec{i} - \vec{j} + 2\vec{k} \text{ ise}$$

$$\vec{r}(0) = \vec{C} = \vec{i} - \vec{j} + 2\vec{k} \Rightarrow$$

$$\vec{r}(t) = \left(\frac{t^2}{2} + t + 1 \right) \vec{i} + \left(\frac{t^3}{3} - t - 1 \right) \vec{j} + (t^2 + 2) \vec{k} //$$

1-b) $\vec{r}(t) = at^2\vec{i} + bt\vec{j} + c \ln t \vec{k}$, ($1 \leq t \leq T$) eğrisinin uzunluğunu bir belirli integral olarak ifade edip, $b^2 = 4ac$ iken, eğrinin uzunluğu hesaplayınız. ($a, b, c, T \in \mathbb{R}$). (13 puan)

$$L = \int_1^T \left| \frac{d\vec{r}}{dt} \right| dt = \int_1^T \sqrt{4a^2t^2 + b^2 + \frac{c^2}{t^2}} dt$$

$$b^2 = 4ac \Rightarrow L = \int_1^T \sqrt{4a^2t^2 + 4ac + \frac{c^2}{t^2}} dt = \int_1^T \left(2at + \frac{c}{t} \right) dt$$

$$= aT^2 + c \ln T - a = a(T^2 - 1) + c \ln T //$$

 YTÜ - Fen-Edebiyat Fakültesi, I. Vize Sınav Soru ve Cevap Kağıdı				NOT TABLOSU				
				1. S	2. S	3. S	4. S	TOPLAM
Adı Soyadı								
Öğrenci Numarası		Grup No						
Bölümü				Sınav Tarihi		11/05/2013		
Dersin Adı	0251322 MATEMATİK II (5 saat) II. Vize			Sınav Süresi	90 dk	Sınav Yeri		
Dersi veren Öğretim Üyesinin Adı Soyadı				İmza				
YÖK'nun 2547 sayılı Kanunun <i>Öğrenci Disiplin Yönetmeliğinin</i> 9. Maddesi olan "Sınavlarda kopya yapmak ve yaptırmak veya buna teşebbüs etmek" fiili işleyenler bir veya iki yarıyıl uzaklaştırma cezası alırlar.								



$$1. f(x, y) = \begin{cases} \frac{\sin(xy)}{x^2 + y^2} & , (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & , (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

fonksiyonunun (0,0) noktasında sürekliliğini inceleyiniz. Nedenini açıklayınız.

i.) fonksiyon (0,0) noktasında tanımlı } (5)

ii.) (0,0) noktasına $y=mx$ doğrusu boyunca yaklaşırsa,

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(mx^2)}{(1+m^2)x^2} = \frac{m}{1+m^2} \quad \} (10)$$

her m için farklı bir limit değeri alacağından

$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x,y)$ limiti mevcut değildir. } (5)

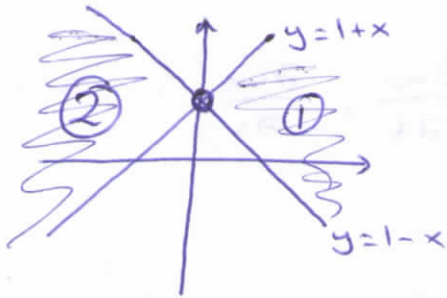
fonsiyonun (0,0) noktasında limiti olmadığından ~~süreklidir~~ } (5)

* $z = \text{ArcSin } \frac{y-1}{x}$ fonksiyonunun tanım bölgesini çiziniz.

$x \neq 0$ ve $-1 \leq \frac{y-1}{x} \leq 1$ olmalı.

① $x > 0$ için $-x \leq y-1 \leq x \Rightarrow \boxed{1-x \leq y \leq 1+x}$

② $x < 0$ için $-x \geq y-1 \geq x \Rightarrow \boxed{1+x \leq y \leq 1-x}$



* Eğer f ve g iki kez türevlenebilir tek değişkenli fonksiyonlar ise $w = f(x-ct) + g(x+ct)$ için $\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}$ olduğunu gösterin.

$$w = f(x-ct) + g(x+ct)$$

$$\frac{\partial w}{\partial t} = -c \cdot f'(x-ct) + c \cdot g'(x+ct) \Rightarrow \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = c^2 f''(x-ct) + c^2 g''(x+ct)$$

$$\frac{\partial w}{\partial x} = f'(x-ct) + g'(x+ct) \Rightarrow \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = f''(x-ct) + g''(x+ct)$$

$$\boxed{\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}}$$

*) $z = g\left(\frac{x-y}{y}\right) \Rightarrow x \cdot z_x + y \cdot z_y = 0$ olduğunu gösteriniz.

• $z = g\left(\frac{x}{y} - 1\right) \Rightarrow z_x = \frac{1}{y} \cdot g'\left(\frac{x}{y} - 1\right)$
 $z_y = -\frac{x}{y^2} \cdot g'\left(\frac{x}{y} - 1\right)$
 $\Rightarrow x \cdot z_x + y \cdot z_y = \frac{x}{y} g' - \frac{x}{y} g' = 0$

*) $w = f(s^3 + t^2)$, $f'(x) = e^x$ olsun. $\frac{\partial w}{\partial t}$, $\frac{\partial w}{\partial s}$; s ve t cinsinden bulunuz.

$w = f(s^3 + t^2)$ $x = s^3 + t^2$ olsun.

$w = f(x)$, $x = s^3 + t^2 \Rightarrow$ $w \xrightarrow{\text{C.O.}} x \xrightarrow{\text{T.O.}} s, t$

$\frac{\partial w}{\partial s} = \frac{dw}{dx} \cdot \frac{\partial x}{\partial s} = e^x \cdot 3s^2 = 3s^2 \cdot e^{s^3+t^2}$
 $f'(x) = e^x$

$\frac{\partial w}{\partial t} = \frac{dw}{dx} \cdot \frac{\partial x}{\partial t} = e^x \cdot 2t = 2t \cdot e^{s^3+t^2}$
 $f'(x) = e^x$

*) $w = (x+y+z)^2$, $x = r-s$, $y = \cos(r+s)$, $z = \sin(r+s) \Rightarrow \frac{\partial w}{\partial r} \Big|_{\substack{r=1 \\ s=-1}} = ?$

$w \xrightarrow{\text{C.O.}} x, y, z \xrightarrow{\text{C.O.}} r, s$

$\frac{\partial w}{\partial r} = \frac{\partial w}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial r} + \frac{\partial w}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial r} + \frac{\partial w}{\partial z} \cdot \frac{\partial z}{\partial r}$
 $= 2(x+y+z) \cdot 1 + 2(x+y+z) \cdot (-\sin(r+s)) + 2(x+y+z) \cdot \cos(r+s)$

$\left. \begin{matrix} r=1 \\ s=-1 \end{matrix} \right\} \Rightarrow x=2 \quad y=1 \quad z=0$

$\frac{\partial w}{\partial r} = \frac{2 \cdot (2+1)}{6} + \frac{2 \cdot (2+1) \cdot (-\sin(0))}{0} + \frac{2 \cdot (2+1) \cdot \cos(0)}{1} = \underline{\underline{12}}$

* $f(x,y) = \ln(xy+x-y-1)$ fonksiyonunun tanım bölgesini siziniz.

$$xy+x-y-1 > 0 \text{ olmalı}$$

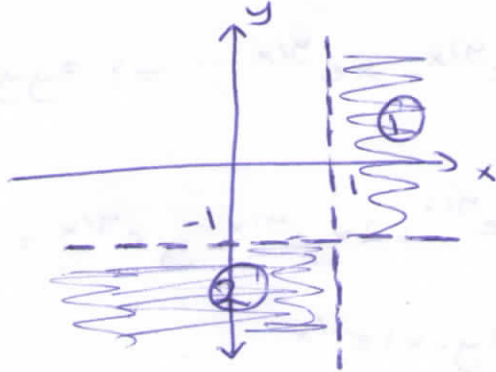
$$x(y+1)-(y+1) > 0$$

$$\left. \begin{array}{l} \textcircled{1} x-1 > 0 \quad y+1 > 0 \Rightarrow \boxed{x > 1 \quad y > -1} \\ \textcircled{2} x-1 < 0 \quad y+1 < 0 \Rightarrow \boxed{x < 1 \quad y < -1} \end{array} \right\}$$

$$(x-1)(y+1) > 0$$

$$\textcircled{1} \quad + \quad +$$

$$\textcircled{2} \quad - \quad -$$



$$* f(x,y) = \begin{cases} \frac{xy-y^2}{\sqrt{x}+\sqrt{y}} & , (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & , (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

fonksiyonu $(0,0)$ da sürekli midir?

* Fonksiyon $(0,0)$ da tanımlıdır

$$* \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{xy-y^2}{\sqrt{x}+\sqrt{y}} = \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{y(x-y)}{\sqrt{x}+\sqrt{y}} = \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} y \cdot (\sqrt{x}+\sqrt{y}) = 0$$

* $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x,y) = 0 = f(0,0)$ olduğundan fonk. $(0,0)$ da sürekli

* $z = \text{ArcSin} \frac{x}{y} + \text{Arctan} \frac{y}{x}$ için $x \cdot z_x + y \cdot z_y = 0$ olduğunu gösterin.

$$z_x = \frac{\frac{1}{y}}{\sqrt{1-\frac{x^2}{y^2}}} + \frac{-\frac{y}{x^2}}{1+\frac{y^2}{x^2}} \Rightarrow x \cdot z_x = \frac{\frac{x}{y}}{\sqrt{1-\frac{x^2}{y^2}}} + \frac{-\frac{y}{x}}{1+\frac{y^2}{x^2}}$$

$$z_y = \frac{-\frac{x}{y^2}}{\sqrt{1-\frac{x^2}{y^2}}} + \frac{\frac{1}{x}}{1+\frac{y^2}{x^2}} \Rightarrow y \cdot z_y = \frac{-\frac{x}{y}}{\sqrt{1-\frac{x^2}{y^2}}} + \frac{\frac{y}{x}}{1+\frac{y^2}{x^2}}$$

$$x z_x + y z_y = 0 \quad \checkmark$$

④ $z = x^2 \cdot e^{y/x} \Rightarrow x^2 xy + (y-x)z_{yy} = 0$ old. gesten in.

$$2x = 2x \cdot e^{y/x} + x^2 \cdot \frac{-y}{x^2} e^{y/x} = (2x - y) e^{y/x}$$

$$z_{xy} = -e^{y/x} + (2x - y) \cdot \frac{1}{x} e^{y/x}$$

$$z_y = x^2 \cdot \frac{1}{x} e^{y/x} = x e^{y/x} \Rightarrow z_{yy} = x \cdot \frac{1}{x} e^{y/x} = e^{y/x}$$

$$x \cdot z_{xy} = -x e^{y/x} + 2x e^{y/x} - y e^{y/x} = (x - y) e^{y/x}$$

$\int + \Rightarrow xzxy + (y-x)zyy$
" 0 ✓

⑤ $z = f(x+t, y-t)$ ise $\frac{\partial z}{\partial t} = \frac{\partial z}{\partial x} - \frac{\partial z}{\partial y}$ olduğunu gösterin.

$$\left. \begin{aligned} u &= x+t \\ v &= y-t \end{aligned} \right\} \quad z \rightarrow u, v \rightarrow x, y, t$$

$$\frac{\partial z}{\partial t} = \frac{\partial z}{\partial u} \cdot \underbrace{\frac{\partial u}{\partial t}}_1 + \frac{\partial z}{\partial v} \cdot \underbrace{\frac{\partial v}{\partial t}}_{-1} = \frac{\partial z}{\partial u} - \frac{\partial z}{\partial v}$$

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial z}{\partial u} \cdot \underbrace{\frac{\partial u}{\partial x}}_1 + \frac{\partial z}{\partial v} \cdot \underbrace{\frac{\partial v}{\partial x}}_0 = \frac{\partial z}{\partial u}$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{\partial z}{\partial u} \cdot \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial z}{\partial v} \cdot \frac{\partial v}{\partial y} = \frac{\partial z}{\partial v}$$

$$\frac{\frac{\partial z}{\partial x} - \frac{\partial z}{\partial y}}{\frac{\partial z}{\partial x} - \frac{\partial z}{\partial y}} = \frac{\frac{\partial z}{\partial u} - \frac{\partial z}{\partial v}}{\frac{\partial z}{\partial u} - \frac{\partial z}{\partial v}} = \frac{\frac{\partial z}{\partial t}}{\frac{\partial z}{\partial t}}$$

2-a) $f(x,y) = \begin{cases} \frac{1 - \cos \sqrt{x^2 + y^2}}{x^2 + y^2}, & (x,y) \neq (0,0) \\ 2, & (x,y) = (0,0) \end{cases}$

ile tanımlı f fonksiyonunun $A(0,0)$ noktasında sürekli

olup olmadığını inceleyiniz (12 Puan)

$f(x,y) \neq f(0,0)$ için fonk sürekli, $(0,0)$ da tanımlı $f(0,0) = 2$

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{(1 - \cos \sqrt{x^2 + y^2}) (1 + \cos \sqrt{x^2 + y^2})}{(x^2 + y^2) (1 + \cos \sqrt{x^2 + y^2})} = \quad (5)$$

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \left(\frac{\sin \sqrt{x^2 + y^2}}{\sqrt{x^2 + y^2}} \right)^2 \cdot \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{1}{1 + \cos \sqrt{x^2 + y^2}} = \frac{1}{2} \quad (3)$$

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x,y) = \frac{1}{2} \neq f(0,0) = 2 \quad (2)$$

$A(0,0)$ da $f(x,y)$ sürekli değildir. (2)

2-b) $u = f(s) + g(r)$ fonksiyonu s ve r ye bağlı ikinci mertebeden sürekli kısmi türevlere sahip bir

fonksiyon olsun. $s = 5x + y$ ve $r = y - 5x$ olmak üzere $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - 25 \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$ ifadesinin sıfıra eşit olduğunu,

zincir kuralını kullanarak gösteriniz. (13 Puan)

$$u_x = u_s \cdot 5 - u_r \cdot 5 \quad (2)$$

$$\begin{aligned} u_{xx} &= 5 (u_{ss} \cdot 5 - u_{sr} \cdot 5) - 5 [u_{rs} \cdot 5 - u_{rr} \cdot 5] \\ &= 25 u_{ss} - 25 u_{sr} - 25 u_{rs} + 25 u_{rr} \\ &= 25 u_{ss} - 50 u_{sr} + 25 u_{rr} = 25 f''(s) + 25 g''(r) \quad (3) \end{aligned}$$

$$u_y = u_s \cdot 1 + u_r \cdot 1 \quad (2)$$

$$\begin{aligned} u_{yy} &= u_{ss} \cdot 1 + u_{rs} \cdot 1 + u_{sr} \cdot 1 + u_{rr} \cdot 1 = u_{ss} + u_{rr} \\ &= f''(s) + g''(r) \quad (3) \end{aligned}$$

$$u_{xx} - 25 u_{yy} = 25 f''(s) + 25 g''(r) - 25 f''(s) - 25 g''(r) = 0 \quad (3)$$

② $\vec{r}(t) = (e^t \cos t)\vec{i} + (e^t \sin t)\vec{j} + e^t\vec{k}$ eğrisinin

$-\ln 4 \leq t \leq 0$ aralığındaki uzunluğu?

$$s(t) = \int_{t_0}^{t_1} \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2 + (z'(t))^2} dt$$

$$x = e^t \cos t \Rightarrow x' = e^t \cos t - e^t \sin t \rightarrow (x')^2 = e^{2t} \cos^2 t - 2e^{2t} \cos t \sin t + e^{2t} \sin^2 t$$

$$= e^{2t} - 2e^{2t} \cos t \sin t$$

$$y = e^t \sin t \Rightarrow y' = e^t \sin t + e^t \cos t \rightarrow (y')^2 = e^{2t} \sin^2 t + e^{2t} \cos^2 t + 2e^{2t} \sin t \cos t$$

$$= e^{2t} + 2e^{2t} \cos t \sin t$$

$$z = e^t \Rightarrow z' = e^t \Rightarrow (z')^2 = e^{2t}$$

$$(x')^2 + (y')^2 + (z')^2 = 3e^{2t} \Rightarrow \sqrt{(x')^2 + (y')^2 + (z')^2} = \sqrt{3e^{2t}} = \sqrt{3} e^t$$

$$s(t) = \int_{-\ln 4}^0 \sqrt{3} e^t dt = \sqrt{3} e^t \Big|_{-\ln 4}^0 = \sqrt{3} e^0 - \sqrt{3} e^{\frac{(-\ln 4)}{1}} = \sqrt{3} - \frac{\sqrt{3}}{4} = \frac{3\sqrt{3}}{4}$$

③ $f(x,y) = \frac{x}{y^2}$ $x = e^v \sin u$ $y = \ln v + \cos u \Rightarrow f_u, f_v$ 'yi zincir kuralı ile bulunuz.

$f \xrightarrow{\text{C.O.}} x, y \xrightarrow{\text{C.O.}} u, v$

$$f_u = \frac{\partial f}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial f}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial u} = \frac{1}{y^2} \cdot e^v \cos u + \left(-\frac{2x}{y^3}\right) \cdot (-\sin u)$$

$$f_v = \frac{\partial f}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial f}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial v} = \frac{1}{y^2} e^v \sin u + \left(-\frac{2x}{y^3}\right) \cdot \frac{1}{v}$$

* Kabul edelim ki g diferansiyellenebilen bir fonksiyon ve $z \neq 0$ için $g\left(\frac{x}{z}, yz\right) = 0$ dır. Eğer $z = f(x, y)$ ise $x \cdot \frac{\partial z}{\partial x} - y \cdot \frac{\partial z}{\partial y} = z$ olduğunu gösteriniz. (2016 - yaz okulu 2. vize sorusu)

I. Çözüm

$g\left(\frac{x}{z}, yz\right) = 0$ ise $\frac{x}{z} = h(yz)$ yazılabilir. $\left[\begin{array}{l} f(x, y) = 0 \text{ kapalı} \\ \text{fonksiyonunu} \\ y = f(x) \text{ şeklinde açık} \\ \text{yazmak gibi} \\ \text{düşündük} \end{array} \right]$

$$\frac{x}{z} = h(yz) \Rightarrow f(x, y, z) = \frac{x}{z} - h(yz) = 0 \text{ olur.}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial z}{\partial x} &= -\frac{f_x}{f_z} = -\frac{\frac{1}{z}}{-\frac{x}{z^2} - y \cdot h'(zy)} = \frac{z}{yz^2 h' + x} \\ \frac{\partial z}{\partial y} &= -\frac{f_y}{f_z} = -\frac{-z \cdot h'(yz)}{-\frac{x}{z^2} - y \cdot h'(zy)} = -\frac{z^3 h'}{yz^2 h' + x} \end{aligned}$$

$$x \frac{\partial z}{\partial x} - y \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{xz + yz^3 h'}{yz^2 h' + x} = \underline{\underline{z}}$$

II. Çözüm

$$g\left(\frac{x}{z}, yz\right) = 0 \Rightarrow yz = h\left(\frac{x}{z}\right) \text{ yazılabilir. } \Rightarrow f(x, y, z) = h\left(\frac{x}{z}\right) - yz = 0$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial z}{\partial x} &= -\frac{f_x}{f_z} = -\frac{\frac{1}{z} \cdot h'\left(\frac{x}{z}\right)}{-\frac{x}{z^2} \cdot h'\left(\frac{x}{z}\right) - y} \\ \frac{\partial z}{\partial y} &= -\frac{f_y}{f_z} = -\frac{-z}{-\frac{x}{z^2} h'\left(\frac{x}{z}\right) - y} \end{aligned}$$

$$x \frac{\partial z}{\partial x} - y \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{\frac{x}{z} h' + zy}{\frac{x}{z^2} h' + y} = \underline{\underline{z}}$$

III. Çözüm

$$g\left(\frac{x}{z}, yz\right) = 0 \quad u = \frac{x}{z} \quad v = yz \quad g \rightarrow u, v \rightarrow x, y, z$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial z}{\partial x} &= -\frac{f_x}{f_z} = -\frac{g_u \cdot \frac{1}{z}}{g_u \left(-\frac{x}{z^2}\right) + g_v \cdot y} \\ \frac{\partial z}{\partial y} &= -\frac{f_y}{f_z} = -\frac{g_v \cdot y}{g_u \left(-\frac{x}{z^2}\right) + g_v \cdot y} \end{aligned}$$

$$x \frac{\partial z}{\partial x} - y \frac{\partial z}{\partial y} = z \checkmark$$

*) Kabul edelim ki z , x ve y nin diferansiyellenebilen bir fonksiyonu olarak $y \frac{\partial z}{\partial x} - x \frac{\partial z}{\partial y} = 0$ denklemini sağ-lanmaktadır. Kutupsal koordinatlara $\frac{\partial z}{\partial \theta}$ ne olur?

$$x = r \cos \theta$$

$$y = r \sin \theta$$

$$z \xrightarrow{\text{C.O.}} x, y \xrightarrow{\text{C.O.}} r, \theta$$

$$\frac{\partial z}{\partial \theta} = \frac{\partial z}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial \theta} + \frac{\partial z}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial \theta} = \frac{\partial z}{\partial x} \cdot (-r \sin \theta) + \frac{\partial z}{\partial y} \cdot (r \cos \theta)$$

$$= -y \cdot \frac{\partial z}{\partial x} + x \frac{\partial z}{\partial y} = 0 \Rightarrow \boxed{\frac{\partial z}{\partial \theta} = 0}$$

*) Kabul edelim ki z ; x ve y değişkenlerine bağlı, diferansiyellenebilen bir fonk. olmak üzere

$x \frac{\partial z}{\partial x} + y \frac{\partial z}{\partial y} = 0$ denklemini sağlamaktadır. Bu denklemin

kutupsal koordinatlarda alacağı şekli (formül) bulunuz.

$$\left. \begin{array}{l} x = r \cos \theta \\ y = r \sin \theta \end{array} \right\} z \xrightarrow{\text{C.O.}} x, y \xrightarrow{\text{C.O.}} r, \theta$$

$$\frac{\partial z}{\partial r} = \frac{\partial z}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial r} + \frac{\partial z}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial r} = \frac{\partial z}{\partial x} \cdot \cos \theta + \frac{\partial z}{\partial y} \cdot \sin \theta$$

↓ r ile çarparsak

$$r \frac{\partial z}{\partial r} = \underbrace{r \cos \theta}_{x} \frac{\partial z}{\partial x} + \underbrace{r \sin \theta}_{y} \frac{\partial z}{\partial y} = x \frac{\partial z}{\partial x} + y \frac{\partial z}{\partial y} = 0 \Rightarrow \boxed{r \frac{\partial z}{\partial r} = 0}$$

0 olduğundan

*) $f(x,y) = \begin{cases} \frac{\sin(x^3+y^4)}{x^2+y^2}, & (x,y) \neq (0,0) \\ (0,0), & (x,y) = (0,0) \end{cases}$ fonksiyonunun $(0,0)$ daki f_x ve f_y türevlerini türev tanımı ile hesaplayınız.

$$f_x(0,0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\frac{\sin h^3}{h^2} - \frac{0}{0}}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\frac{\sin h^3}{h^2}}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sin h^3}{h^3} = 1$$

$$f_y(0,0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\frac{\sin h^4}{h^2} - \frac{0}{0}}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\frac{\sin h^4}{h^2}}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sin h^4}{h^3} \cdot \frac{h}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sin h^4}{h^4} \cdot h = 0$$

*) $w = f(s^3 + r^2)$ ve $f'(x) = e^x$ olsun. $\frac{\partial w}{\partial r}$ ve $\frac{\partial w}{\partial s}$ i bulunuz.

$x = s^3 + r^2$ olsun. $w = f(x)$

$f = w \xrightarrow{r.o.} x \xrightarrow{c.o.} s, r$

$$\frac{\partial w}{\partial r} = \frac{df}{dx} \cdot \frac{\partial x}{\partial r} = e^x \cdot 2r$$

$$\frac{\partial w}{\partial s} = \frac{df}{dx} \cdot \frac{\partial x}{\partial s} = e^x \cdot 3s^2$$

*) $w = f\left(t s^2, \frac{s}{t}\right)$, $\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = xy$, $\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \frac{x^2}{2}$ olsun. $\frac{\partial w}{\partial t}$ ve $\frac{\partial w}{\partial s}$ i bulun.

$x = t s^2$
 $y = \frac{s}{t}$ } olsun.

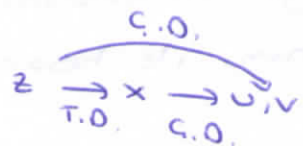
$w = f \xrightarrow{c.o.} x, y \xrightarrow{c.o.} s, t$

$$\frac{\partial w}{\partial t} = \frac{\partial f}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial t} = xy \cdot s^2 + \frac{x^2}{2} \cdot \left(-\frac{s}{t^2}\right)$$

$$\frac{\partial w}{\partial s} = \frac{\partial f}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial s} + \frac{\partial f}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial s} = xy \cdot 2st + \frac{x^2}{2} \cdot \frac{1}{t}$$

* $z = 5 \operatorname{Arctan} x$, $x = e^u + \ln v$ ise $u = \ln 2$ ve $v = 1$ olduğunda

$\frac{\partial z}{\partial u}$ ve $\frac{\partial z}{\partial v}$ yi bulunuz.



$$\frac{\partial z}{\partial u} = \frac{dz}{dx} \cdot \frac{\partial x}{\partial u} = \frac{5}{1+x^2} \cdot e^u$$

$$\begin{matrix} x=2 \\ u=\ln 2 \\ v=1 \end{matrix}$$

$$\frac{\partial z}{\partial u} = \frac{5}{1+2^2} \cdot 2 = 2$$

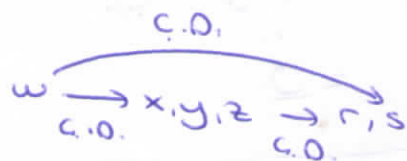
$$\frac{\partial z}{\partial v} = \frac{dz}{dx} \cdot \frac{\partial x}{\partial v} = \frac{5}{1+x^2} \cdot \frac{1}{v}$$

$$\begin{matrix} x=2 \\ u=\ln 2 \\ v=1 \end{matrix}$$

$$\frac{\partial z}{\partial v} = \frac{5}{1+2^2} \cdot 1 = 1$$

$$\begin{matrix} u=\ln 2 \\ v=1 \end{matrix} \left\{ \begin{matrix} x=2 \end{matrix} \right.$$

* $w = (x+y+z)^2$, $x = r-s$, $y = \cos(r+s)$, $z = \sin(r+s)$ ise $r=1$, $s=-1$ için $\frac{\partial w}{\partial r} = ?$



$$\begin{matrix} r=1 \\ s=-1 \end{matrix} \left\{ \begin{matrix} x=2 \\ y=1 \\ z=0 \end{matrix} \right.$$

$$\frac{\partial w}{\partial r} = \frac{\partial w}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial r} + \frac{\partial w}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial r} + \frac{\partial w}{\partial z} \cdot \frac{\partial z}{\partial r}$$

$$= 2(x+y+z) \cdot 1 + 2(x+y+z) \cdot (-\sin(r+s)) + 2(x+y+z) \cdot \cos(r+s)$$

$$\begin{matrix} r=1 \\ s=-1 \\ x=2 \\ y=1 \\ z=0 \end{matrix} \left\{ \Rightarrow \frac{\partial w}{\partial r} = 2 \cdot (2+1+0) + 2 \cdot (2+1+0) \cdot (-\sin 0) + 2 \cdot (2+1+0) \cdot \cos 0 \right.$$

$$= 6 + 6 = 12$$

 YTÜ - Fen-Edebiyat Fakültesi, Final Sınavı Soru ve Cevap Kağıdı				NOT TABLOSU				
				1. S	2. S	3. S	4. S	TOPLAM
Adı Soyadı								
Öğrenci Numarası			Grup No					
Bölümü				Sınav Tarihi		27/05/2013		
Dersin Adı	0251322 MATEMATİK II (5 saat)			Sınav Süresi	95 dk	Sınav Yeri		
Dersi veren Öğretim Üyesinin Adı Soyadı					İmza			
YÖK'nün 2547 sayılı Kanunun <i>Öğrenci Disiplin Yönetmeliğinin</i> 9. Maddesi olan "Sınavlarda kopya yapmak ve yaptırmak veya buna teşebbüs etmek" fiili işleyenler bir veya iki yarıyıl uzaklaştırma cezası alırlar.								

1. $w = f\left(\frac{y-x}{xy}, \frac{z-y}{yz}\right)$ olmak üzere, $x^2 \frac{\partial w}{\partial x} + y^2 \frac{\partial w}{\partial y} + z^2 \frac{\partial w}{\partial z} = 0$ bağıntısını gerçekleyiniz.

$$w = f\left(\underbrace{\frac{y-x}{xy}}_u, \underbrace{\frac{z-y}{yz}}_v\right), \quad u = \frac{1}{x} - \frac{1}{y}, \quad v = \frac{1}{y} - \frac{1}{z} \quad (6)$$

$$\frac{\partial w}{\partial x} = \frac{\partial w}{\partial u} \cdot \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial v} \cdot \frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial w}{\partial u} \cdot \left(-\frac{1}{x^2}\right) + \frac{\partial w}{\partial v} \cdot 0 = -\frac{1}{x^2} \cdot \frac{\partial w}{\partial u} \quad \left\{ (5) \right.$$

$$\frac{\partial w}{\partial y} = \frac{\partial w}{\partial u} \cdot \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial v} \cdot \frac{\partial v}{\partial y} = \frac{\partial w}{\partial u} \cdot \left(\frac{1}{y^2}\right) + \frac{\partial w}{\partial v} \cdot \left(-\frac{1}{y^2}\right) = \frac{1}{y^2} \cdot \left(\frac{\partial w}{\partial u} - \frac{\partial w}{\partial v}\right) \quad \left\{ (5) \right.$$

$$\frac{\partial w}{\partial z} = \frac{\partial w}{\partial u} \cdot \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial v} \cdot \frac{\partial v}{\partial z} = \frac{\partial w}{\partial u} \cdot 0 + \frac{\partial w}{\partial v} \cdot \left(\frac{1}{z^2}\right) = \frac{1}{z^2} \cdot \frac{\partial w}{\partial v} \quad \left\{ (5) \right.$$

$$x^2 \cdot \left(-\frac{1}{x^2}\right) \cdot \frac{\partial w}{\partial u} + y^2 \cdot \frac{1}{y^2} \cdot \left(\frac{\partial w}{\partial u} - \frac{\partial w}{\partial v}\right) + z^2 \cdot \frac{1}{z^2} \cdot \frac{\partial w}{\partial v} = 0 \quad \left\{ (4) \right.$$