10.6 Tabanlı Banach Uzayları Üzerinde Pozitif Operatörler

X bir Banach uzayı ve $\{x_n\}$, X de bir dizi olsun. Eğer her $x \in X$ için $x = \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n x_n$ olacak şekilde tek bir $\{\alpha_n\}$ skalar dizisi varsa $\{x_n\}$ dizisine bir Schauder tabanı (yada kısaca bir taban) denir. Bu serinin normda yakınsak olduğu kabul edilir. Her $\{x_n\}$ tabanı

$$C = \{ x = \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n x_n : \alpha_n \geq 0 \; ; n = 1, 2, \ldots \}$$

şeklinde tanımlı doğal kapalı bir C konisi oluşturur. C konisine $\{x_n\}$ tabanı ile üretilmiş bir (kapalı) koni denir.

$\{x_n\}$ bir X Banach uzayının bir tabanı olsun. Her bir $x = \sum_{i=1}^{\infty} \alpha_i x_i$ için $\quad c_n^*(x) = \alpha_n$

şeklinde tanımlı c_n^* lineer fonksiyoneli X üzerinde süreklidir. Her bir c_n^*, $\{x_n\}$ ile sürekli bir lineer fonksiyoneldir. Her bir c_n^*, sürekli üretilmiş koniye göre otomatik olarak pozitiftir. Sürekli lineer $\{c_n^*\}$ fonksiyoneller dizisi $c_n^*(x_m) = \delta_{nm}$ eşitliğini sağlar.

Banach uzayı üzerindeki $T : X \to X$ operatörüne eğer $T(C) \subseteq C$ ise pozitiftir denir. Burada C, X'in $\{x_n\}$ tabanı ile üretilmiş kapalı konidir. Açıkça T'nin pozitifliği bu tabana göredir.

Eğer $\{x_n\}$ bir X Banach uzayı için sabit bir taban ise o zaman her sürekli $T: X \to X$ operatörü bir $[t_{ij}]$ sonsuz matrisi ile temsil edilebilir. Bu anlamda bir $[t_{ij}]$ sonsuz matrisinin X üzerinde bir operatör tanımladığını söyleriz. $[t_{ij}]$ matrisi ile bir $T: X \to X$ operatörü ancak ve ancak her bir (i,j) çifti için $t_{ij} \geq 0$ ise pozitiftir.

Sıradaki teorem tabanlı bir Banach uzayı üzerindeki pozitif operatörler için Teorem 10.24 'ün bir versiyonudur.

Teorem 10.66. X tabanlı bir Banach uzayı ve $T: X \to X$ bir sürekli pozitif operatör olsun. Eğer T operatörü sıfır olmayan pozitif bir vektörde quasinilpotent olan sıfır olmayan pozitif bir operatör ile değişmeli ise o taktirde, T'nin aşikar olmayan kapalı invaryant altuzayı vardır.

İspat. $\{x_n\}$, X'in bir tabanı ve $\{c_n\}$ bu taban ile birleştirilmiş katsayı fonksiyonellerin dizisi olsun.

Sıfır olmayan pozitif $A: X \to X$ operatörü $TA = AT$ koşulunu sağlasın ve sıfır olmayan pozitif bir y_0 vektöründe quasinilpotent (yani $\lim_{n\to\infty} \|A^n y_0\|^{1/n} = 0$) olsun. Eğer $Ay_0 = 0$ ise A'nın çekirdeği T altında invaryant olan aşikar olmayan kapalı bir altuzaydır. Böylece $Ay_0 \neq 0$ kabul edebiliriz. O halde bir k için $Ax_k \neq 0$ dır. y_0'ın uygun bir ölçeklendirmesi ile $0 \leq x_k \leq y_0$ kabul edebiliriz.

$P: X \to X$, $Px = C_k^*(x) x_k$ operatörü x_k ile üretilmiş altuzay üzerindeki sürekli izdüşümü gösterir. Açıkca her bir $0 \le x \in X$ için $0 \le Px \le x$ dir.

<u>İdda.</u> Herbir $m \ge 0$ için $PT^m A x_k = 0$ dır.

$m \ge 0$ ve negatif olmayan $\alpha \ge 0$ skaleri için $PT^m A x_k = \alpha x_k$ olsun. P pozitif olduğundan ve pozitif operatörlerin bileşkesi de pozitif olduğundan

$$0 \le \alpha^n x_k = (PT^m A)^n x_k \le (T^m A)^n x_k = T^{mn} A^n x_k \le T^{mn} A^n y_0$$

sonucu çıkar. C_k^* lineer fonksiyonelinin pozitifliğinden

$$0 \le \alpha^n = C_k^*(\alpha^n x_k) \le C_k^*(T^{mn} A^n y_0)$$

elde edilir. Sonuç olarak

$$0 \le \alpha^n \le \|C_k^*\| \|T\|^{mn} \cdot \|A^n y_0\|$$

ve böylece

$$0 \le \alpha \le \|C_k^*\|^{1/n} \|T\|^m \cdot \|A^n y_0\|^{1/n}$$

olur. $\lim_{n\to\infty} \|A^n y_0\|^{1/n} = 0$ 'dan $\alpha = 0$ ve böylece idda doğrudur.

Son olarak $\{T^m A x_k : m = 0, 1, \dots\}$ ile üretilen Y altuzayını gözönüne alalım. Açıkca Y, T altında invaryantdır ve $0 \ne Ax_k \in Y$ olduğundan $Y \ne \{0\}$ olduğu görülür. Ayrıca iddadan herbir $y \in Y$ için $C_k^*(y) = C_k^*(Py) = 0$ ve dolayısıyla tüm $y \in \overline{Y}$ için $C_k^*(y) = 0$ elde edilir. Son ifade $\overline{Y}$ 'in T altında invaryant olan X 'in aşikar olmayan kapalı bir altuzayı olduğunu gösterir. $\square$

Sonuç 10.67. Eğer $T: X \to X$ tabanlı bir Banach uzayı üzerinde bir quasinilpotent pozitif operatör ise o takdirde T'nin açıkor olmayan kapalı invaryant altuzayı vardır.

Tanım (Güçlü operator topoloji).

$L(X,Y)$ üzerindeki güçlü operatör topoloji her bir $T \in L(X,Y)$ için $p_x(T) = \|Tx\|$ ile tanımlı $\{p_x\}_{x \in X}$ yarınormların ailesi ile üretilmiş Hausdorff yerel konveks τ_s topolojisidir.

Bir $\{T_\lambda\} \subseteq L(X,Y)$ ağının $L(X,Y)$ de $T_\lambda \xrightarrow{\tau_s} T$ olması ancak ve ancak her bir $x \in X$ için $\|T_\lambda x - Tx\| \to 0$ olmasıdır.

Teorem 10.68. X tabanlı bir Banach uzayı olsun. $A = [a_{ij}]$ pozitif matrisinin sıfır olmayan pozitif bir vektörde quasinilpotent olay X üzerindeki sürekli bir operatör tanımladığını kabul edelim. Eğer skaler $\{\mu_{ij}\}$ katlı dizisi için $[\mu_{ij} a_{ij}]$ ağırlık matrisi X üzerinde sürekli bir B operatörü tanımlarsa o takdirde B operatörünün açıkor olmayan kapalı invaryant bir altuzayı vardır.

İspat. $\{x_n\}$, X Banach uzayının bir tabanı olsun. $\{c_n^*\}$, $\{x_n\}$ ile birleştirilmiş katkılı fonksiyonellerin dizisi olsun.

$A = [a_{ij}]$ pozitif operatörünün $0 \neq y_0 \geq 0$ için $\lim_{n \to \infty} \|A^n y_0\|^{1/n} = 0$ 'yı sağladığını kabul edelim. y_0 için uygun bir ölçeklendirmesi $0 < x_k \leq y_0$ olacak şekilde bir k indisinin var olduğunu gösterir. Eğer $Ax_k = 0$ ise o taban vektörü bir özvektör $Bx_k = 0$ olduğunu ve böylece B'nin çekirdeğinin açıkor olmayan kapalı invaryant bir

alt uzay olduğunu görür. Böylece $Ax_k \neq 0$ kabul edilebilir.

X üzerindeki P pozitif izdüşümü $Px = G_k^*(x)x_k$ ile tanımlayın. Teorem 10.66 nın ispatına benzer olarak her bir $m \geq 1$ için $PA^m x_k = 0$ olduğu gösterilebilir. Özellikle $G_k^*(A^m x_k) = 0$ olup $m \geq 1$ ve her bir $S: X \to X$ pozitif operatör, $0 \leq S \leq A^m$, için

$$0 \leq G_k^*(Sx_k) \leq G_k^*(A^m x_k) = 0 \qquad (\star)$$

elde edilir.

Bu kez $\{Sx_k : S \in \mathcal{L}(X) \text{ ve } 0 \leq S \leq A^m, m \geq 1\}$ kümesi ile üretilmiş (X in) bir Y alt uzayını gözönüne alalım. Açıkça Y, $0 \leq R \leq A$ 'yı sağlayan her bir R operatörü altında invaryanttır. Ayrıca $(\star)$ 'dan her $y \in \overline{Y}$ için

$$G_k^*(y) = 0$$

elde edilir. Bu ise $\overline{Y}$ 'in $0 \leq R \leq A$ koşulunu sağlayan her bir $R: X \to X$ operatörü altında invaryant olan (X 'in) aşikar olmayan kapalı alt uzay olduğunu gösterir.

Her bir (i,j) çifti için $A_{ij}(x_j) = a_{ij}x_j$ ve $m \neq j$ için $A_{ij}(x_m) = 0$ ile tanımlı A_{ij} operatörünü gözönüne alalım. Bu operatör $0 \leq A_{ij} \leq A$ eşitsizliğini sağladığından $\overline{Y}$ alt uzayının her bir $0 \leq A_{ij} \leq A$ eşitsizliğini sağladığından $\overline{Y}$ alt uzayının her bir A_{ij} operatörü altında invaryant olduğu çıkar. Bu nedenle her bir $n \in \mathbb{N}$ için $\overline{Y}$ alt uzayı

$$B_n = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} u_{ij} A_{ij}$$

operatörü altında invaryanttır.

$\{B_n\}$ operatörler dizisinin güçlü operatör topolojide B operatörüne yakınsadığını belirtelim. Buradan,

$$B(\overline{\gamma}) \subseteq \overline{\gamma}$$

ve böylece B operatörünün açıkça olmayan kapalı invaryant bir altuzayı vardır. □

Sonuç 10.69 X tabanlı bir Banach uzayı olsun. $A = [a_{ij}]$ pozitif matrisinin sıfır olmayan pozitif bir vektörde quasinilpotent olan X üzerinde sürekli bir operatör tanımladığını varsayalım. Eğer sürekli $T: X \to X$ operatörü $a_{ij} = 0$ olduğunda $t_{ij} = 0$ koşulunu sağlayan $T = [t_{ij}]$ matrisi ile tanımlı ise o taktirde T operatörünün açıkça olmayan kapalı invaryant bir alt uzayı vardır.

10.7. Değişmesiz Cebirlerin Bir Karakterizasyonu

Bir Banach uzayı üzerindeki bir A operatörler cebirine eğer bu cebirin sıfırdan olmayan kapalı bir A-invaryant alt uzayı varsa değişmesizdir denir.

Bu kısımda keyfi bir reel ya da kompleks Banach uzayı X ile gösterilecektir. X^* daki kapalı birim yuvar her zamanki gibi

$$U^* = \{x^* \in X^* : \|x^*\| \leq 1\}$$

şeklinde olacaktır. U^*'ın zayıf*-topoloji ile verildiğini kabul ediyoruz. U^*'ın X^*'ın zayıf*-kompakt bir alt kümesi olduğunu belirtelim.

Tanım 10.70. U^* ve X^* zayıf*-topoloji ile verildiğinde U^*dan X^* içine tüm sürekli fonksiyonların uzayı $C(U^*, X^*)$ ile gösterilir. $Y = C(U^*, X^*)$ olsun. Bu uzay

$$\|f\| = \sup \|f(x^*)\|, \quad f \in C(U^*, X^*)$$

normu ile bir Banach uzayıdır. Herbir $T \in \mathcal{L}(X)$ için T^* eşlenik operatörünün U^*'a kısıtlaması $C(U^*, X^*)$ uzayının bir elemanıdır.

$C(U^*)$, U^* üzerinde tanımlı tüm sürekli reel-değerli fonksiyonların Banach uzayını göstersin (Eğer X kompleks Banach uzayı ise kompleks değerli sürekli fonksiyonların uzayı olur).

Herbir $\alpha \in C(\Omega^*)$ fonksiyonu $C(\Omega^*, X^*)$ üzerinde

$$(\alpha f)(x^*) = \alpha(x^*) f(x^*), \quad f \in C(\Omega^*, X^*), \ x^* \in \Omega^*$$

formülü ile bir çarpım operatörü tanımlar. Burada açıkça

$$\|\alpha f\| \leq \|\alpha\|_\infty \|f\|$$

eşitsizliği sağlanır.

Her $(x^{**}, x^*) \in X^{**} \times \Omega^*$ çifti $C(\Omega^*, X^*)$ üzerinde aşağıdaki gibi bir $x^* \otimes x^*$ lineer fonksiyoneli meydana getirir:

Herbir $f \in C(\Omega^*, X^*)$ için $x^{**} \otimes x^*$ lineer fonksiyoneli

$$\langle f, x^{**} \otimes x^* \rangle = (x^{**} \otimes x^*)(f) = \langle f(x^*), x^{**} \rangle = x^{**}(f(x^*))$$

şeklinde tanımlanır. $x^{**} \otimes x^*$, $C(\Omega^*, X^*)$ üzerinde bir norm sürekli lineer fonksiyoneldir. $Y = C(\Omega^*, X^{**})$'in dual normundaki $\{x^{**} \otimes x^* : x^{**} \in X^{**} \text{ ve } x^* \in \Omega^*\}$ ailesi ile üretilen uzay Y' ile gösterilir. Yani

$$Y' = \left\{ \sum_{i=1}^{n} x_i^{**} \otimes x_i^* : x_i^{**} \in X^{**} \text{ ve } x_i^* \in \Omega^*, \ i = 1, 2, \ldots, n \right\}.$$

Y', Y'nin noktalarını ayırır ve böylece $\langle Y, Y' \rangle$ bir dual sistem dir. Y üzerindeki norm topolojisi yanında diğer iki yerel konveks topolojileride gösterime alınacaktır. Bunlar Tau ve Tor topolojileri olup aşağıdaki gibi tanımlıdırlar:

(1) Y üzerindeki Tau topolojisi $\{\rho_{x^{**}, x^*} : x^{**} \in X^{**} \text{ ve } x^* \in \Omega^*\}$ yarınormlar ailesi ile üretilen yerel konveks topolojidir. Burada $f \in Y = C(\Omega^*, X^*)$ için

$$p_{x^{**},x^*}(f) = |(x^{**} \otimes x^*)(f)| = |\langle x^{**}, f(x^*)\rangle|$$

dir. τ_m basitçe $\sigma(Y,Y')$ zayıf topolojidir.

(2) Y üzerindeki τ_s topoloji $\{p_{x^*} : x^* \in U^*\}$ yarınormları ailesi ile üretilen yerel konveks topolojidir. Burada $f \in Y = C(U^*, X^*)$ için

$$p_{x^*}(f) = \|f(x^*)\|$$

dir.

Teorem 10.7.1. τ_s yerel konveks topoloji $\langle Y, Y'\rangle$ dual sistemi ile uyumludur. Yani

$$\tau_m = \sigma(Y,Y') \subseteq \tau_s \subseteq \tau(Y,Y')$$

kapsamaları vardır. Burada $\tau(Y,Y')$ topoloji Y üzerindeki Mackey topolojiyi göstermektedir.

İspat. $\sigma(Y,Y') \subseteq \tau_s$ olduğu açıktır. $\tau_s \subseteq \tau(Y,Y')$ olduğunu göstermemiz gerekiyor. $x^* \in U^*$ alalım.

$$\{f \in Y : p_{x^*}(f) = \|f(x^*)\| \leq 1\}$$

kümesinin sıfırın bir $\tau(Y,Y')$-komşuluğu olduğunu göstereceğiz. $R_{x^*} = x^{**} \otimes x^*$ ile tanımlı

$$R : (X^{**}, \sigma(X^{**}, X^*)) \to (Y, \sigma(Y,Y'))$$

operatörünü göz önüne alalım. R'nin sürekli olduğunu iddia ediyoruz. Gerçekten,

eğer X^{**}'da $x_\alpha^{**} \xrightarrow{\sigma(X^{**},X^*)} 0$ ise o zaman her bir $f \in Y$ için

$$\langle f, R x_\alpha^{**} \rangle = \langle f, x_\alpha^{**} \circledast x^* \rangle = \langle f(x^*), x_\alpha^{**} \rangle \to 0$$

ve böylece $R x_\alpha^{**} \xrightarrow{\sigma(Y,Y')} 0$ olur.

U^{**} bir $\sigma(X^{**},X^*)$-kompakt kümesi olduğundan konveks daire içine alınış $D = R(U^{**}) = \{x^{**} \circledast x^* : x^{**} \in U^{**}\}$ kümesi $\sigma(Y,Y')$-kompaktır. Böylece onun kutupsalı

$$D^\circ = \{f \in Y : |\langle x^{**} \circledast x^*, f \rangle| \le 1, \forall x^{**} \in U^{**} \text{ için}\}$$

$$= \{f \in Y : |x^{**}(f(x^*))| \le 1, \forall x^{**} \in U^{**} \text{ için}\}$$

$$= \{f \in Y : \|f(x^*)\| \le 1\}$$

sıfırın bir $\tau(Y,Y')$-komşuluğudur. Bu da ispatı tamamlar.

Sonuç 10.72. $C(U^*, X^*)$ içindeki τ_m ve τ_s topolojiki aynı kapalı konveks kümelere sahiptir.

Lemma 10.73. $C(U^*)$ uzayının elemanları ile çarpım altında invaryant olan $C(U^*, X^*)$ uzayının bir alt uzayı M olsun. O halde, bir $f_0 \in C(U^*, X^*)$ fonksiyonunun M için τ_s-kapanışına ait olmaması için gerek ve yeter koşul öyle $f \in M$ için

$$\langle x^{**} \circledast x^*, f_0 \rangle = 1 \text{ ve } \langle x^{**} \circledast x^*, f \rangle = 0$$

olacak şekilde $x^{**} \in X^{**}$ ve $x^* \in U^*$ varolmasıdır.

Teorem 10.74. $\mathcal{L}(X)$'in keyfi bir alt cebiri $\mathcal{A}$ için aşağıdaki ifadeler denktir:

(1) Sıfır olmayan bir $\mathcal{A}^*$-invaryant kapalı altuzay vardır.

(2) Bir $B \in \mathcal{L}(X)$ operatörü vardır, öyle ki onun B^* (adjoint) eşlenik operatörü $\{\alpha T^* : \alpha \in C(U^*) \text{ ve } T \in \mathcal{A}\}$ kümesi ile üretilen uzayın $C(U^*, X^*)$ içinde τ_s-kapanışına ait (olmaz) değildir.

İspat. (1) $\Rightarrow$ (2) Herbir $T \in \mathcal{A}$ için $\langle T^* x^*, x^{**} \rangle = 0$ olacak şekilde sıfır olmayan $x^{**} \in X^{**}$ ve $x^* \in X^*$ vardır (Teo. 10.12) Genelliği bozmadan $x^* \in U^*$ kabul edilebilir.

$\langle b^*, x^{**} \rangle = 1$ ve $\langle b, x^* \rangle = 1$ olacak şekilde $b^* \in X^*$ ve $b \in X$ alalım. $B = b^* \otimes b \in \mathcal{L}(X)$ rank-bir operatörünün $B^* \notin \overline{M}$ olduğunu idda ediyoruz. Bunun için herbir $T \in \mathcal{A}$ ve $\alpha \in C(U^*)$ için

$$\langle x^{**} \otimes x^*, \alpha T^* \rangle = \alpha(x^*) \langle T^* x^*, x^{**} \rangle = 0$$

olduğuna dikkat edelim. Yani τ_s-sürekli lineer $x^{**} \otimes x^*$ fonksiyoneli M üzerinde değerdir. Diğer yandan

$$\langle x^{**} \otimes x^*, B^* \rangle = \langle x^{**} \otimes x^*, b \otimes b^* \rangle = \langle b^*, x^{**} \rangle \langle b, x^* \rangle = 1$$

olup lemma 10.73 ten $B^* \notin \overline{M}$ bulunur.

(2) $\Rightarrow$ (1) $B^* \notin \overline{M}$ olacak şekilde $B \in \mathcal{L}(X)$ seçelim. M, $C(U^*)$'in elemanları ile çarpım altında invaryant olduğundan lemma 10.73 ten

tüm $T \in \mathcal{A}$ için

$$\langle x^{**} \otimes x^*, B^* \rangle = \langle B^* x^*, x^{**} \rangle = 1 \text{ ve } \langle T^* x^*, x^{**} \rangle = 0$$

olacak şekilde $x^{**} \in X^{**}$ ve $x^* \in U^*$ vardır.

$\langle B^* x^*, x^{**} \rangle = 1$ olduğundan $x^{**} \neq 0$ ve $x^* \neq 0$ sonucu çıkar. Böylece Teo. 10.12 ile $\mathcal{A}^*$-cebiri genişletmezdir.

Tanım 10.75. Bir $f \in Y = C(U^*, X^*)$ fonksiyonuna eğer f U^* üzerindeki zayıf *-topoloji ve X^* üzerindeki norm topoloji için sürekli ise tam süreklidir denir.

$C(U^*, X^*)$ Banach uzayının tüm tam sürekli fonksiyonların alt uzayı $K(U^*, X^*)$ ile gösterilir.

Diğer bir deyişle bir $f \in C(U^*, X^*)$ tam süreklidir ancak ve ancak $x_\alpha^* \xrightarrow{w^*} x^*$ (U^*'da) $\Rightarrow \|f(x_\alpha^*) - f(x^*)\| \to 0$ dır. Ayrıca $T: X \to X$ bir kompakt operatör ise $T^*: U^* \to X^*$ tam süreklidir. Yani $T^* \in K(U^*, X^*)$ dır. Ayrıca $K(U^*, X^*)$ $C(U^*, X^*)$'ın norm kapalı bir alt uzayıdır.

Teorem 10.76. $K(U^*, X^*)$'ın her bir $C(U^*)$-invaryant M alt uzayı için aşağıdakiler denktir:

(1) M, $K(U^*, X^*)$'da τ_w-kapalıdır.

(2) M, $K(U^*, X^*)$'da τ_s-kapalıdır.

(3) M norm kapalıdır.

Teorem 10.77. $\mathcal{L}(X)$'in bir $\mathcal{A}$ altcebiri için aşağıdaki ifadeler denktir:

(1) $\mathcal{A}^*$ dual cebiri geçişmelidir.

(2) K kompakt dualuzayda $B, K \in \mathcal{L}(X)$ operatörleri vardır, öyle ki B^*K^* operatörü $\{\alpha T^*K^* : \alpha \in C(U^*) \text{ ve } T \in \mathcal{A}\}$ ile üretilen altuzayın $C(U^*, X^*)$ deki norm kapanışına ait değildir.

Teorem 10.78. $\mathcal{L}(X)$'in bir $\mathcal{A}$ altcebiri için aşağıdaki ifadeler denktir:

(1) $\mathcal{A}$ geçişmelidir.

(2) Teo. 10.77 (2) sağlanır.