MATRİSLER

Tanım: Elemanları sayılar, değişkenler veya fonksiyonlar olabilen

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}_{m\times n}$$

şeklindeki düzenli tabloya m satır ve n sütunlu bir matris veya kısaca $m\times n$ matris denir. $m\times n$'e matrisin mertebesi denir.

Elemanları a_{ij} ler olan bir A matrisi $A=[a_{ij}]$ şeklinde gösterilir.

ÖR/ $A=\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}_{2\times 2}$, $B=\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 3 \end{bmatrix}_{3\times 1}$, $C=\begin{bmatrix} 1 & -1 & 4 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & -3 \end{bmatrix}_{3\times 3}$

$D=\begin{bmatrix} i & -1 & 0 \\ 0 & 2i & i+5 \end{bmatrix}_{2\times 3}$ birer matristir.

Tanım: Bir tek satırdan oluşan matrise satır matris denir. Satır matrisin mertebesi $1\times n$ dir.

$$A=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \end{bmatrix}_{1\times n}$$

Bir tek sütundan oluşan matrise sütun matris denir. Sütun matris $m\times 1$ mertebelidir.

$$B=\begin{bmatrix} b_{11} \\ b_{21} \\ \vdots \\ b_{m1} \end{bmatrix}_{m\times 1}$$

Tanım; Her elemanı sıfır olan matrise sıfır matris denir.

$$A=\begin{bmatrix}0\\0\end{bmatrix} \qquad B=\begin{bmatrix}0&0&0\\0&0&0\end{bmatrix}$$

Tanım; Satır sayısı sütun sayısına eşit olan matrise kare matris denir. Kare matris nxn mertebelidir.

$$A=\begin{bmatrix}a_{11}&a_{12}\\a_{21}&a_{22}\end{bmatrix}_{2\times 2} \qquad B=\begin{bmatrix}b_{11}&b_{12}&b_{13}\\b_{21}&b_{22}&b_{23}\\b_{31}&b_{32}&b_{33}\end{bmatrix}_{3\times 3}$$

kare matrislerdir.

$A=[a_{ij}]_{n\times n}$ mertebeli kare matris ise

$a_{11}, a_{22}, \dots, a_{nn}$ elemanlarına A nın asal köşegen elemanları denir. Bir kare matrisin asal köşegen elemanlarının toplamına da kare matrisin iz'i denir.

Yani $\text{iz } A = a_{11}+a_{22}+\dots+a_{nn}$ dir.

Tanım; $A=[a_{ij}]_{n\times n}$ bir kare matriste asal köşegen dışındaki elemanlar sıfırsa matrise köşegen matris denir.

$$\begin{bmatrix}1&0\\0&-2\end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix}2&0&0\\0&1&0\\0&0&-1\end{bmatrix}$$ köşegen matris örnekleridir.

Tanım; Bir köşegen matriste asal köşegen elemanları birbirine eşitse yani $a_{11}=a_{22}=\dots=a_{nn}=k$ ise matrise skaler matris denir.

$$\begin{bmatrix}2&0\\0&2\end{bmatrix} \text{ ve } \begin{bmatrix}0&0\\0&0\end{bmatrix}$$ skaler matristir.

Tanım; Bir skaler matriste asal köşegen üzerindeki elemanlar 1 ise matrise birim matris denir. nxn mertebeden birim matris I_n ile gösterilir.

$$I_1 = [1] \quad , I_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad I_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \text{--- dir.}$$

Tanım; Karşılıklı elemanları eşit olan aynı mertebeden matrislere eşit matrisler denir. mxn mertebeden $A=[a_{ij}]$ ve $B=[b_{ij}]$ matrisleri eşit ise $A=B$ şeklinde yazılır.

ÖR/ $A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & -7 \\ 2 & z & 4 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 1 & 3 & -7 \\ x & -5 & y \end{bmatrix}$ matrislerinin

eşit olması için $x=2$, $y=4$ $z=-5$ olmalıdır.

Tanım; Aynı mertebeden iki matrisin toplamı karşılıklı elemanların toplamıyla elde edilen, aynı merteben bir matristir.

$$A = [a_{ij}]_{mxn} \text{ ve } B = [b_{ij}]_{mxn} \text{ ise } A+B = [a_{ij}+b_{ij}]_{mxn} \text{ dir.}$$

Farklı mertebeden matrisler toplanamazlar.

Tanım; A bir matris ve λ bir skaler olmak üzere, λA skaler çarpımı A nın her bir elemanının λ ile çarpılmasından elde edilen bir matristir.

$(-1)A$ çarpımı $-A$ ile gösterilir.

Bu iki matrisin farkı

$$A-B = A+(-B) = A+(-1)B \text{ dir.}$$

ÖR/ $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$ $3A = \begin{bmatrix} 3 & -3 \\ 0 & 6 \end{bmatrix}$

$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 0 & 4 & 2 \end{bmatrix}$ $B = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 2 \\ 3 & 1 & 4 \end{bmatrix}$

$$A-B = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 0 & 4 & 2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 \\ -3 & -1 & -4 \end{bmatrix}$$

$$A-B = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 1 \\ -3 & 3 & -2 \end{bmatrix}$$

Teorem; A, B, C aynı mertebeden matrisler ve k, ℓ birer skaler olmak üzere,

1) $A+B=B+A$
2) $A+(B+C)=A+(B+C)$
3) $A+0=A$
4) $A-A=0$
5) $k(A+B)=kA+kB$
6) $(k+\ell)A = kA+\ell A$
7) $(k\ell)A = k(\ell A)$

Tanım; $A=[a_{ij}]$ bir $m\times r$ matris ve $B=[b_{ij}]$ bir $r\times n$ matris ise bunların çarpımı $i=1..m$ $j=1..n$ için

$$c_{ij} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \dots + a_{ir}b_{rj} = \sum_{k=1}^{r} a_{ik}b_{kj}$$

olmak üzere $AB=[c_{ij}]$ $m\times n$ - matristir.

Herhangi iki matrisin çarpılabilmesi için birinci matrisin sütun sayısı ikinci matrisin satır sayısına eşit olmalıdır.

ÖR/ $A = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ -1 & 5 \\ 4 & 3 \end{bmatrix}_{3\times 2}$ ve $B = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}_{2\times 1}$

$$AB = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ -1 & 5 \\ 4 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ -6 \\ 1 \end{bmatrix}_{3\times 1}$$

Teorem; A, $m\times n$ matris, B ve C, $n\times r$ matrisler, D, $r\times t$ matris ve λ bir skaler olmak üzere

1) $A(BD) = (AB)D$
2) $A(B+C) = AB + AC$
3) $(B+C)D = BD + CD$
4) $\lambda(AB) = (\lambda A)B = A(\lambda B)$
5) $A0 = 0$
6) $AI = IA = A$
7) Genellikle $AB \neq BA$ dır. A ve B iki kare matris olmak üzere $AB = BA$ eşitliği sağlanıyorsa A ve B ye değişmelidir denir.

ÖR/ $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$ $B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ matrisleri için

$AB = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}$ ve $BA = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$ olup $AB \neq BA$ dır.

Tanım; A bir kare matris olsun. A nın n defa kendisiyle çarpımı sonucunda elde edilen matrise A nın n. kuvveti denir. Yani

$$A.A\ldots A = A^n \text{ der.}$$

$A^k . A^l = A^{k+l}$ ve $(A^k)^l = A^{kl}$ $(k, l \in \mathbb{N})$ dir.

Tanım; Bir A matrisinin aynı numaralı satırlarıyla sütunlarının yer değiştirmesiyle elde edilen matrise A nın transpozesi denir ve A^t ile gösterilir.

$A = [a_{ij}]_{m\times n}$ matrisi ise $A^t = [a_{ji}]_{n\times m}$ matrisidir.

ÖR/ $A = \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 3 \\ 5 & 0 \end{bmatrix}$ $A^t = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 4 & 3 & 0 \end{bmatrix}$

$B = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 5 \end{bmatrix}$ $B^t = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 5 \end{bmatrix}$

$C = [6]$ $C^t = [6]$ dır.

Teorem; A ve B aynı mertebeden iki matris ve λ bir skaler olmak üzere

1) $(A+B)^t = A^t + B^t$

2) $(A^t)^t = A$

3) $(\lambda A)^t = \lambda A^t$

4) $(AB)^t = B^t A^t$ dir.

Tanım; $A^t = A$ olacak şekilde A kare matrisine simetrik matris denir. Eğer $A = [a_{ij}]$ bir simetrik matris ise her i,j için $a_{ij} = a_{ji}$ dir.

$A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 5 \\ 3 & 1 & 4 \\ 5 & 4 & -7 \end{bmatrix}$ bir simetrik matristir.

Tanım; $A^t = -A$ olacak şekilde A kare matrisine ters-simetrik matris denir. Eğer $A = [a_{ij}]$ bir ters simetrik matris ise her i,j için $a_{ij} = -a_{ji}$ dir. Şu halde bir ters simetrik matriste asal köşegen elemanları hep sıfırdır.

$A = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 3 \\ -2 & 0 & -5 \\ -3 & 5 & 0 \end{bmatrix}$ bir ters simetrik matristir.

Tanım; A_{nxn} kare matris olsun. $A^t = A^{-1}$ ise A matrisine ortogonal matris denir.

Tanım; Bir A kare matrisi için $A^{p+1} = A$ olacak şekilde bir pozitif p tamsayısı varsa A matrisine periyodik matris denir. Bu şartı sağlayan en küçük pozitif tamsayı p ye de A matrisinin periyodu denir.

$A^2 = A$ ise A matrisine idenpotent matris denir.

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 3 & 5 \\ 1 & -3 & -5 \\ -1 & 3 & 5 \end{bmatrix}$$ matrisi bir idempotent matristir.

Tanım; Bir A kare matrisi için $A^q = 0$ olacak şekilde bir pozitif q varsa A matrisine nilpotent matris denir. Bu şartı sağlayan en küçük pozitif tamsayı q ye de nilpotent matrisin indeksi (derecesi) denir.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 5 & 2 & 6 \\ -2 & -1 & -3 \end{bmatrix}$$ üçüncü dereceden bir nilpotent matristir.

Tanım; $A^2 = I$ olacak şekilde A kare matrisine involut matris denir.

Tanım; Elemanları karmaşık sayılar olan bir A matrisinde her elemanın yerine eşleniğinin yazılmasıyla elde edilen matrise A matrisinin eşleniği denir $\overline{A}$ ile gösterilir.

$$A = \begin{bmatrix} 5 & 2+i & 7i \\ 3-4i & i & 1+i \end{bmatrix} \qquad \overline{A} = \begin{bmatrix} 5 & 2-i & -7i \\ 3+4i & -i & 1-i \end{bmatrix}$$ dir.

Teorem; A ve B aynı mertebeden iki matris ve λ herhangi bir skaler olsun.

i) $\overline{\overline{A}} = A$

ii) $\overline{kA} = k\overline{A}$

iii) $(\overline{A+B}) = \overline{A} + \overline{B}$

iv) A ve B çarpılabilir iki matris olmak üzere

$$(\overline{AB}) = \overline{A}\,\overline{B}$$

Tanım; $(\overline{A})^t = A$ olacak şekilde A kare matrisine Hermitian matris denir. Eğer $A = [a_{ij}]$ kare matrisi Hermitian matris ise $a_{ij} = \overline{a_{ji}}$ dir. Bir hermitian matrisin köşegen elemanları reel sayılardır.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & i & 1+i \\ -i & -5 & 2-i \\ 1-i & 2+i & 3 \end{bmatrix}$$ matrisi bir hermitian matrisdir.

Tanım; $(\overline{A})^t = -A$ olacak şekilde A kare matrisine ters-hermitian matris denir. Eğer $A = [a_{ij}]$ kare matrisi ters-hermitian matris ise $a_{ij} = -\overline{a_{ji}}$ dir. Bir ters Hermitian matrisin köşegen elemanları 0 veya sanal sayılardır.

$$A = \begin{bmatrix} i & 1-i & 2 \\ -1-i & 3i & i \\ -2 & i & 0 \end{bmatrix}$$ matrisi bir ters hermitian matristir.

Tanım; A, bir kare matris olsun. $A^t = A^{-1}$ ise A matrisine <u>ortogonal matris</u> denir.

Tanım; A, nxn mertebesinden bir kare matris olmak üzere $AB = BA = I_n$ bağıntısına sağlayan (eğer varsa) B matrisine A matrisinin tersi veya inversi denir. A matrisinin inversi A^{-1} ile gösterilir. Her kare matrisin tersi yoktur.

ÖR/ * $(A^{-1})^{-1} = A$, $(A^{-1})^t = (A^t)^{-1}$, $(kA)^{-1} = \frac{1}{k} A^{-1}$ $(k \in R)$

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 5 \\ 0 & 1 & -4 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$AB = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}}_{A} \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & -2 & 5 \\ 0 & 1 & -4 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}}_{A^{-1}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Tanım; A, nxn mertebesinden bir kare matris olmak üzere A nın tersi yoksa A ya singüler veya tekil matris denir.

* nxn mertebeden A kare matrisinin tersi varsa bu bir tanedir.

Elemanter Satır ve Sütun işlemleri:

1) Matriste herhangi i ve j numaralı satırların yerlerini değiştirmek, bu işlem H_{ij} ile gösterilir.

2) Matriste herhangi i ve j numaralı sütunların yerlerini değiştirmek Bu işlem K_{ij} ile gösterilir.

3) Matriste i numaralı satır elemanlarını sıfırdan farklı bir k sayısı ile çarpmak $H_i(k)$ ile gösterilir.

4) Matriste j numaralı sütun elemanlarını sıfırdan farklı bir ℓ sayısı ile çarpmak $K_j(\ell)$ ile gösterilir.

5) Matriste herhangi bir i numaralı satır elemanlarını sıfırdan farklı bir k sayısı ile çarpıp herhangi j numaralı satır elemanlarına eklemek.

$H_{ji}(k)$ ile gösterilir.

6) Matriste herhangi bir i numaralı sütun elemanlarını sıfırdan farklı bir k sayısı ile çarpıp herhagi j numaralı sütun elemanlarına eklemek

$K_{ji}(k)$ ile gösterilir.

Tanım: (Denk matris)

Bir A matrisine ard arda elementer satır (veya sütun işlemleri) uygulayarak B matrisi elde edilirse A ve B matrislerine satırca (veya sütunca) denk matrisler denir. $A \sim B$ ile gösterilir.

ÖR/ $A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & -3 \\ -1 & 4 & 6 \\ -3 & 6 & 0 \end{bmatrix}$ matrisine denk matris bulalım.

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & -3 \\ -1 & 4 & 6 \\ -3 & 6 & 0 \end{bmatrix} \underset{H_{12}(1)}{\sim} \begin{bmatrix} 1 & 3 & 3 \\ -1 & 4 & 6 \\ -3 & 6 & 0 \end{bmatrix} \underset{H_{21}(1)\ \ H_{31}(3)}{\sim} \begin{bmatrix} 1 & 3 & 3 \\ 0 & 7 & 9 \\ 0 & 15 & 9 \end{bmatrix} = B$$

Tanım; Bir matris aşağıdaki şekilde ise satırca indirgenmiş formdadır.

1) Matriste sıfır satırı (yani tamamı sıfırdan oluşan satır) varsa bu satır matrisin en altında olmalıdır.

2) Bir satırda sıfırdan farklı ilk eleman 1 olmalıdır.

3) Bu 1 ler bir önceki satırın 1 ine göre sağ ve altta konumlanmalıdır.

4) Bir sütunda 1 varsa o sütundaki diğer tüm elemanlar sıfır olmalıdır.

1, 2, 3 koşulunu sağlayan matris satırca indirgenmiş formda 4 koşuluda sağlarsa satırca indirgenmiş eş olan formdadır.

ÖR/
$$A=\begin{bmatrix}1 & 5 & 2\\ 0 & 1 & 4\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix} \qquad B=\begin{bmatrix}1 & 4 & 2\\ 0 & 0 & 1\\ 0 & 0 & 0\end{bmatrix}$$
satırca indirgenmiş formdadır.

$$C=\begin{bmatrix}1 & 4 & 4 & 2\\ 0 & 0 & 1 & 0\\ 1 & 0 & 0 & 0\end{bmatrix}$$
satırca indirgenmiş formda değildir.

$$D=\begin{bmatrix}1 & 4 & 2\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}$$
satırca indirgenmiş formda değil

$$E=\begin{bmatrix}2 & 4 & 5\\ 0 & 1 & 2\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}$$
satırca indirgenmiş formda değildir.

ÖR/
$$A=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0 & 3\\ 0 & 1 & 0 & 5\\ 0 & 0 & 1 & -1\end{bmatrix}$$
satırca indirgenmiş eşolan formdadır.

$$B=\begin{bmatrix}1 & 2 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}$$
satırca indirgenmiş eşolan formda değildir.

Tanım; Bir matrisin Rangı

Satırca indirgenmiş formdaki bir matrisin sıfırdan farklı satırlarının sayısına o matrisin rangı denir. r_A ile gösterilir.

Ör/

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 3 & 1 & 4 \\ -1 & 1 & -2 \end{bmatrix} \qquad r_A = ?$$

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 3 & 1 & 4 \\ -1 & 1 & -2 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 4 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & -1/2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \qquad r_A = 2$$

$$H_{21}(-3) \qquad H_2(1/4)$$

Ör/

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 1 & 2 \\ 2 & -1 & 2 & 5 \\ 5 & 6 & 3 & 2 \\ 1 & 3 & -1 & -3 \end{bmatrix} \qquad r_A = ?$$

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 1 & 2 \\ 2 & -1 & 2 & 5 \\ 5 & 6 & 3 & 2 \\ 1 & 3 & -1 & -3 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & -4 & -2 & 2 \\ 0 & -5 & 0 & 5 \\ 0 & -4 & -2 & 2 \\ 0 & 1 & -2 & -3 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & -4 & -2 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & -3 \end{bmatrix}$$

$$H_{21}(-3),\ H_{31}(-2),\ H_{41}(-5),\ H_{51}(-1),\ H_{42}(-1),\ H_3(-1/5)$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & -4 & -2 & 2 \\ 0 & 1 & -2 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -2 & -2 \\ 0 & 0 & -2 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \qquad r_A = 3$$

$$H_{45},\ H_{23} \qquad H_{32}(4),\ H_{42}(-1) \qquad H_{43}(-1),\ H_3(-1/2)$$

Tanım; Bir matrise elemanter satır ve elemanter sütun işlemleri uygulanarak matris hem satırca hem de sütunca indirgenmiş eşolan forma getirilebilir. Böylece matris aşağıdaki şekillerden birine denk olur.

$$[I_k , 0] \quad , \quad \begin{bmatrix} I_k \\ 0 \end{bmatrix} \quad , \quad \begin{bmatrix} I_k & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad , \quad I_k$$

Bir matrisi yukarıdaki formlardan herhangi biri şeklinde yazmaya matrisi normal şekle getirme denir. Matrisin rangı k olur.

ÖR/ $A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & -1 & 5 \\ 2 & 6 & 0 & 4 \\ -1 & -3 & 2 & -8 \end{bmatrix}$ matrisini normal forma getiriniz.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & -1 & 5 \\ 2 & 6 & 0 & 4 \\ -1 & -3 & 2 & -8 \end{bmatrix} \underset{H_{21}(-2) \quad H_{31}(1)}{\sim} \begin{bmatrix} 1 & 3 & -1 & 5 \\ 0 & 0 & 2 & -6 \\ 0 & 0 & 1 & -3 \end{bmatrix} \underset{H_{23}}{\sim} \begin{bmatrix} 1 & 3 & -1 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 2 & -6 \end{bmatrix}$$

$$\underset{H_{12}(1) \; , \; H_{32}(-2)}{\begin{bmatrix} 1 & 3 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}} \underset{K_{23}}{\sim} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \underset{K_{31}(-3) \; , \; K_{41}(-2)}{\sim} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\underset{K_{42}(3)}{\begin{bmatrix} \overbrace{\begin{matrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{matrix}}^{I_2} & \begin{matrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{matrix} \\ \begin{matrix} 0 & 0 \end{matrix} & \begin{matrix} 0 & 0 \end{matrix} \end{bmatrix}}$$

A matrisi $\begin{bmatrix} I_2 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ normal formuna getirilmiştir.

$r_A = 2$ dir.

Teorem; Bir A kare matrisinin tersinin bulunabilmesi için gerek ve yeter koşul birim matrise satırca denk olmasıdır. n-inci mertebeden bir regüler A matrisi için

$$[A \,\vdots\, I_n] \sim [I_n \,\vdots\, A^{-1}]$$ olacak şekilde bulunan A^{-1} matrisi A matrisinin tersidir.

ÖR/ $A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 3 \\ 1 & 4 & 3 \\ 1 & 3 & 4 \end{bmatrix}$ matrisinin tersini bulunuz.

$$[A \,\vdots\, I_n] = \left[\begin{array}{ccc:ccc} 1 & 3 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 4 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 4 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc:ccc} 1 & 3 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$H_{21}(-1), \quad H_{31}(-1)$$

$$\underset{H_{12}(-3)}{\left[\begin{array}{ccc:ccc} 1 & 0 & 3 & 4 & -3 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right]} \sim \underset{H_{13}(-3)}{\left[\begin{array}{ccc:ccc} 1 & 0 & 0 & 7 & -3 & -3 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right]} = [I_3 \,\vdots\, A^{-1}]$$

$$\underbrace{I_3}_{} \qquad \underbrace{\begin{matrix} 7 & -3 & -3 \\ -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{matrix}}_{A^{-1}}$$

ÖR/ A ve B değişmeli iki kare matris ise A^n ve B^m matrislerinin de değişmeli olacağını gösteriniz.

Çözüm: A ve B değişmeli olduğundan AB=BA dır.

$A^n B^m$ çarpımında her seferinde AB yerine BA yazılarak yani

$$A^n B^m = AA\cdots \underbrace{A.B}_{BA}.B\cdots B$$

$A^n B^m = BB\cdots B.\ A.A\cdots A = B^m A^n$ elde edilir.

yani A^n ve B^m değişmelidir.

ÖR/ $\begin{bmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{bmatrix}^n = \begin{bmatrix} \lambda^n & n\lambda^{n-1} \\ 0 & \lambda^n \end{bmatrix}$ eşitliğinin doğruluğunu gösteriniz.

Çözüm:

Tümevarım yöntemiyle $n=1$ için doğruluğu açıktır.

$\begin{bmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{bmatrix}$ dir.

$n-1$ için doğruluğunu kabul edip n için ispat yapalım.

$n-1$ için $\begin{bmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{bmatrix}^{n-1} = \begin{bmatrix} \lambda^{n-1} & (n-1)\lambda^{n-2} \\ 0 & \lambda^{n-1} \end{bmatrix}$ dir.

n için

$$\begin{bmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{bmatrix}^n = \begin{bmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{bmatrix}^{n-1} \begin{bmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda^{n-1} & (n-1)\lambda^{n-2} \\ 0 & \lambda^{n-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{bmatrix}$$

$= \begin{bmatrix} \lambda^n & n\lambda^{n-1} \\ 0 & \lambda^n \end{bmatrix}$ elde edilir.

ÖR/ $(A-B)^t = A^t - B^t$ olduğunu gösteriniz.

Çözüm:

$(A+B)^t = A^t + B^t$

ve

$(kA)^t = kA^t$ olduğunu biliyoruz.

$$(A-B)^t = (A+(-1)B)^t = A^t + (-1)B^t$$
$$= A^t - B^t \text{ dir.}$$

ÖR/ A ve B matrisleri toplanabilir ve çarpılabilir iki kare matris olsun.

A ve B matrisleri değişmeli ise

$(A-B)^2 = A^2 - 2AB + B^2$ olacağını gösteriniz.

Çözüm: A kare matrisi için

$A^n = \underbrace{AA \cdots A}_{n \text{ tane}}$ olduğundan ve $AB = BA$

verildiğinden

$$(A-B)^2 = (A-B)(A-B) = A^2 - AB - \underbrace{BA}_{AB} + B^2$$

$$(A-B)^2 = A^2 - 2AB + B^2$$

elde edilir.

ÖR/ $A+A^t$ nin simetrik matris olduğunu gösteriniz.

$(A+A^t)^t = A+A^t$ olduğu gösterilmeli

($A^t = A$ ise A matrisi simetrik matris)

$$(A+A^t)^t = A^t + (A^t)^t = A^t + A$$
$$= A + A^t \text{ dir.}$$

İki özellik kullandık

$(A+B)^t = A^t + B^t$

$A+B = B+A$

ÖR/ $A = \begin{bmatrix} -1 & 3 & k \\ 1 & -3 & -5 \\ -1 & 3 & k \end{bmatrix}$ matrisi idempotent bir matris olduğuna göre k ne olmalıdır.

Çözüm:

A matrisi idempotent ise $A^2 = A$ olmalı.

$$A.A = A^2 = \begin{bmatrix} -1 & 3 & k \\ 1 & -3 & -5 \\ -1 & 3 & k \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 3 & k \\ 1 & -3 & -5 \\ -1 & 3 & k \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 4-k & 3k-12 & k^2-k-15 \\ 1 & -3 & 15-4k \\ 4-k & 3k-12 & k^2-k-5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 3 & k \\ 1 & -3 & -5 \\ -1 & 3 & k \end{bmatrix}$$

$A^2 = A$ dan $4-k = -1$

$k = 5$ bulunur.

ÖR/ $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ a & 1 \end{bmatrix}$ ve $B = \begin{bmatrix} 1 & b \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

matrisleri verilsin.

a) $A^n = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ na & 1 \end{bmatrix}$ ve

b) $B^n = \begin{bmatrix} 1 & nb \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ olduğunu gösteriniz.

a) $n=1$ için eşitlik açıktır. $n-1$ için kabul edip n için ispatlayalım.

$$A^{n-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ (n-1)a & 1 \end{bmatrix} \text{ dir.}$$

$$A^n = A^{n-1}A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ (n-1)a & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ a & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ na & 1 \end{bmatrix} \text{ olur.}$$

b) Benzer şekilde

$n=1$ için eşitlik açıktır. $n-1$ için

$$B^{n-1} = \begin{bmatrix} 1 & (n-1)b \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \text{ dir.}$$

$$B^n = B^{n-1}B = \begin{bmatrix} 1 & (n-1)b \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & b \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$B^n = \begin{bmatrix} 1 & nb \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \text{ olur.}$$

ÖR/ $A=\begin{bmatrix}1 & 5 & y\\ x & -2 & 7\\ 8 & z & 0\end{bmatrix}$ matrisinin simetrik olması için x, y, z değerleri ne olmalıdır?

$A^t = A$ simetrik matris

$A^t = \begin{bmatrix}1 & x & 8\\ 5 & -2 & z\\ y & 7 & 0\end{bmatrix}$ $\quad A^t = A$

$$\begin{bmatrix}1 & x & 8\\ 5 & -2 & z\\ y & 7 & 0\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}1 & 5 & y\\ x & -2 & 7\\ 8 & z & 0\end{bmatrix}$$

$x = 5 \quad z = 7 \quad y = 8$ olmalı

ÖR/ $A=\begin{bmatrix}5 & 2-i & 3\\ 2+i & 0 & -i\\ 3 & i & 7\end{bmatrix}$ matrisinin Hermitian matris olduğunu gösteriniz.

$(\bar{A})^t = A$ A matrisi hermitian

$\bar{A} = \begin{bmatrix}5 & 2+i & 3\\ 2-i & 0 & i\\ 3 & -i & 7\end{bmatrix}$ $\quad (\bar{A})^t = \begin{bmatrix}5 & 2-i & 3\\ 2+i & 0 & -i\\ 3 & i & 7\end{bmatrix}$

$A = \begin{bmatrix}5 & 2-i & 3\\ 2+i & 0 & -i\\ 3 & i & 7\end{bmatrix}$ $\quad (\bar{A})^t = A$

A hermitian

ÖR/ $A+A^t$ nin simetrik matris olduğunu göster.

$(A+A^t)^t = A + A^t$ olduğu gösterilecek

$(A+A^t)^t = A^t + (A^t)^t = A^t + A = A + A^t$

$\left.\begin{array}{l} * \ (A+B)^t = A^t + B^t \\ * \ (A^t)^t = A \\ * \ A+B = B+A \end{array}\right\}$ kullanıldı.

ÖR/ A ve B simetrik iki matris olmak üzere

$5A^7+7B^5$ matrisininde simetrik matris olduğunu gösteriniz.

A ve B simetrik matris ise $A^t=A$, $B^t=B$ dir.

$(5A^7+7B^5)^t = 5A^7+7B^5$ olduğu gösterilecek.

$$
\begin{aligned}
(5A^7+7B^5)^t &= (5A^7)^t+(7B^5)^t \\
&= 5\,(A^7)^t + 7\,(B^5)^t \\
&= 5\,(A^t)^7 + 7\,(B^t)^5 \\
&= 5.\,A^7 + 7.\,B^5
\end{aligned}
$$

DETERMİNANTLAR

Tanım; Bir A kare matrisinin determinantı det A veya $|A|$ ile gösterilir.

1) 1×1 mertebeli $A=[a]_{1\times1}$ determinantı

$\det A = |A| = a$ dır.

2) 2×2 mertebeden $A=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}_{2\times2}$ matrisinin determinantı

$$|A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12}$$

3) 3×3 mertebeli $A=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}_{3\times3}$ matrisin determinantı

$$|A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{12}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}$$

$$= a_{11}(a_{22}a_{33} - a_{32}a_{23}) - a_{12}(a_{21}a_{33} - a_{31}a_{23}) + a_{13}(a_{21}a_{32} - a_{31}a_{22})$$

1. satıra göre açılımdır. İstediğiniz satıra ve sütuna göre açılımı yapabiliriz.

Tanım; $A=[a_{ij}]_{n\times n}$ bir matris olsun ve M_{ij}, a_{ij} elemanının bulunduğu satır ve sütunun silinmesiyle A dan elde edilen $(n-1)\times(n-1)$ mertebeden matrisi göstersin. M_{ij} matrisinin determinantına a_{ij} elemanının minörü denir. Ayrıca $A_{ij} = (-1)^{i+j}|M_{ij}|$ değerine a_{ij} elemanının eşçarpanı (kofaktörü) denir.

ÖR/ $A=\begin{bmatrix} 2 & 5 & 4 \\ 3 & 1 & 2 \\ 5 & 4 & 6 \end{bmatrix}$ olsun.

$M_{23} \rightarrow a_{23}$ elemanının bulunduğu satır ve sütunun silinmesiyle elde edilen matrisdir.

$$M_{23}=\begin{bmatrix} 2 & 5 \\ 5 & 4 \end{bmatrix}$$

$$A_{23}=(-1)^{2+3}\begin{vmatrix} 2 & 5 \\ 5 & 4 \end{vmatrix} = -(8-25) = 17$$

Teorem; $n \geqslant 2$ olmak üzere A, $n \times n$ mertebeli bir kare matris olsun. $i=1,2 \ldots n$ ve $j=1,2 \ldots n$ için

$$\left.\begin{aligned} \det A = |A| &= a_{i1}A_{i1} + a_{i2}A_{i2} + \cdots + a_{in}A_{in} \\ &= a_{1j}A_{1j} + a_{2j}A_{2j} + \cdots + a_{nj}A_{nj} \text{ dir} \end{aligned}\right\} \text{Laplace Açılımı}$$

ÖR/ $|A|=\begin{vmatrix} 1 & -6 & 0 \\ 2 & 0 & -5 \\ 0 & 3 & -1 \end{vmatrix} = ?$

2. sütuna göre $a_{12}=-6 \quad a_{22}=0 \quad a_{32}=3$

$$|A| = a_{12}A_{12} + a_{22}A_{22} + a_{32}A_{32} = -6.2 + 0.(-1) + 3.5 = -12+15 = 3$$

$$A_{12}=(-1)^{1+2}\begin{vmatrix} 2 & -5 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} = (-1)(-2) = 2$$

$$A_{22}=(-1)^{2+2}\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} = -1$$

$$A_{32}=(-1)^{3+2}\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 2 & -5 \end{vmatrix} = (-1)(-5) = 5$$

Determinantın Özellikleri

1) Bir determinantta herhangi bir satır (ya da sütun) elemanlarının hepsi 0 ise determinantın değeri 0 dır.

ÖR/

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 2 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 0$$

2) Bir determinantın bir satırındaki (ya da sütunundaki) elemanlar bir k skaleri ile çarpılırsa determinant k ile çarpılmış olur.

ÖR

$$|A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

$$|B| = \begin{vmatrix} ka_{11} & a_{12} & a_{13} \\ ka_{21} & a_{22} & a_{23} \\ ka_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = k \cdot |A| \text{ dır.}$$

ÖR/

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 \\ -1 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & 4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 4 \cdot 0 \\ -1 & 3 & 4 \cdot 2 \\ 0 & 1 & 4 \cdot 4 \end{vmatrix} = 4 \begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 \\ -1 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & 4 \end{vmatrix}$$

3) Determinantta herhangi iki satır (ya da sütun) yer değiştirirse determinant işaret değiştirir.

ÖR/

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 3 & 4 & 2 \\ 0 & 1 & 5 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 5 \\ 3 & 4 & 2 \end{vmatrix}$$

4) Bir determinantın herhangi bir satır (ya da sütun) elemanları bir k skaleri ile çarpılıp bir başka satırın (ya da sütunun) elemanlarına eklenirse determinant değeri değişmez.

ÖR/ $|A| = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 \\ -1 & 3 & 2 \\ 2 & 1 & 0 \end{vmatrix} = ?$

$|A| = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 2 & 4 \\ 0 & 3 & -4 \end{vmatrix}$ Birinci sütuna göre determinantı açarsak

$|A| = \begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 3 & -4 \end{vmatrix} = -8 - 12 = -20$ bulunur.

5) Bir determinantın herhangi iki satırı (yada sütunu) birbirine eşit ise determinantın değeri 0 dır.

$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 3 & 4 & 2 \\ 1 & 2 & -1 \end{vmatrix} = 0$ 1 ve 3 satır aynı

6) Bir determinantın herhangi iki satır (yada sütun) elemanları orantılı ise determinantın değeri 0 dır

$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 4 & 0 \\ 3 & 6 & 3 \end{vmatrix} = 0$ 1 ve 2 sütun orantılı

7) Bir determinantın herhangi bir satır (yada sütun) elemanları başka bir satır (yada sütun) elemanlarının eşçarpanlarıyla çarpılarak elde edilen terimlerin toplamı 0 dır.

ÖR/ $|A| = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 0 & 2 & 1 \\ -1 & 4 & 1 \end{vmatrix}$

1 satır elemanlarını 3 üncü satır elemanlarının eşçarpanları ile karşılıklı çarpıp toplayalım.

$a_{31} = -1 \qquad a_{32} = 4 \qquad a_{33} = 1$

$A_{31} = (-1)^{3+1} \begin{vmatrix} -1 & 3 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} \qquad A_{32} = (-1)^{3+2} \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = -1$

$A_{31} = (-1-6) = -7 \qquad A_{33} = (-1)^{3+3} \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = 2$

$$a_{11}A_{31} + a_{12}A_{32} + a_{13}A_{33} = 1 \cdot (-7) - 1(-1) + 3 \cdot 2$$
$$= -7 + 1 + 6 = 0$$

8) $\begin{vmatrix} a & d+e & k \\ b & f+g & s \\ c & h+l & t \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & d & k \\ b & f & s \\ c & h & t \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a & e & k \\ b & g & s \\ c & l & t \end{vmatrix}$

9) $A = [a_{ij}]_{n \times n}$ matrisi için $|A| = |A^t|$

10) $|AB| = |A| \cdot |B|$

11) $|A^{-1}| = \dfrac{1}{|A|}$

12) $|A^k| = |A|^k \quad (k \in Z^+)$

13) $|kA| = k^n |A|$ dır. ($n \times n$ mertebe)

$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = t$ ise $\begin{vmatrix} ka & kb \\ kc & kd \end{vmatrix} = k^2 t$ dir.

Bir Matrisin Tersi;

Tanım; Bir kare matrisin elemanlarının yerine, o elemanların eş çarpanlarının alınmasıyla elde edilen matrisin transpozesine ilk matrisin ek matrisi (adjoint matrisi) denir. Ek A, Adj A ile gösterilir.

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} \quad \text{ek matrisi}$$

$$\text{Ek } A = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & \cdots & A_{1n} \\ A_{21} & A_{22} & \cdots & A_{2n} \\ \vdots & & & \vdots \\ A_{n1} & A_{n2} & \cdots & A_{nn} \end{bmatrix}^t = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{21} & \cdots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & & A_{n2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ A_{1n} & A_{2n} & \cdots & A_{nn} \end{bmatrix} \text{dır.}$$

ÖR/ $A = \begin{bmatrix} 3 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 3 \end{bmatrix}$ Ek A = ?

$A_{11} = (-1)^2 \begin{vmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = -4$ $\quad A_{12} = (-1)^{1+2} \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{vmatrix} = -3$

$A_{13} = (-1)^4 \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = 2$ $\quad A_{21} = (-1)^3 \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = -5$

$A_{22} = (-1)^4 \begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 0 & 3 \end{vmatrix} = 9$ $\quad A_{23} = (-1)^{2+3} \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = -6$

$A_{31} = (-1)^4 \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = 2$ $\quad A_{32} = (-1)^5 \begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = -7$ $\quad A_{33} = (-1)^6 \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = -1$

$$\text{Ek } A = \begin{bmatrix} -4 & -3 & 2 \\ -5 & 9 & -6 \\ 2 & -7 & -1 \end{bmatrix}^t = \begin{bmatrix} -4 & -5 & 2 \\ -3 & 9 & -7 \\ 2 & -6 & -1 \end{bmatrix}$$

Teorem; A bir kare matris olsun.. $|A| \neq 0$ ise

$$A^{-1} = \frac{\text{Ek}A}{|A|} \text{ dır.}$$

İspat; $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$

$$\text{Ek}A = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{21} & \cdots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \cdots & A_{n2} \\ \vdots & & & \vdots \\ A_{1n} & A_{2n} & \cdots & A_{nn} \end{bmatrix} \text{ dır.}$$

$$A.\text{Ek}A = \begin{bmatrix} a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12} + \cdots + a_{1n}A_{1n} & a_{11}A_{21} + a_{12}A_{22} + \cdots + a_{1n}A_{2n} & \cdots \\ & & \\ & & \end{bmatrix}$$

$$A.\text{Ek}A = \begin{bmatrix} |A| & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & |A| & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & |A| \end{bmatrix} = |A| \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & & & \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix}$$

$$= |A|.I$$

$A.\text{Ek}A = |A|.I$ elde edilir.

$$\underbrace{A^{-1}A}_{I}.\text{Ek}A = A^{-1}|A|.I$$

$$\text{Ek}A = |A|.A^{-1}.I$$

$$\text{Ek}A = |A|.A^{-1}$$

$$A^{-1} = \frac{\text{Ek}A}{|A|} \text{ elde edilir.}$$

Not: Bir A kare matrisi için $|A|=0$ ise A matrisinin tersi yoktur.

ÖR/ $A = \begin{bmatrix} 3 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 3 \end{bmatrix}$ $A^{-1} = ?$

$$|A| = \begin{vmatrix} 3 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 3 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 3 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 3 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & -7 \\ 0 & 2 & 3 \end{vmatrix}$$

$$|A| = -\begin{vmatrix} 1 & -7 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = -17$$

$$\text{Ek} A = \begin{bmatrix} -4 & -5 & 2 \\ -3 & 9 & -7 \\ 2 & -6 & -1 \end{bmatrix}$$

$$A^{-1} = \frac{\text{Ek}A}{|A|} = \frac{-1}{17}\begin{bmatrix} -4 & -5 & 2 \\ -3 & 9 & -7 \\ 2 & -6 & -1 \end{bmatrix}$$

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} 4/17 & 5/17 & -2/17 \\ 3/17 & -9/17 & 7/17 \\ -2/17 & 6/17 & 1/17 \end{bmatrix}$$

Bir matrisin alt matrisi;

$m \times n$ mertebeli herhangi bir matrisin herhangi satır veya sütunlarının silinmesiyle oluşan matrislere alt matris denir.

Bir matrisin rangı; A, $m \times n$ mertebeli bir matris olsun. A'nın kare alt matrisleri arasında determinantı sıfırdan farklı olanlardan mertebesi en büyük olanın mertebesine bir matrisin rankı denir.

ÖR/ $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 4 \\ -2 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ matris 3×3 mertebeli

$|A| = 0$ (çünkü 3. satırın tümü 0)

$\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 3 \end{vmatrix} = 1 \neq 0$ dır. Alt kare matrisin mertebesi 2×2 old.dan A matrisinin rangı 2 dir.

ÖR/ $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & -1 \\ 2 & 6 & 2 & 2 \\ 1 & 3 & 1 & 2 \end{bmatrix}$ $r_A = ?$

$\begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 6 & 2 \\ 1 & 3 & 2 \end{vmatrix} \neq 0$ $r_A = 3$ tür.

ÖR/
$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 2 & 1 & 4 \\ -1 & 3 & 2 \end{vmatrix} = ?$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 3 & 5 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 3 & 5 \end{vmatrix} = 5+6=11$$

ÖR/
$$\begin{vmatrix} 1 & x & y+z \\ 1 & y & z+x \\ 1 & z & x+y \end{vmatrix}$$
determinant özelliklerini kullanarak determinantı hesaplayınız.

$$\begin{vmatrix} 1 & x & x+y+z \\ 1 & y & x+y+z \\ 1 & z & x+y+z \end{vmatrix} = (x+y+z) \begin{vmatrix} 1 & x & 1 \\ 1 & y & 1 \\ 1 & z & 1 \end{vmatrix} = 0$$

ÖR/
$$\begin{vmatrix} 1 & a & a^3 \\ 1 & b & b^3 \\ 1 & c & c^3 \end{vmatrix}$$
determinant öz kullanarak determinantı hesaplayınız.

$$\begin{vmatrix} 1 & a & a^3 \\ 1 & b & b^3 \\ 1 & c & c^3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & a & a^3 \\ 0 & b-a & b^3-a^3 \\ 0 & c-a & c^3-a^3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} b-a & b^3-a^3 \\ c-a & c^3-a^3 \end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} (b-a) & (b-a)(b^2+ab+a^2) \\ (c-a) & (c-a)(c^2+ac+a^2) \end{vmatrix} = (b-a)(c-a) \begin{vmatrix} 1 & b^2+ab+a^2 \\ 1 & c^2+ac+a^2 \end{vmatrix}$$

$$(b-a)(c-a) \begin{vmatrix} 1 & b^2+ab+a^2 \\ 0 & c^2+ac-ab-b^2 \end{vmatrix}$$

$$c^2-b^2+a(c-b)$$

$$(b-a)(c-a) \begin{vmatrix} 1 & b^2+ab+a^2 \\ 0 & (c-b)(c+b)+a(c-b) \end{vmatrix}$$

$$= (b-a)(c-a)(c-b)(a+b+c)$$

Ör/ $\begin{vmatrix} a & a^3 & bc \\ b & b^3 & ca \\ c & c^3 & ab \end{vmatrix}$ det öz kullanarak çarpanlara ayırınız.

$$\begin{vmatrix} a & a^3 & bc \\ b & b^3 & ca \\ c & c^3 & ab \end{vmatrix} = \frac{1}{abc} \begin{vmatrix} a^2 & a^4 & abc \\ b^2 & b^4 & abc \\ c^2 & c^4 & abc \end{vmatrix}$$

$$= \frac{abc}{abc} \begin{vmatrix} a^2 & a^4 & 1 \\ b^2 & b^4 & 1 \\ c^2 & c^4 & 1 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} a^2 & a^4 & 1 \\ b^2-a^2 & b^4-a^4 & 0 \\ c^2-a^2 & c^4-a^4 & 0 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} b^2-a^2 & b^4-a^4 \\ c^2-a^2 & c^4-a^4 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} b^2-a^2 & (b^2-a^2)(b^2+a^2) \\ c^2-a^2 & (c^2-a^2)(c^2+a^2) \end{vmatrix}$$

$$= (b^2-a^2)(c^2-a^2) \begin{vmatrix} 1 & b^2+a^2 \\ 1 & c^2+a^2 \end{vmatrix}$$

$$= (b^2-a^2)(c^2-a^2) \begin{vmatrix} 1 & b^2+a^2 \\ 0 & c^2-b^2 \end{vmatrix}$$

$$= (b^2-a^2)(c^2-a^2)(c^2-b^2)$$

ÖR/ $\begin{vmatrix} r & t & 1 \\ p & -1 & w \\ 2 & s & u \end{vmatrix} = 7$ old göre determinant özelliklerini kullanarak

$$\begin{vmatrix} r-2 & t-s & 1-u \\ -p+2u & 1+su & -w+u^2 \\ 4 & 2s & 2u \end{vmatrix}$$ determinant değerini hesaplayınız.

$$\begin{vmatrix} r-2 & t-s & 1-u \\ -p+2u & 1+su & -w+u^2 \\ 4 & 2s & 2u \end{vmatrix} = 2 \begin{vmatrix} r-2 & t-s & 1-u \\ -p+2u & 1+su & -w+u^2 \\ 2 & s & u \end{vmatrix}$$

$$2 \begin{vmatrix} r & t & 1 \\ -p & 1 & -w \\ 2 & s & u \end{vmatrix} = -2 \begin{vmatrix} r & t & 1 \\ p & -1 & w \\ 2 & s & u \end{vmatrix} = -2 \cdot 7 = -14$$

ÖR/ $$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & \cdots & n-1 & n \\ n+1 & n+2 & n+3 & \cdots & 2n-1 & 2n \\ 2n+1 & 2n+2 & 2n+3 & \cdots & 3n-1 & 3n \\ \vdots & & & & \vdots & \vdots \\ n^2-n+1 & n^2-n+2 & n^2-n+3 & \cdots & n^2-1 & n^2 \end{vmatrix} = 0$$ old gösterin

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & \cdots & n-1 & n \\ n & n & n & \cdots & n & n \\ 2n & 2n & 2n & \cdots & 2n & 2n \\ \vdots & & & & & \vdots \\ n^2-n & n^2-n & n^2-n & \cdots & n^2-n & n^2-n \end{vmatrix} = 0$$ dır.

orantılı

ÖR/

$$|A| = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & 1 & 1 & 1 & \cdots & 0 \end{vmatrix}_{n\times n} = (-1)^{n-1}(n-1)$$ olduğunu gösteriniz.

Birinci sütuna diğer sütunları ekle

$$|A| = \begin{vmatrix} n-1 & 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ n-1 & 0 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ n-1 & 1 & 0 & 1 & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ n-1 & 1 & 1 & 1 & \cdots & 0 \end{vmatrix}_{n\times n}$$

$$|A| = (n-1)\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 0 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 1 & 0 & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & \end{vmatrix}_{n\times n}$$

$$|A| = (n-1)\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 0 & -1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & -1 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & -1 \end{vmatrix}_{n\times n} = (n-1)\cdot(-1)^{n-1}$$ bulunur.

ÖR/ $n\times n$ mertebeden

$$|A| = \begin{vmatrix} x+y & x & \cdots & x \\ x & x+y & \cdots & x \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ x & x & \cdots & x+y \end{vmatrix}$$ determinant özellikleri yardımıyla hesaplayınız.

$$|A| = \begin{vmatrix} nx+y & x & \cdots & x \\ nx+y & x+y & \cdots & x \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ nx+y & x & \cdots & x+y \end{vmatrix} = (nx+y) \begin{vmatrix} y & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & y & \cdots & 0 \\ \vdots & & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & y \end{vmatrix}$$

$$= (nx+y) \cdot y^{n-1} \begin{vmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{vmatrix}$$

$$= (nx+y) y^{n-1}$$

ÖR/ A, $n\times n$ mertebeli tekil olmayan bir kare matris ve $\text{Adj}\, A$, A nın ek matrisi ise $|\text{Adj}\, A| = |A|^{n-1}$ dir. Gösteriniz.

$|\text{Ek} A| = |\text{Adj}\, A| = |A|^{n-1}$ old gösterecegiz.

$$A \cdot \text{Ek} A = \begin{bmatrix} |A| & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & |A| & \cdots & 0 \\ \vdots & & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & |A| \end{bmatrix}$$ old biliyoruz.

$$A \cdot \text{Ek} A = |A|^n \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix} = |A| \cdot I$$

birim matris

$$|A| \cdot |\text{Ek} A| = |A|^n$$

$$|\text{Ek} A| = \frac{|A|^n}{|A|} = |A|^{n-1} \text{ dir.}$$

ÖR/ A ve B , 3x3 mertebeden iki matris ve

$\det A = -7$, $\det B = 4$ olsun.

a) $\det(A^t(5B)^{-1})$ değerini hesaplayınız.

b) $\det(2A^{-1} + \mathrm{Adj}A)$ // //

a) $\det(A^t(5B)^{-1}) = \underbrace{\det A^t}_{\det A} \cdot \det\left(\frac{1}{5}B^{-1}\right)$

$= -7 \cdot \left(\frac{1}{5}\right)^3 \det B^{-1}$

$= \frac{-7}{5^3} \cdot \frac{1}{\det B} = \frac{-7}{5^3} \cdot \frac{1}{4} = \frac{-7}{500}$

Kullanılan özellikler

1) $(kA)^{-1} = \frac{1}{k} A^{-1}$

2) $|kA| = k^n |A|$ $(n \times n)$

3) $|A^{-1}| = \frac{1}{|A|}$

4) $A^{-1} = \frac{\text{EkA}}{|A|}$

5) $|A| = |A^t|$

b) $\det(2A^{-1} + \mathrm{Adj}A)) = \det\left[(2A^{-1}) + |A| \cdot A^{-1}\right]$

$= \det\left[(2A^{-1} - 7A^{-1})\right]$

$= \det\left[-5A^{-1}\right]$

$= (-5)^3 \cdot \det A^{-1}$

$= (-5)^3 \cdot \frac{1}{|A|}$

$= \frac{-125}{-7} = 125/7$

ÖR/ $A = \begin{bmatrix} x+3 & -1 & 1 \\ 5 & x-3 & 1 \\ 6 & -6 & x+4 \end{bmatrix}$ matrisinin tersinin olmaması için x bilinmeyenlesi ne olmalıdır?

Tersinin olmaması için $|A|=0$ olmalıdır.

$$|A| = \begin{vmatrix} x+3 & -1 & 1 \\ 5 & x-3 & 1 \\ 6 & -6 & x+4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x+2 & -1 & 1 \\ x+2 & x-3 & 1 \\ 0 & -6 & x+4 \end{vmatrix}$$

$$= x+2 \begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & x-3 & 1 \\ 0 & -6 & x+4 \end{vmatrix}$$

$$= (x+2) \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & x-2 & 1 \\ 0 & x-2 & x+4 \end{vmatrix}$$

$$= (x+2)(x-2) \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & x+4 \end{vmatrix}$$

$$= (x+2)(x-2) \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & x+4 \end{vmatrix}$$

$$= (x+2)(x-2) \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & x+4 \end{vmatrix}$$

$$(x+2)(x-2)(x+4) = 0$$

$x=-2$ $x=2$ $x=-4$

için matrisin tersi yoktur.

ÖR/
$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & -x \\ 1 & 1 & 1 & -x & 1 \\ 1 & 1 & -x & 1 & 1 \\ 1 & -x & 1 & 1 & 1 \\ -x & 1 & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = (x+1)^4(4-x)$$
eşitliğini determinant özelliklerini kullanarak ispatlayınız.

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & -x \\ 1 & 1 & 1 & -x & 1 \\ 1 & 1 & -x & 1 & 1 \\ 1 & -x & 1 & 1 & 1 \\ -x & 1 & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & -x \\ 0 & 0 & 0 & -1-x & 1+x \\ 0 & 0 & -1-x & 0 & 1+x \\ 0 & -1-x & 0 & 0 & 1+x \\ 0 & 1+x & 1+x & 1+x & 1-x^2 \end{vmatrix}$$

Önce 1-inci satıra göre açıp sonra tüm satırlardan $(x+1)$ çarpanı dışarı alınarak

$$\begin{vmatrix} 0 & 0 & -(1+x) & 1+x \\ 0 & -(1+x) & 0 & 1+x \\ -(1+x) & 0 & 0 & 1+x \\ 1+x & 1+x & 1+x & (1+x)(1-x) \end{vmatrix} = (x+1)(1+x)(1+x)(1+x) \begin{vmatrix} 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1-x \end{vmatrix}$$

$$(x+1)^4 \begin{vmatrix} 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 2-x \\ 1 & 1 & 1 & 1-x \end{vmatrix} = (x+1)^4(-1)^{4+1} \cdot 1 \begin{vmatrix} 0 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 2-x \end{vmatrix}$$

$$= -(x+1)^4 \begin{vmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 3-x \\ 1 & 1 & 2-x \end{vmatrix}$$

$$= -(x+1)^4(-1)^{3+1} \cdot 1 \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 3-x \end{vmatrix}$$

$$= -(x+1)^4\left[(-1)(3-x) - 1\right]$$

$$= -(x+1)^4\left[\underbrace{-3+x-1}_{-4+x}\right]$$

$$= (x+1)^4(-x+4)$$

ÖR/

$$A=\begin{vmatrix} \lambda & c & \cdots & c \\ c & \lambda & \cdots & c \\ c & c & \lambda \cdots & c \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ c & c & c \cdots & \lambda \end{vmatrix}_{n\times n}$$

matrisi veriliyor. $|A|$ yı bulunuz.

$$|A|=\begin{vmatrix} \lambda & c & \cdots & c \\ c & \lambda & \cdots & c \\ c & c & \lambda \cdots & c \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ c & c & c \cdots & \lambda \end{vmatrix}$$

2, 3 ... n-inci sütunları 1. sütuna eklersek

$$|A|=\begin{vmatrix} \lambda+(n-1)c & c & \cdots & c \\ \lambda+(n-1)c & \lambda & \cdots & c \\ \lambda+(n-1)c & c & \lambda \cdots & c \\ \vdots & \vdots & \vdots & \\ \lambda+(n-1)c & c & c \cdots & \lambda \end{vmatrix}$$

$\lambda+(n-1)c$ ortak (1. sütunda)

$$|A|=(\lambda+(n-1)c)\begin{vmatrix} 1 & c & \cdots & c \\ 1 & \lambda & & c \\ 1 & c & & c \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & c & & \lambda \end{vmatrix}$$

$$|A|=(\lambda+(n-1)c)\begin{vmatrix} 1 & c & \cdots & c \\ 0 & \lambda-c & 0 \cdots & c \\ 0 & 0 & \lambda-c \cdots & c \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 \cdots & \lambda-c \end{vmatrix}$$

$$|A|=(\lambda+(n-1)c)\,(\lambda-c)^{n-1}$$

ÖR/

A ortogonal matris ise $|A| = ?$

Ortogonal matris: A, bir kare matris olsun. $A^t = A^{-1}$ ise A matrisine ortogonal matris denir.

$A^t = A^{-1}$ her iki tarafın determinantını alalım.

$$|A^t| = |A^{-1}| \Rightarrow |A| = \frac{1}{|A|}$$

$$\left.\begin{array}{l} 1)\ |A^t| = |A| \\ 2)\ |A^{-1}| = \frac{1}{|A|} \end{array}\right\} \text{idi.}$$

$$|A|^2 = 1$$

$|A| = \mp 1$ dir.

Şöyle de yapılabilir.

$A^t = A^{-1}$ ise $A^t . A = A^{-1} A$

$$A^t . A = I$$

$$|A^t . A| = |I|$$

$$\underbrace{|A^t|} . |A| = 1$$

$|AB| = |A| . |B|$

$$|A| . |A| = 1$$

$$|A|^2 = 1$$

$|A| = \mp 1$ elde edilir.

ÖR/ A tersi olan bir matris ise ve

$A^2 = A$ ise $|A|$ yı hesaplayınız.

A matrisinin tersi olduğundan $|A| \neq 0$ dır.

$A^2 = A$ eşitliğinden

$|A^2| = |A| . |A| = |A|$ dır.

$|A| \left[(|A| - 1) \right] = 0$ bulunur.

$|A| \neq 0$ olduğundan $|A| = 1$ elde edilir.

ÖR/ Reel bileşenli $A = \begin{bmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{bmatrix}$ matrisi veriliyor.

$|A| = 5$ olduğuna göre

a) $|2A| = ?$ b) $|3A^{-1}| = ?$ nedir

A, 3x3 mertebeli matris

1) $|kA| = k^n . |A|$ $n \times n$

2) $|A^{-1}| = \dfrac{1}{|A|}$

a) $|2A| = 2^3 . |A| = 8 . 5 = 40$

b) $|3A^{-1}| = 3^3 . |A^{-1}| = 27 . \dfrac{1}{|A|} = \dfrac{27}{5}$

Lineer Denklem Sistemleri:

Tanım; $i=1,2 \ldots m$ ve $j=1,2 \ldots n$ için a_{ij} ler ve b_i ler birer reel sayı $x_1, x_2, \ldots x_n$ bilinmeyenler olmak üzere

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n &= b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n &= b_2 \\ &\vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n &= b_m \end{aligned}$$

şeklindeki bir sisteme m denklem ve n bilinmeyenden oluşan bir lineer denklem sistemi denir

Burada $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$ Katsayılar Matrisi

$X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$ bilinmeyenler ve $B = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix}$ sistemin ikinci tarafıdır.

Lineer denklem sistemini $AX=B$ şeklinde ifade edebiliriz.

Lineer Denklem Sisteminin Denk Matrisler Yardımıyla Çözümü;

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n &= b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n &= b_2 \\ &\vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n &= b_m \end{aligned}$$

lineer denk sistemini gözönüne alalım.

$$[A;B] = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} & b_m \end{bmatrix}$$

matrisine arttırılmış katsayılar matrisi denir.

Elemanter satır işlemleri ile $[A;B]$ arttırılmış katsayılar matrisinin indirgenmiş eşolan formu elde edilir.

1) $r_A \neq r_{A;B}$ ise sistemin çözümü yoktur.

2) $r_A = r_{A;B}$ " " " vardır.

a) Eğer $r=n$ ise sistemin tek çözümü vardır.

b) Eğer $r<n$ ise $n-r$ tane keyfi sabite bağlı sonsuz çözümü vardır.

Bu yönteme Gauss-Jordan yöntemi de denir.

ÖR/ $\left.\begin{aligned} -2x+y+5z&=1 \\ x+2y-z&=0 \\ 3y+2z&=1 \end{aligned}\right\}$ denk sis çözünüz.

$$[A;B] = \left[\begin{array}{ccc|c} -2 & 1 & 5 & 1 \\ 1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 3 & 2 & 1 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 0 \\ -2 & 1 & 5 & 1 \\ 0 & 3 & 2 & 1 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 5 & 3 & 1 \\ 0 & 3 & 2 & 1 \end{array}\right]$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & 3 & 2 & 1 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & 2 & 1 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -3 & -2 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & -2 \end{array}\right]$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{array}\right]$$

r_A

$r_{A;B}$

$\left.\begin{aligned} r_A = r_{A;B} &= 3 \\ n &= 3 \end{aligned}\right\}$ Tek çözüm

$x=4 \quad y=-1 \quad z=2$

ÖR/ $x+y+2z=1$ lineer denklem sistemini çözünüz.

$$\begin{aligned} x+y+2z&=1 \\ 2y+7z&=4 \\ 3x+3y+6z&=3 \end{aligned}$$

$$[A:B]=\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 7 & 4 \\ 3 & 3 & 6 & 3 \end{array}\right] \sim \underset{H_{31}(-3)}{\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 7 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]} \sim \underset{H_2(1/2)}{\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 7/2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -3/2 & -1 \\ 0 & 1 & 7/2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

$r_A = r_{A:B} = 2 \quad n=3$

$n-r = 3-2 = 1$ tane keyfi sbt bağlı sonsuz çözüm vardır.

$$x-\frac{3}{2}z=-1$$

$$y+\frac{7}{2}z=2$$

$z=2$ alalım.

$$x=\frac{3}{2}z-1=\frac{3}{2}\cdot 2-1=2$$

$$y=-\frac{7}{2}z+2=-\frac{7}{2}\cdot 2+2=-5$$

$x=2 \quad y=-5 \quad z=2$ bir çözümdür.

$z=k$ alalım.

$$x=\frac{3}{2}k-1 \qquad y=-\frac{7}{2}k+2 \qquad z=k \text{ dır.}$$

ÖR/
$$\left.\begin{aligned} 3x+2y&=7 \\ 17x+y&=0 \\ 6x+4y&=3 \end{aligned}\right\}$$ lineer denklem sistemini çözünüz.

$$[A:B]=\left[\begin{array}{cc|c} 3 & 2 & 7 \\ 17 & 1 & 0 \\ 6 & 4 & 3 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{cc|c} 3 & 2 & 7 \\ -1 & -11 & -42 \\ 0 & 0 & -11 \end{array}\right] \sim \underset{H_3(-\frac{1}{11})}{\left[\begin{array}{cc|c} 0 & -31 & -119 \\ -1 & -11 & -42 \\ 0 & 0 & 1 \end{array}\right]} \sim \underset{H_{12}}{\left[\begin{array}{cc|c} -1 & -11 & -42 \\ 0 & -31 & -119 \\ 0 & 0 & 1 \end{array}\right]}$$

$H_{21}(-6)$, $H_{31}(-2)$

$$\underset{H_2(-11)}{\left[\begin{array}{cc|c} 1 & 11 & 42 \\ 0 & 1 & 119/31 \\ 0 & 0 & 1 \end{array}\right]} \sim \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & -7/31 \\ 0 & 1 & 119/31 \\ 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$r_A = 2 \quad r_{A:B}=3$

$r_A \neq r_{A:B}$

sistemin çözümü yoktur.

Lineer Homojen Denklem Sistemleri

Tanım; $a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = 0$

$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = 0$

$\vdots \qquad\qquad \vdots$

$a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n = 0$

şeklindeki bir lineer denklem sistemine lineer homojen denklem sistemi denir.

$r_A = r_{A;B}$ olacağından denklem sisteminin her zaman çözümü vardır.

$AX = 0$ homojen denklem sistemi için $X = 0$ daima bir çözümdür. Bu çözüme aşikar çözüm denir.

$r_A = r_{A:B} = r$ olsun.

1) Eğer $r = n$ ise sistemin tek çözümü sıfır çözümdür.
2) Eğer $r < n$ " " $n-r$ keyfi sabite bağlı sonsuz çözümü vardır.

ÖR/
$$\left.\begin{array}{l} x+2y-z=0 \\ -x+y+z=0 \\ 2x+y-2z=0 \end{array}\right\}$$ lineer homojen denklem sistemini çözünüz.

$$[A;B] = \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & -2 & 0 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{cccc} 1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 0 & 0 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

$H_{21}(1)$, $H_{31}(-2)$, $H_{32}(1)$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

$H_2(1/3)$, $H_{12}(-2)$

$$\left.\begin{array}{l} r_A = r_{A;B} = 2 \\ n = 3 \end{array}\right\} n-r = 3-2 = 1 \text{ keyfi sbt}$$

$x - z = 0$

$y = 0$ $\quad z = k$ alırsak

$x = k \quad y = 0 \quad z = k$ dır.

ÖR/
$$\left.\begin{aligned}-3x+2y-3z&=0\\ 2x+5y+2z&=0\\ 4x+y-3z&=0\end{aligned}\right\}$$ lineer homojen denklem sistemini çözünüz.

$$[A;B]=\left[\begin{array}{ccc|c}-3&2&-3&0\\2&5&2&0\\4&1&-3&0\end{array}\right]\underset{H_{12}(1)}{\sim}\left[\begin{array}{ccc|c}-1&7&-1&0\\2&5&2&0\\4&1&-3&0\end{array}\right]\underset{H_1(-1)}{\sim}\left[\begin{array}{ccc|c}1&-7&1&0\\2&5&2&0\\4&1&-3&0\end{array}\right]$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c}1&-7&1&0\\0&19&0&0\\0&29&-7&0\end{array}\right]\sim\left[\begin{array}{ccc|c}1&-7&1&0\\0&1&0&0\\0&29&-7&0\end{array}\right]\sim\left[\begin{array}{cccc}1&-7&1&0\\0&1&0&0\\0&0&-7&0\end{array}\right]$$

$H_{21}(-2)$, $H_{31}(-4)$ $H_2(1/19)$ $H_{32}(-29)$

$$\left[\begin{array}{cccc}1&-7&1&0\\0&1&0&0\\0&0&1&0\end{array}\right]\sim\left[\begin{array}{ccc|c}1&0&1&0\\0&1&0&0\\0&0&1&0\end{array}\right]\sim\left[\begin{array}{ccc|c}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&1&0\end{array}\right]$$

$H_3(-1/7)$ $H_{12}(7)$ $H_{13}(-1)$ $r_A=r_{A;B}=3=n$

Tek çözüm sıfır çözümdür.

$x=0$ $y=0$ $z=0$ dır.

CRAMER YÖNTEMİ

$$\begin{aligned}a_{11}x_1+a_{12}x_2+\dots&+a_{1n}x_n=b_1\\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\dots&+a_{2n}x_n=b_2\\ \vdots\qquad\qquad&\qquad\vdots\qquad\vdots\\ a_{n1}x_1+a_{n2}x_2+\dots&+a_{nn}x_n=b_n\end{aligned}$$

lineer denklem sisteminde A, $n\times n$ mertebeden kare matris

$|A|\neq 0$ ise $AX=B$ lineer denklem sisteminin tek çözümü vardır. ve bu çözüm

$$X=\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\\vdots\\x_n\end{bmatrix}$$ dır. Burada $\Delta=|A|$ ve Δ_i $(i=1,2\dots n)$

A katsayılar matrisinde i. ninci sütun yerine

$$\left.\begin{matrix} b_1\\ b_2\\ \vdots\\ b_n\end{matrix}\right\}$$ ifadesinin yazılmasıyla elde edilen matrisin

determinantı olmak üzere $i=1,2 \ldots n$ için

$x_i = \dfrac{\Delta_i}{\Delta}$ alınarak $X=\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\ \vdots\\ x_n\end{bmatrix}$ çözümünü bulmaya

Cramer Yöntemi ile çözüm bulma denir.

ÖR/ $\left.\begin{aligned} 3x+2y-z&=9\\ y-z&=4\\ 2x+y+z&=2\end{aligned}\right\}$ denk sistemini Cramer Yöntemi ile çözünüz.

$$A=\begin{bmatrix}3&2&-1\\0&1&-1\\2&1&1\end{bmatrix}$$

$$|A|=\begin{vmatrix}3&2&-1\\0&1&-1\\2&1&1\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}5&3&0\\2&2&0\\2&1&1\end{vmatrix}=1.\begin{vmatrix}5&3\\2&2\end{vmatrix}=10-6=4$$

$H_{23}^{(1)}$, $H_{13}^{(1)}$ $\qquad \Delta=|A|=4$

$$\Delta_1=\begin{vmatrix}9&2&-1\\4&1&-1\\2&1&1\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}11&3&0\\6&2&0\\2&1&1\end{vmatrix}=1.\begin{vmatrix}11&3\\6&2\end{vmatrix}=22-18$$

$$\Delta_1=4$$

$$\Delta_2=\begin{vmatrix}3&9&-1\\0&4&-1\\2&2&1\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}5&11&0\\2&6&0\\2&2&1\end{vmatrix}=1.\begin{vmatrix}5&11\\2&6\end{vmatrix}=30-22=8$$

$$\Delta_3=\begin{vmatrix}3&2&9\\0&1&4\\2&1&2\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}-1&0&5\\-2&0&2\\2&1&2\end{vmatrix}=(-1)\begin{vmatrix}-1&5\\-2&2\end{vmatrix}=-(-2+10)=-8$$

$H_{23}^{(-1)}$, $H_{13}^{(-2)}$

$x=\dfrac{\Delta_1}{\Delta}=\dfrac{4}{4}=1$ $\quad y=\dfrac{\Delta_2}{\Delta}=\dfrac{8}{4}=2$ $\quad z=\dfrac{\Delta_3}{\Delta}=\dfrac{-8}{4}$

$z=-2$

Katsayılar Matrisinin İnversi Yardımıyla Çözüm:

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1$$
$$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = b_2$$
$$\vdots \qquad\qquad\qquad \vdots$$
$$a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \dots + a_{nn}x_n = b_n$$

lineer denklem sistemini gözönüne alalım.

$|A| \neq 0$ ise A^{-1} vardır.

$$AX = B$$
$$A^{-1}(AX) = A^{-1}B$$

$X = A^{-1}B$ elde edilir. Bu şekildeki çözüme katsayılar matrisinin tersi yardımıyla çözüm denir.

ÖR/
$$\left.\begin{aligned} x + 2y + 3z &= 5 \\ 2x + 5y + 3z &= 3 \\ x + 8z &= 17 \end{aligned}\right\}$$
lineer denklem sistemini katsayılar matrisinin tersi yardımıyla çözünüz.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 5 & 3 \\ 1 & 0 & 8 \end{bmatrix} \qquad A^{-1} = \begin{bmatrix} -40 & 16 & 9 \\ 13 & -5 & -3 \\ 5 & -2 & -1 \end{bmatrix}$$

$$X = A^{-1}B$$
$$X = \begin{bmatrix} -40 & 16 & 9 \\ 13 & -5 & -3 \\ 5 & -2 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 5 \\ 3 \\ 17 \end{bmatrix}$$

$$X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

$x = 1 \quad y = -1 \quad z = 2$

Genel örnekler;

ÖR/ $\left.\begin{array}{l} x+y+z=4 \\ 2x-2y+5z=3 \end{array}\right\}$ lineer denk sistemini çözünüz

$$[A;B]=\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 4 \\ 2 & -2 & 5 & 3 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 4 \\ 0 & -4 & 3 & -5 \end{array}\right]$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & -3/4 & 5/4 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 7/4 & 11/4 \\ 0 & 1 & -3/4 & 5/4 \end{array}\right]$$

$r_A = r_{A;B} = 2$

$n=3$

$\underset{\text{sbt}}{n-r} = 3-1 = 1$ keyfi

$x + \frac{7}{4} z = 11/4$ $\quad$ $z=k$ alalım

$y - \frac{3}{4} z = 5/4$ $\quad$ $x = -\frac{7}{4}k + 11/4$ $\quad$ Sonsuz çözüm vardır.

$y = \frac{3}{4} k + 5/4$

ÖR/ $\left.\begin{array}{l} x+3y-2z+t=4 \\ x+2y-4z-3t=6 \\ 2x+5y-5z-2t=10 \end{array}\right\}$ denk sistemini çözünüz

$$[A;B]=\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 3 & -2 & 1 & 4 \\ 1 & 2 & -4 & -3 & 6 \\ 2 & 5 & -5 & -2 & 10 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 3 & -2 & 1 & 4 \\ 0 & -1 & -2 & -4 & 2 \\ 0 & -1 & -1 & -4 & 2 \end{array}\right]$$

$H_{21}(-1)$, $H_{31}(-2)$

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & -8 & -11 & 10 \\ 0 & 1 & 2 & 4 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & -11 & 10 \\ 0 & 1 & 0 & 4 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

$H_2(-1)$, $H_{12}(-3)$, $H_{32}(1)$, $H_{23}(-2)$, $H_{13}(8)$

$r_A = r_{A;B} = 3$, $n=4$

$n-r = 4-3 = 1$ keyfi sabit

$x - 11t = 10$ $\quad$ $t=k$ alalım

$y + 4t = -2$ $\quad$ $x = 11k$ $\quad y = -4k-2$ $\quad z=0$ $\quad t=k$

$z=0$

ÖR/ $\left.\begin{array}{l} y-2z=b \\ x-y+z=2 \\ x+ay=3 \end{array}\right\}$ lineer denklem sisteminin

a) Çözümsüz

b) Tek çözümlü

c) Sonsuz çözümlü olması için

a ve b değerleri nasıl seçilmelidir?

$$[A;B]=\left[\begin{array}{ccc:c} 0 & 1 & -2 & b \\ 1 & -1 & 1 & 2 \\ 1 & a & 0 & 3 \end{array}\right] \underset{H_{12}}{\sim} \left[\begin{array}{cccc} 1 & -1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & -2 & b \\ 1 & a & 0 & 3 \end{array}\right]$$

$$\underset{H_{31}(-1)}{\left[\begin{array}{ccc:c} 1 & -1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & -2 & b \\ 0 & a+1 & -1 & 1 \end{array}\right]} \sim \underset{H_{12}(1)\ ,\ H_{32}(-a-1)}{\left[\begin{array}{ccc:c} 1 & 0 & -1 & 2+b \\ 0 & 1 & -2 & b \\ 0 & 0 & 2a+1 & 1-ab-b \end{array}\right]}$$

a) Çözümsüz $\quad r_A \neq r_{A;B}$ olmalıdır.

$r_A = 2$ iken $r_{A;B}=3$ olmalı

Yani $2a+1=0$ iken $1-ab-b\neq 0$ olmalıdır.

$a=-\frac{1}{2}$ ve $b\neq 2$ bulunur.

b) Tek çözümlü $\quad r_A = r_{A;B} = n = 3$ olmalı

O da $2a+1\neq 0$ ise tek çözüm vardır.

$a\neq -\frac{1}{2}$ 〃 〃 〃

c) Sonsuz çözüm $\quad r_A = r_{A;B} < 3 \ (n<r)$ olmalı

$2a+1=0$ ve $1-ab-b=0$ olmalı olmalı.

$a=-\frac{1}{2}$ ve $b=2$ olmalıdır.

ÖR/ $2x-y+2az+t=b$

$2x-y+(2a+1)z+(a+1)t=0$

$-2x+y+(1-2a)z-2t=-2b-2$

} lineer denklem sisteminin

a) Çözümsüz b) Tek çözümlü c) Sonsuz çözümlü

olması için a ve b değerleri nasıl seçilmelidir?

$$[A;B]=\begin{bmatrix} 2 & -1 & 2a & 1 & b \\ 2 & -1 & 2a+1 & a+1 & 0 \\ -2 & 1 & 1-2a & -2 & -2b-2 \end{bmatrix} \sim$$

$$\begin{bmatrix} 2 & -1 & 2a & 1 & b \\ 0 & 0 & 1 & a & -b \\ 0 & 0 & 1 & -1 & -b-2 \end{bmatrix}$$

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 2 & -1 & 2a & 1 & b \\ 0 & 0 & 1 & a & -b \\ 0 & 0 & 0 & -a-1 & -2 \end{array}\right]$$

a) Çözümsüz $r_{A;B} \neq r_A$ olmalı. $-a-1=0$ ise $\underline{a=-1}$ de

$r_A=2$ $r_{A;B}=3$ olur. $b\in\mathbb{R}$

b) Tek çözümlü $r_A=r_{A;B}=n=4$

$r_{A;B}=r_A$ en fazla 3 olabilir. Sistemin tek çözümü yoktur.

c) $r_{A;B}=r_A<n$ olmalı $r_{A;B}=r_A=3<n$ olduğundan

$-a-1\neq 0$ olmalı. $(a\neq -1)$ için sonsuz çözüm var.

$b\in\mathbb{R}$

ÖR/
$$\left.\begin{aligned}(a-1)x_1 + 2x_2 &= 0\\ 2x_1 + (a-1)x_2 &= 0\end{aligned}\right\}$$ Lineer denklem sisteminin

a) Sonsuz çözümü olması,

b) Tek çözümünün sıfır çözüm olmasını sağlayan a değerlerini bulunuz.

a)
$$\begin{bmatrix} a-1 & 2 \\ 2 & a-1 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 2 & a-1 \\ a-1 & 2 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 2/2 & \frac{a-1}{2} \\ a-1 & 2 \end{bmatrix} \sim$$

$$\begin{bmatrix} 1 & \frac{a-1}{2} \\ a-1 & 2 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & \frac{a-1}{2} \\ 0 & \frac{-a^2+2a+3}{2} \end{bmatrix}$$

$\frac{-a^2+2a+3}{2} = 0$ ise (yani $-a^2+2a+3=0$ ise)

$a=3$ veya $a=-1$ dir.

$n=2$ (bilinmeyen sayısı) $r=1$ olacağından

$n-r=1$ parametreye bağlı sonsuz çözüm vardır.

b) $\frac{-a^2+2a+3}{2} \neq 0$ ise yani $a\neq 3$ ve $a \neq -1$

ise $n=r$ olduğundan tek çözüm sıfır çözümdür. (Denklem sisteminin homojen denklem sistemi olduğuna dikkat edelim.

ÖR/ $\left.\begin{array}{l} x+y+z=3 \\ x+4y-z=4 \\ x+y+(a^2-8)z=a \end{array}\right\}$ Lineer denklem sisteminin

a) Çözümünün olmaması

b) Tek çözümünün olması

c) sonsuz çözümünün olması için a nasıl seçilmelidir.

$$[A;B]=\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 1 & 4 & -1 & 4 \\ 1 & 1 & a^2-8 & a \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 3 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & a^2-9 & a-3 \end{array}\right]$$

c) $a-3=0$ ise yani $a=3$ ise $r=2$ $n=3$ olduğundan $n-r=3-2=1$ tane keyfi sabite bağlı sonsuz çözüm vardır.

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 3 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$ şeklinde olur.

a) $a-3 \neq 0$ ise

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 3 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & (a-3)(a+3) & a-3 \end{array}\right]$$ 3. satır $a-3$ ile bölünürse

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 3 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & a+3 & 1 \end{array}\right]$$ olur. $a+3=0$ ise $(a=-3)$ sistemin çözümü yoktur.

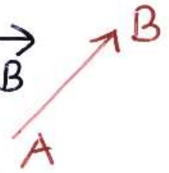
$r_A=2$ $r_{A:B}=3$ olduğundan

b) $a \neq \mp 3$ ise tek çözüm vardır.

Çünkü $n=r$ olur.

Vektörler:

Vektörel büyüklükler vektör adı verilen yönlü doğru parçaları ile gösterilirler. Vektör, belirli bir uzunluğa, belirli bir doğrultuya ve belirli bir yöne sahip bulunan bir doğru parçasıdır.

$\overrightarrow{AB}$ 

$|\overrightarrow{AB}|$ vektörün modülü veya uzunluğu

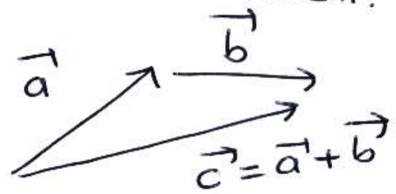
Vektörlerin eşitliği:

$\vec{a}$ ve $\vec{b}$ gibi iki vektör alalım. $\vec{a}$ ve $\vec{b}$ vektörlerinin başlangıç noktaları farklı fakat doğrultu, yön ve büyüklükleri (modülleri) aynı ise $\vec{a}$ ve $\vec{b}$ vektörü eşittir denir $\vec{a}=\vec{b}$ ile gösterilir.

İki vektörün Toplamı ve Farkı

$\vec{a}$ ve $\vec{b}$ iki vektör olsun.

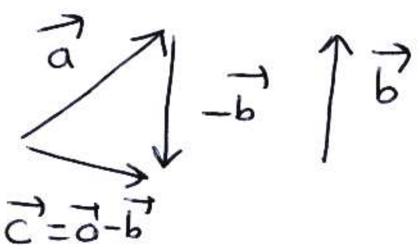
$\vec{c}=\vec{a}+\vec{b}$



$\vec{a}+\vec{b}=\vec{b}+\vec{a}$ dır.

$\vec{a}-\vec{b}$ farkı $\vec{a}$ ve $(-\vec{b})$ vektörlerinin toplamı olup

$\vec{c}=\vec{a}-\vec{b}=\vec{a}+(-\vec{b})$ şeklinde ifade edilir.



Bir vektörün bir skalerle çarpımı

$\vec{a}$ vektörünün m gibi bir pozitif sayı ile çarpımı olan $m\vec{a}$ vektörü $\vec{a}$ vektörü ile aynı doğrultu ve yöndedir.

$|m\vec{a}| = m|\vec{a}|$ dır.

$m<0$ ise $\vec{a}$ ve $m\vec{a}$ nın doğrultuları aynı yönleri birbirinin tersidir.

Birim vektör; $\vec{u} = \frac{1}{|\vec{a}|}.\vec{a}$, $\vec{a}$ vektörü ile aynı doğrultu ve yöne sahip olan modülü 1 olan bir vektördür.

Vektörlerin Oxyz eksen takımı üzerinde tanımlanması

Uzaydaki bir vektör $\vec{a} = (a_1, a_2, a_3)$ şeklinde gösterilir.

a_1, a_2, a_3: vektörün bileşenleri

Düzlemde ise $\vec{a} = (a_1, a_2)$ dir.

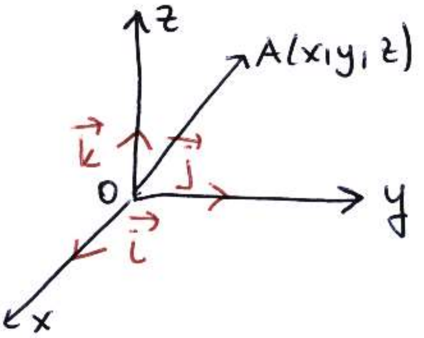
Bileşenlerinin hepsi sıfır olan vektöre sıfır vektör denir. $\vec{0} = (0,0,0)$ dır.

$\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ birim vektörleri

$\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ vektorleri O_x, O_y, O_z eksenleri doğrultusundaki birim vektörlerdir. Buna göre

$\vec{i} = (1,0,0)$ $\vec{j} = (0,1,0)$ $\vec{k} = (0,0,1)$ dir.

Uzayda bir $A(x,y,z)$ noktası alalım.



$\overrightarrow{OA}$ vektörü A noktasının yer vektörüdür.

$\overrightarrow{OA} = \vec{a} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$

şeklindedir.

Bu bir vektörün bu şekilde ifadesine kartezyen birim (baz) vektörleri cinsinden ifadesi denir.

$|\vec{a}| = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$ dır.

Tanım: $\vec{a} = x_1\vec{i} + y_1\vec{j} + z_1\vec{k}$

$\vec{b} = x_2\vec{i} + y_2\vec{j} + z_2\vec{k}$

ise $\vec{a}+\vec{b} = (x_1+x_2)\vec{i} + (y_1+y_2)\vec{j} + (z_1+z_2)\vec{k}$ dır.

k bir skaler ise

$k\vec{a} = kx_1\vec{i} + ky_1\vec{j} + kz_1\vec{k}$ dır.

Skaler Çarpım:

$\vec{a}$ ve $\vec{b}$ gibi iki vektörün skaler çarpımı, bu vektörlerin a ve b büyüklükleriyle vektörler arasındaki açının kosinüsü çarpımına eşittir.

$$\vec{a}\cdot\vec{b} = |\vec{a}|\,|\vec{b}|\cos\theta$$

İki vektörün skaler çarpımı bir skaler sayıdır.

1) $\vec{a}\cdot\vec{b} = \vec{b}\cdot\vec{a}$

2) $\vec{a}\cdot(\vec{b}+\vec{c}) = \vec{a}\cdot\vec{b} + \vec{a}\cdot\vec{c}$

3) $m(\vec{a}\cdot\vec{b}) = (m\vec{a})\cdot\vec{b} = \vec{a}\cdot(m\vec{b})$

4) $\vec{i}\cdot\vec{i} = \vec{j}\cdot\vec{j} = \vec{k}\cdot\vec{k} = 1$

$\vec{i}\cdot\vec{j} = \vec{j}\cdot\vec{k} = \vec{k}\cdot\vec{i} = 0$

5) $\vec{a} \cdot \vec{a} = a_1^2 + a_2^2 + a_3^2$ $\quad (\vec{a} = a_1\vec{i} + a_2\vec{j} + a_3\vec{k})$

6) Eğer $\vec{a} \cdot \vec{b} = 0$ ve $\vec{a}$ ve $\vec{b}$ vektörleri sıfır vektör değilse $\vec{a}$ ve $\vec{b}$ dik vektörlerdir.

ÖR/ $\vec{a} = 2\vec{i} + 3\vec{j} - \vec{k}$ ve $\vec{b} = \vec{i} + 2\vec{k}$ vektörlerinin birbirine dik olduğunu gösteriniz.

$\vec{a} \cdot \vec{b} = 0$ olmalı

$$(2\vec{i} + 3\vec{j} - \vec{k}) \cdot (\vec{i} + 2\vec{k}) = 2 - 2 = 0$$

$\vec{a}$ ve $\vec{b}$ dik vektörlerdir.

İki vektör arasındaki açı;

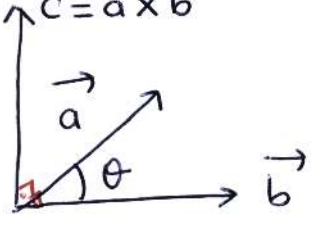
$\vec{a} = a_1\vec{i} + a_2\vec{j} + a_3\vec{k}$, $\vec{b} = b_1\vec{i} + b_2\vec{j} + b_3\vec{k}$

ise

$$\cos\theta = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| . |\vec{b}|} \text{ dir.}$$

Vektörel Çarpım:

$\vec{a}$ ve $\vec{b}$ iki vektör açı θ olsun.



$$\vec{c} = \vec{a} \times \vec{b} = |\vec{a}|\,|\vec{b}|\,\sin\theta . \vec{u}$$

Vektörel çarpım bu iki vektörün belirttiği düzleme dik doğrultuda bir vektördür. $\vec{c} \perp \vec{a}$ ve $\vec{c} \perp \vec{b}$ dir.

$\vec{u}$ vektörü $\vec{c}$ ile aynı doğrultu ve yönde birim vektördür.

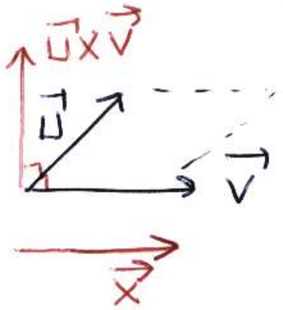
$\vec{a}\cdot(\vec{b}\times\vec{c})$ karışık çarpımı $\vec{a}, \vec{b}$ ve $\vec{c}$ vektörleri üzerine kurulan paralel yüzlünün hacmine eşittir.

İki kat vektörel çarpım:

$\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ üç vektör olmak üzere $\vec{a}\times(\vec{b}\times\vec{c})$ ifadesine üç vektörün iki kat vektörel çarpımı denir.

ÖR/ $\vec{u}=\vec{i}+3\vec{k}$, $\vec{v}=3\vec{i}+2\vec{j}+\vec{k}$ vektörlerinin belirttiği düzleme paralel olan $\vec{w}=\vec{i}-2\vec{j}$ vektörüne dik olan bir birim vektör bulunuz.

Bir $\vec{x}$ vektörü alalım. $\vec{x}$ vektörü $\vec{u}$ ve $\vec{v}$'nin belirttiği düzleme paralel olduğundan $\vec{u}\times\vec{v}$ vektörel çarpımına diktir.



$$\left.\begin{aligned} &1)\ (\vec{u}\times\vec{v})\cdot\vec{x}=0 \\ &2)\ \vec{x}\cdot\vec{w}=0 \end{aligned}\right\}$$

$\vec{x}=a\vec{i}+b\vec{j}+c\vec{k}$ olsun.

$$\vec{u}\times\vec{v}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ 1 & 0 & 3\\ 3 & 2 & 1\end{vmatrix}$$
$$=-6\vec{i}+8\vec{j}+2\vec{k}$$

$(\vec{u}\times\vec{v})\cdot\vec{x}=0$

$-6a+8b+2c=0$

$\vec{x}\cdot\vec{w}=0$

$a-2b=0$

$$-6a+8b+2c=0$$
$$a-2b=0$$
$$a=2b$$
$$c=2b \text{ olur.}$$

$$\frac{\vec{x}}{|\vec{x}|}=\mp\frac{b(2\vec{i}+\vec{j}+2\vec{k})}{\sqrt{b^2(4+1+4)}}=\mp\left(\frac{2}{3}\vec{i}+\frac{1}{3}\vec{j}+\frac{2}{3}\vec{k}\right)$$

olur

Vektörel çarpım bir vektördür.

1) $\vec{a} \times \vec{b} = -\vec{b} \times \vec{a}$

2) $\vec{a} \times (\vec{b} + \vec{c}) = \vec{a} \times \vec{b} + \vec{a} \times \vec{c}$

3) $m(\vec{a} \times \vec{b}) = (m\vec{a}) \times \vec{b} = \vec{a} \times (m\vec{b})$ m skaler

4) $\vec{i} \times \vec{i} = \vec{j} \times \vec{j} = \vec{k} \times \vec{k} = 0$

$\vec{i} \times \vec{j} = \vec{k}$, $\vec{j} \times \vec{k} = \vec{i}$, $\vec{k} \times \vec{i} = \vec{j}$

5) $\vec{a} = a_1\vec{i} + b_1\vec{j} + c_1\vec{k}$

$\vec{b} = a_2\vec{i} + b_2\vec{j} + c_2\vec{k}$

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \end{vmatrix}$$

6) Eğer $\vec{a}$ ve $\vec{b}$ sıfır vektör değil ve $\vec{a} \times \vec{b} = 0$ ise $\vec{a}$ ve $\vec{b}$ paralel vektörlerdir.

7) $|\vec{a} \times \vec{b}| = |\vec{a}|\,|\vec{b}| \cdot \sin\theta$ dır.

$|\vec{a} \times \vec{b}|$, $\vec{a}$ ve $\vec{b}$ vektörleri üzerine kurulan paralel kenarın alanına eşittir.

$\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ vektörlerinin Karışık Çarpımı

$\vec{a} \cdot (\vec{b} \times \vec{c})$, $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ vektörlerinin karışık çarpımıdır. Sonuç skalerdir.

$\vec{a} = a_1\vec{i} + b_1\vec{j} + c_1\vec{k}$

$\vec{b} = a_2\vec{i} + b_2\vec{j} + c_2\vec{k}$

$\vec{c} = a_3\vec{i} + b_3\vec{j} + c_3\vec{k}$

$$\vec{a} \cdot (\vec{b} \times \vec{c}) = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$$ tur.

ÖR/ $A(1,2,3)$ $B(-1,2,-3)$, $C(-1,4,2)$ noktaları veriliyor.

1) $\vec{AB}, \vec{AC}$ vektörlerine dik olan birim vektör bulunuz.

2) Bu noktalardan geçen düzlemin denklemini bulunuz.

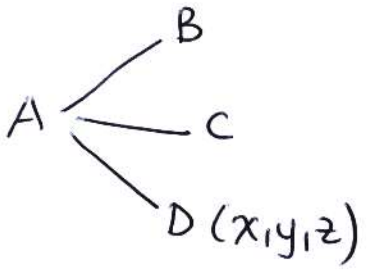
1) $$\vec{AB} = \vec{b} - \vec{a} = -2\vec{i} - 6\vec{k}$$

$$\vec{AC} = \vec{c} - \vec{a} = -2\vec{i} + 2\vec{j} - \vec{k}$$

$$\vec{AB} \times \vec{AC} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -2 & 0 & -6 \\ -2 & 2 & -1 \end{vmatrix} = 12\vec{i} + 10\vec{j} - 4\vec{k}$$

$$\vec{u} = \frac{\vec{AB} \times \vec{AC}}{|\vec{AB} \times \vec{AC}|} = \mp \frac{12\vec{i} + 10\vec{j} - 4\vec{k}}{\sqrt{144 + 100 + 16}} = \mp \frac{12\vec{i} + 10\vec{j} - 4\vec{k}}{2\sqrt{65}}$$

2)



$$\vec{AB} = -2\vec{i} - 6\vec{k}$$

$$\vec{AC} = -2\vec{i} + 2\vec{j} - \vec{k}$$

$$\vec{AD} = (x-1)\vec{i} + (y-2)\vec{j} + (z-3)\vec{k}$$

$\vec{AB}, \vec{AC}, \vec{AD}$ vektörleri üzerine kurulan paralel yüzlünün hacmi 0 ise (yani $\vec{AB} \cdot (\vec{AC} \times \vec{AD}) = 0$) bu üç vektör bir uzay şekli meydana getirmez aynı düzlemdedir demektir.

$$\vec{AB} \cdot (\vec{AC} \times \vec{AD}) = \begin{vmatrix} -2 & 0 & -6 \\ -2 & 2 & -1 \\ x-1 & y-2 & z-3 \end{vmatrix} = 0$$

$$12(x-1) + 10(y-2) - 4(z-3) = 0$$

$12x + 10y - 4z = 20$ bulunur.

ÖR/ $A(2,0,1)$ $B(3,-1,2)$ $C(0,1,-1)$ $D(m,1,1)$ noktalarının aynı düzlemde olması için m ne olmalıdır?

$$\overrightarrow{AB} = (1,-1,1) \qquad \overrightarrow{AC} = (-2,1,-2)$$

$$\overrightarrow{AD} = (m-2,1,0)$$

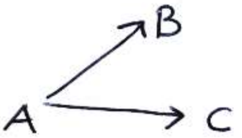
$\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{AD}$ vektörleri aynı düzlemde olduklarından $\overrightarrow{AB} \cdot (\overrightarrow{AC} \times \overrightarrow{AD}) = 0$ olmalıdır.

$$\overrightarrow{AB} \cdot (\overrightarrow{AC} \times AD) = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -2 & 1 & -2 \\ m-2 & 1 & 0 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ m-2 & 1 & 0 \end{vmatrix} = m-2=0$$

$m=2$ bulunur.

ÖR/ Köşeleri $A(1,0,-1)$, $B(2,-1,1)$ ve $C(3,1,0)$ olan $\overset{\triangle}{ABC}$ üçgeninin alanını bulunuz.



$$\overrightarrow{AB} = \vec{i} - \vec{j} + 2\vec{k}$$

$$\overrightarrow{AC} = 2\vec{i} + \vec{j} + \vec{k}$$

$$\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & -1 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \end{vmatrix} = -3\vec{i} + 3\vec{j} + 3\vec{k}$$

$$S = \frac{1}{2} \left| \overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} \right| = \frac{1}{2}\sqrt{(-3)^2+3^2+3^2} = \frac{1}{2}\sqrt{27} \text{ br}^2$$

VEKTÖR UZAYLARI

Tanım: Bir V kümesi üzerinde tanımlı $\oplus$ ve $\odot$ işlemlerine göre aşağıdaki özellikler sağlanıyorsa V'ye bir reel vektör uzayı denir.

1) Her $u, v \in V$ için $u \oplus v \in V$
2) Her $u, v \in V$ için $u \oplus v = v \oplus u$
3) Her $u, v, w \in V$ için $u \oplus (v \oplus w) = (u \oplus v) \oplus w$
4) Her $u \in V$ için $u \oplus 0 = 0 \oplus u = u$ olacak şekilde V de bir 0 elemanı vardır.
5) Her $u \in V$ için $u \oplus (-u) = (-u) \oplus u = 0$ olacak şekilde V de bir $-u$ elemanı vardır.
6) Her $u \in V$ ve her $c \in \mathbb{R}$ için $c \odot u \in V$ dir.
7) Her $u, v \in V$ ve $c \in \mathbb{R}$ için $c \odot (u \oplus v) = (c \odot u) \oplus (c \odot v)$ dur.
8) Her $u \in V$ ve her $c, d \in \mathbb{R}$ için $(c \oplus d) \odot u = (c \odot u) \oplus (d \odot u)$ dur.
9) Her $u \in V$ ve her $c, d \in \mathbb{R}$ için $c \odot (d \odot u) = (c.d) \odot u$ dur.
10) Her $u \in V$ için $1 \odot u = u$ dur.

Vektör uzayı V nin elemanlarına vektör, $\mathbb{R}$ nin (reel sayıların) elemanlarına skaler denir. $\oplus$ işlemine vektörel toplam, $\odot$ işlemine de skaler çarpım adı verilir.

ÖR/ $V = \mathbb{R}$ olsun. Toplama ve skalerle çarpma işlemi

$$x \oplus y = 3x + 3y \quad \text{ve} \quad k \odot x = kx \quad \text{ile tanımlansın.}$$

Vektör uzayı koşullarından değişme özelliğinin sağlandığını ama birleşme özelliğinin sağlanmadığını gösterelim.

1) $x \oplus y \stackrel{?}{=} y \oplus x$

$x \oplus y = 3x+3y$

$y \oplus x = 3y+3x$

$x \oplus y = y \oplus x$ Böylece $\oplus$ işlemine göre V değişmelidir.

2) $(x \oplus y) \oplus z \stackrel{?}{=} x \oplus (y \oplus z)$

$$(x \oplus y) \oplus z = (3x+3y) \oplus z = 3(3x+3y)+3z = 9x+9y+3z$$

$$x \oplus (y \oplus z) = x \oplus (3y+3z) = 3x+3(3y+3z) = 3x+9y+9z$$

$\neq$

Birleşme özelliği yoktur. V nin vektör uzayı olmadığı görülür.

ÖR/ $V=\mathbb{R}$ olsun. Toplama ve skalerle çarpma işlemi

$x \oplus y = x^y$ ve $k \odot x = kx$ şeklinde

tanımlansın. V nin vektör uzayı olmadığını gösterelim.

$x \oplus y = x^y$

$y \oplus x = y^x$

olup $x^y \neq y^x$ olduğundan V vektör uzayı değildir.

ÖR/ $V = \{(x,y) \mid x,y \in R\}$ $s=(s_1,s_2)$ ve $t=(t_1,t_2)$ olsun.

$$(s_1,s_2) \oplus (t_1,t_2) = (s_1+t_1+2,\ s_2+t_2+2)$$

ve

$$c \odot (s_1,s_2) = (cs_1+c-1,\ cs_2+c-2)$$

işlenleri ile tanımlansın. V nin bir vektör uzayı olduğunu gösteriniz.

V, toplama ve skalerle çarpma işlenme göre kapalıdır. Toplama işlemine göre değişme ve birleşme özelliklerde sağlanır.

Her $s=(s_1,s_2) \in V$ için $e=(t_1,t_2) \in V$ için toplamaya göre etkisiz eleman bulunmaktadır. Şöyle ki

$s \oplus e = s$ veya $(s_1+t_1+2,\ s_2+t_2+2) = (s_1,s_2)$ dir.

$$s_1+t_1+2=s_1 \quad \text{ve} \quad s_2+t_2+2=s_2$$

$$t_1=-2 \quad \text{ve} \quad t_2=-2 \text{ olur.}$$

Bu da toplamsal etkisiz elemanın $e=0=(-2,-2)$ olduğunu gösterir.

V deki her bir (s_1,s_2) elemanının toplamsal tersinin olduğunu göstermek için

$s \oplus t = 0 = (-2,-2)$ olacak şekilde bir (t_1,t_2) vektörü olduğunu bulmalıyız.

$s \oplus t = (s_1 + t_1 + 2,\ s_2 + t_2 + 2)$ oldupundan

$s_1 + t_1 + 2 = -2$ ve $s_2 + t_2 + 2 = -2$ olur.

$t_1 = -4 - s_1$ ve $t_2 = -4 - s_2$ elde edilir.

V deki herhangi bir (s_1, s_2) elemanının inversi

$-s = (-s_1 - 4, -s_2 - 4)$ olacaktır.

ÖR/ $n \times 1$ mertebeli reel elemanlı $\begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix}$ şeklindeki matrislerin kümesi R^n üzerinde $\oplus$ işlemini matris toplamı ve $\odot$ işlemini de bir matrisin bir reel sayı ile çarpımı olarak alırsak vektör uzayı aksiyomlarını sağladığını görürüz. R^2 de bir $\begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}$ vektörü şeklinde ifade edilebilir.

ÖR/ $\oplus$ işlemini matris toplamı ve $\odot$ işlemini de bir matrisin bir reel sayı ile çarpımı olarak alırsak $m \times n$ mertebesindeki tüm reel matrislerin kümesi bir vektör uzayıdır. Bu vektör uzayı $M_{m \times n}$ ile gösterilir.

ÖR/ n bir pozitif sabit tamsayı olsun. Derecesi n yada daha küçük bütün polinomlar ve sıfır polinomunun oluşturduğu küme P_n ile gösterilsin.

P_n'nin bir vektör uzayı olduğunu gösterebiliriz.

$p(x) \oplus q(x) = (a_0 + b_0) + (a_1 + b_1)x + \dots + (a_n + b_n)x^n$ Toplama İşlemi

$c \odot p(x) = ca_0 + ca_1 x + \dots + ca_n x^n$ skalerle çarpma

Teorem; V bir reel vektör uzayı olsun.

1) Her $u \in V$ için $0 \odot u = 0$
2) Her $c \in \mathbb{R}$ için $c \odot 0 = 0$
3) Eğer $c \odot u = 0$ ise $c = 0$ veya $u = 0$ dır.
4) Her $u \in V$ için $(-1) \odot u = -u$ dur.

Tanım; ALT UZAY

V bir reel vektör uzayı ve W, V nin boştan farklı bir alt kümesi olsun. Eğer W, V deki işlemlere göre bir vektör uzayı ise W ye V nin bir alt vektör uzayı denir.

Teorem; V bir reel vektor uzayı W, V nin boştan farklı bir alt kümesi olsun. Bu durumda W nin V nin bir alt uzayı olması için gerek ve yeter koşul aşağıdaki ifadelerin sağlanmasıdır.

1) Her $u, v \in W$ için $u \oplus v \in W$ dir.
2) Her $u \in W$ ve her $c \in \mathbb{R}$ için $c \odot u \in W$ dir.

ÖR/ $\mathbb{R}^2$ nin, $W = \left\{ \begin{bmatrix} x \\ x+1 \end{bmatrix} \; x \in \mathbb{R} \right\}$ şeklinde tanımlanan alt kümesinin bir alt uzay olup olmadığını gösteriniz.

W nin iki vektörü $w_1 = \begin{bmatrix} x \\ x+1 \end{bmatrix}$ $w_2 = \begin{bmatrix} y \\ y+1 \end{bmatrix} \in W$ olsun.

$$w_1 + w_2 = \begin{bmatrix} x \\ x+1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} y \\ y+1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x+y \\ x+y+2 \end{bmatrix} \notin W$$ yani

$w_1 + w_2 \notin W$ olduğundan
W, $\mathbb{R}^2$ nin bir alt uzayı değildir.

ÖR/ 2×2 mertebesinden vektör uzayı $M_{2\times 2}$ olsun. İzi 0 olan tüm 2×2 mertebeli matrislerin kümesi W olsun. Yani

$$W = \left\{ \begin{bmatrix} x & y \\ z & t \end{bmatrix} \quad x+t=0 \right\} \text{ olsun.}$$

W nın $M_{2\times 2}$ nın alt uzayı olup olmadığını gösteriniz.

$$w_1 = \begin{bmatrix} x_1 & y_1 \\ z_1 & t_1 \end{bmatrix} \in W \quad w_2 = \begin{bmatrix} x_2 & y_2 \\ z_2 & t_2 \end{bmatrix} \in W$$

$$x_1 + t_1 = 0 \qquad\qquad x_2 + t_2 = 0$$

$$w_1 + w_2 = \begin{bmatrix} x_1 & y_1 \\ z_1 & t_1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} x_2 & y_2 \\ z_2 & t_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 + x_2 & y_1 + y_2 \\ z_1 + z_2 & t_1 + t_2 \end{bmatrix}$$

$w_1 + w_2$ nın izi;

$$x_1 + x_2 + t_1 + t_2 = \underbrace{(x_1 + t_1)}_{0} + \underbrace{(x_2 + t_2)}_{0} = 0 \text{ dır}$$

c herhangi bir skaler olmak üzere

$$c \cdot w_1 = c \begin{bmatrix} x_1 & y_1 \\ z_1 & t_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} cx_1 & cy_1 \\ cz_1 & ct_1 \end{bmatrix}$$

$$cx_1 + ct_1 = c(x_1 + t_1) = 0$$

Sonuç olarak W, $M_{2\times 2}$ nın bir alt uzayıdır.

ÖR/ V, derecesi 3 olan bütün polinomların kümesi olsun. V, P_n bir alt kümesidir. Ancak

$$3x^3 + 4x^2 - 5x - 1 \quad \text{ve} \quad -3x^3 - 4x^2 + 3x - 3$$

polinomlarının toplamı $-2x-4$ dür ve birinci dereceden bir polinom olduğundan V de olmadığı için V, P_n nın bir alt uzayı değildir.

Tanım; V vektör uzayında $v_1, v_2, \ldots v_m$ m tane vektör ve $c_1, c_2 \ldots c_m$ m tane skaler olmak üzere bir v vektörü

$$v = c_1 v_1 + c_2 v_2 + \ldots + c_m v_m$$ şeklinde ifade edilirse v vektörü $v_1, v_2, \ldots, v_m$ vektörlerinin bir lineer kombinasyonu olarak yazılır denir.

ÖR/ R^3 de $v = \begin{bmatrix} 5 \\ 6 \\ 9 \end{bmatrix}$ vektörünün $v_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}, v_2 = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix}, v_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix}$ vektörlerinin lineer kombinasyonu olarak ifade edildiğini gösterelim.

$$c_1 v_1 + c_2 v_2 + c_3 v_3 = v$$ olacak şekilde c_1, c_2, c_3 bulunabilirse v vektörü v_1, v_2, v_3 ün lineer kombinasyonu olarak ifade edilir.

$$c_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} + c_2 \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix} + c_3 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ 6 \\ 9 \end{bmatrix}$$

$$\left.\begin{aligned} c_1 + 2c_2 + c_3 &= 5 \\ 2c_1 + 2c_2 + c_3 &= 6 \\ c_1 + 2c_2 + 3c_3 &= 9 \end{aligned}\right\}$$ denklem sistemi çözülürse $c_1 = 1$ $c_2 = 1$ $c_3 = 2$ bulunur.

$v = v_1 + v_2 + 2v_3$ olur.

Denklem sistemini çözelim

$$[A;B] = \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 5 \\ 2 & 2 & 1 & 6 \\ 1 & 2 & 3 & 9 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 5 \\ 0 & -2 & -1 & -4 \\ 0 & 0 & 2 & 4 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 5 \\ 0 & -2 & -1 & -4 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 5 \\ 0 & -2 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{array}\right]$$

$H_{21}(-2)$, $H_{31}(-1)$, $H_3\left(\frac{1}{2}\right)$ $\qquad H_{23}(1)$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 5 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{array}\right] \begin{array}{l} \to c_1 \\ \to c_2 \\ \to c_3 \end{array}$$

$H_2\left(-\frac{1}{2}\right)$ $\qquad H_{13}(-1)$ $\qquad H_{12}(-2)$

$r_A = r_{A;B} = 3 = n$

Tek çözüm

Tanım; V vektör uzayında $S=\{v_1, v_2 \dots v_m\}$ V deki vektörlerin kümesi olsun. S deki vektörlerin tüm lineer kombinasyonlarından oluşan

$$\langle S \rangle = \{c_1v_1 + c_2v_2 + \dots + c_mv_m \mid c_1, c_2 \dots c_m \in R\}$$

V nın bir vektör uzayıdır. $\langle S \rangle$ alt uzayına S kümesinin gerdiği veya ürettiği alt uzay denir.

ÖR/ $S = \left\{ \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \right\}$ şeklinde verilen S kümesi gözönüne alınsın. Bu durumda $c_1, c_2, c_3 \in R$ olmak üzere $\langle S \rangle$ ikinci mertebeden tüm simetrik matrislerin kümesidir.

$$c_1 \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + c_2 \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} + c_3 \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_1 & c_2 \\ c_2 & c_3 \end{bmatrix}$$

Burada $V = M_{2\times2}$ matrisler $S = \{\underbrace{v_1, v_2, v_3}_{\text{simetrik matrisler}}\}$

Yani $\langle S \rangle$, $c_1, c_2, c_3 \in R$ olmak üzere $\begin{bmatrix} c_1 & c_2 \\ c_2 & c_3 \end{bmatrix}$ formundaki tüm simetrik matrislerin oluşturduğu $M_{2\times2}$ kümesidir.

ÖR/ R^3 vektör uzayının alt kümesi

$S = \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$ olsun. $V = \begin{bmatrix} 6 \\ 8 \\ -2 \end{bmatrix}$ vektörünün $\langle S \rangle$ ye ait olduğunu gösteriniz.

v, $\langle S \rangle$ de ise

$$c_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} + c_2 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix} + c_3 \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 \\ 8 \\ -2 \end{bmatrix}$$

$$\left.\begin{aligned} c_1 + c_2 + c_3 &= 6 \\ c_1 + c_2 - c_3 &= 8 \\ c_1 - c_2 + c_3 &= -2 \end{aligned}\right\}$$

denk çözülürse $c_1 = 3$ $c_2 = 4$ $c_3 = -1$ bulunur.

v vektörü $\langle S \rangle$ dedir.

ÖR/ İkinci mertebeden tüm ters simetrik matrislerin kümesi W olsun. W nin tüm 2x2 matrislerin vektör uzayı olan M_{2x2} nin altuzayı olup olmadığını araştırınız.

$$W = \left\{ \begin{bmatrix} 0 & -x \\ x & 0 \end{bmatrix} \mid x \in R \right\} \text{dir.}$$

$w_1 = \begin{bmatrix} 0 & -a \\ a & 0 \end{bmatrix}$ $w_2 = \begin{bmatrix} 0 & -b \\ b & 0 \end{bmatrix}$ wde iki matris

ve k da bir skaler olsun.

$$w_1 + w_2 = \begin{bmatrix} 0 & -a \\ a & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & -b \\ b & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -(a+b) \\ a+b & 0 \end{bmatrix} \in W.$$

$$cw_1 = \begin{bmatrix} 0 & -ca \\ ca & 0 \end{bmatrix} \in W$$

$w_1 + w_2 \in W$, $cw_1 \in W$ olduğundan W, M_{2x2} nin alt uzayıdır.

ÖR/ $\langle S \rangle = \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 \\ 5 \\ 1 \end{bmatrix} \right\} = R^3$ old gösteriniz.

R^3 ün keyfi bir elemanı $v = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$ olsun.

$$c_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} + c_2 \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} + c_3 \begin{bmatrix} 2 \\ 5 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$$ oluyorsa

v vektörü $\langle S \rangle$ dedir.

$$c_1 + 2c_3 = x$$
$$c_1 - c_2 + 5c_3 = y$$
$$2c_1 - c_2 + c_3 = z$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 2 & x \\ 1 & -1 & 5 & y \\ 2 & -1 & 1 & z \end{array}\right] \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & x \\ 0 & -1 & 3 & y-x \\ 0 & -1 & -3 & z-2x \end{bmatrix}$$

$H_{21}(-1)$, $H_{31}(-2)$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & x \\ 0 & 1 & -3 & x-y \\ 0 & -1 & -3 & z-2x \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & x \\ 0 & 1 & -3 & x-y \\ 0 & 0 & -6 & -y+z-x \end{bmatrix}$$

$H_2(-1)$ $\qquad$ $H_{32}(1)$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & x \\ 0 & 1 & -3 & x-y \\ 0 & 0 & 1 & \frac{y+x-z}{6} \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \frac{2x-y+z}{3} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{-z-y+3x}{2} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{-z+y+x}{6} \end{bmatrix}$$

$H_3\left(\frac{-1}{6}\right)$ $\qquad$ $H_{23}(3)$, $H_{13}(-2)$

$$c_1 = \frac{2x-y+z}{3} \qquad c_2 = \frac{-z-y+3x}{2} \qquad c_3 = \frac{-z+y+x}{6}$$

Bu sistemin çözümü vardır. R^3 deki her vektör verilen üç vektörün bir lineer kombinasyonu olarak yazılır o halde $\langle S \rangle = R^3$ olur.

ÖR/ R^3 vektör uzayının alt kümesi

$$S=\left\{\begin{bmatrix}1\\2\\1\end{bmatrix},\begin{bmatrix}1\\5\\7\end{bmatrix},\begin{bmatrix}1\\-2\\-7\end{bmatrix}\right\}$$ olsun. $V=\begin{bmatrix}3\\2\\4\end{bmatrix}$ vektörünün

$\langle S\rangle$ ye ait olup olmadığını araştırınız.

$$c_1\begin{bmatrix}1\\2\\1\end{bmatrix}+c_2\begin{bmatrix}1\\5\\7\end{bmatrix}+c_3\begin{bmatrix}1\\-2\\-7\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}3\\2\\4\end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned}c_1+c_2+c_3&=3\\2c_1+5c_2-2c_3&=2\\c_1+7c_2-7c_3&=4\end{aligned}$$

denklem sisteminin çözümünün olmadığı görülür.
V, $\langle S\rangle$ altuzayı ait değildir.

$$[A;B]=\left[\begin{array}{ccc|c}1&1&1&3\\2&5&-2&2\\1&7&-7&4\end{array}\right]\sim\left[\begin{array}{ccc|c}1&1&1&3\\0&3&-4&-4\\0&6&-8&1\end{array}\right]\sim\left[\begin{array}{ccc|c}1&1&1&3\\0&3&-4&-4\\0&0&0&9\end{array}\right]$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c}1&1&1&3\\0&1&-4/3&-4/3\\0&0&0&1\end{array}\right]$$ $r_A=2\neq r_{A:B}=3$ çözüm yok.

Tanım; V vektör uzayında $V_1, V_2 \dots V_m$ m tane vektör ve $c_1, c_2 \dots c_m$ m tane skaler için

$c_1V_1+c_2V_2+\dots+c_mV_m=0$ ifadesi sadece

$c_1=c_2=\dots=c_m=0$ için sağlanıyorsa $V_1, V_2 \dots V_m$ lineer bağımsız, c_i lerden en az biri sıfırdan farklı iken sağlanıyorsa $V_1, V_2 \dots V_m$ vektörlerine lineer bağımlı denir.

ÖR/ R^3 de $v_1=(1,1,1)$, $v_2=(1,2,1)$, $v_3=(1,0,-2)$ vektörleri lineer bağımsızdır.

$$c_1v_1+c_2v_2+c_3v_3=0$$

$$c_1(1,1,1)+c_2(1,2,1)+c_3(1,0,-2)=(0,0,0)$$

$$c_1+c_2+c_3=0$$
$$c_1+2c_2=0$$
$$c_1+c_2-2c_3=0$$

$$\begin{bmatrix}1&1&1&0\\1&2&0&0\\1&1&-2&0\end{bmatrix}\sim\begin{bmatrix}1&1&1&0\\0&1&-1&0\\0&0&-3&0\end{bmatrix}\sim\begin{bmatrix}1&1&1&0\\0&1&-1&0\\0&0&1&0\end{bmatrix}$$

Type your text

$$\begin{bmatrix}1&1&0&0\\0&1&0&0\\0&0&1&0\end{bmatrix}\sim\begin{bmatrix}1&0&0&|&0\\0&1&0&|&0\\0&0&1&|&0\end{bmatrix}$$ $c_1=c_2=c_3=0$

v_1, v_2, v_3 lineer bağımsız.

Şöylede bakabilirsiniz.

$$A=\begin{bmatrix}1&1&1\\1&2&0\\1&1&-2\end{bmatrix}\qquad |A|=\begin{vmatrix}1&1&1\\1&2&0\\1&1&-2\end{vmatrix}\neq 0$$ ise lineer homojen denk sisteminin sadece sıfır çözümü vardır. yani $r=n$ dir

ÖR/ P_2 uzayında $S=\{\underbrace{x^2+2x+2}_{v_1},\underbrace{-x^2+3x-1}_{v_2},\underbrace{x^2+2x-1}_{v_3}\}$ kümesinin lineer bağımsız olup olmadığını araştırınız.

$$c_1(x^2+2x+2)+c_2(-x^2+3x-1)+c_3(x^2+2x-1)=0$$

$$(c_1-c_2+c_3)x^2+(2c_1+3c_2+2c_3)x+(2c_1-c_2-c_3)=0$$

$$\left.\begin{array}{l}c_1-c_2+c_3=0\\2c_1+3c_2+2c_3=0\\2c_1-c_2-c_3=0\end{array}\right\}$$ lineer denklem sistemi çözülürse $c_1=c_2=c_3=0$ elde edilir.

v_1, v_2, v_3 lineer bağımsızdır.

Teorem: n boyutlu V vektör uzayında m tane vektör

$$v_1 = (a_{11}, a_{12} -- a_{1n})$$
$$v_2 = (a_{21}, a_{22}, -- a_{2n})$$
$$\vdots$$
$$v_m = (a_{m1}, a_{m2}, -- a_{mn})$$ olsun. Eğer

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & -- & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & -- & a_{2n} \\ \vdots & & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & -- & a_{mn} \end{bmatrix}$$

matrisinin rangı r ise

1) Verilen m vektörden r tanesi lineer bağımsızdır.

2) $r<m$ ise geriye kalan $m-r$ vektörün herbiri bu r vektörün lineer kombinasyonu şeklinde yazılabilir. ve m vektör lineer bağımlı olur.

3) $n=m$ ise m vektörün lineer bağımsız olması için gerek ve yeter koşul $|A| \neq 0$ dir.

ÖR/ R^3 vektör uzayında $v_1 = (1,0,-3)$, $v_2 = (1,0,0)$, $v_3 = (0,0,1)$, $v_4 = (1,-1,0)$ vektörlerinin lineer bağımlı olup olmadığını araştırınız. lineer bağımlı iseler aralarındaki bağıntıyı bulunuz.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -3 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 3 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 3 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 3 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & -3 \\ 0 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$ elde edilir.

$r=3$ olduğundan 3 vektör lineer bağımsız.

$m=4$ $(r<m)$ 1 vektör lineer bağımlı

$$c_1 V_1 + c_2 V_2 + c_3 V_3 + c_4 V_4 = 0$$

$$c_1 (1,0,-3) + c_2 (1,0,0) + c_3 (0,0,1) + c_4 (1,-1,0) = (0,0,0)$$

$$c_1 + c_2 + c_4 = 0 \qquad c_4 = 0$$
$$-c_4 = 0$$
$$-3c_1 + c_3 = 0$$

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ -3 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 1 & 3 & 0 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1/3 & 1 & 0 \end{array}\right]$$

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & -1/3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1/3 & 1 & 0 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & -1/3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1/3 & 0 & 0 \end{array}\right] \qquad r_A = r_{A:B} = 3$$
$$n = 4$$

$$c_1 - \frac{1}{3} c_3 = 0 \qquad c_3 = k = 3 \text{ olsun. (keyfi)}$$
$$c_4 = 0$$
$$c_2 + \frac{1}{3} c_3 = 0$$

$$\left.\begin{array}{l} c_1 = \frac{1}{3} k \\ c_2 = -\frac{1}{3} k \\ c_4 = 0 \\ c_3 = k \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{array}{l} c_1 = 1 \\ c_2 = -1 \\ c_4 = 0 \\ c_3 = 3 \end{array}$$

Type your text

$$V_1 - V_2 + 3V_3 = 0$$

$$V_3 = \frac{V_2 - V_1}{3} \text{ elde edilir.}$$

II yol: $v_1 = (1,0,-3)$ $v_2 = (1,0,0)$ $v_3 = (0,0,1)$ $v_4 (1,-1,0)$

$$c_1 v_1 + c_2 v_2 + c_3 v_3 + c_4 v_4 = 0$$

$$c_1 (1,0,-3) + c_2 (1,0,0) + c_3 (0,0,1) + c_4 (1,-1,0)$$

$$c_1 + c_2 + c_4 = 0$$
$$-c_4 = 0$$
$$-3c_1 + c_3 = 0$$

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ -3 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 1 & 3 & 0 \end{array}\right] \sim$$

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1/3 & 1 & 0 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & -1/3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1/3 & 1 & 0 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & -1/3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1/3 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

$r_A = r_{A:B} = 3$ $\quad m = 4$ $\quad n - r = 4 - 3 = 1$ keyfi sbt seç.

$$\left.\begin{array}{l} c_1 - \frac{1}{3} c_3 = 0 \\ c_4 = 0 \\ c_2 + \frac{1}{3} c_3 = 0 \end{array}\right\} \quad c_3 = 3 \text{ aldık}$$

$c_1 = 1$
$c_2 = -1$
$c_4 = 0$
$c_3 = 3$

$$c_1 v_1 + c_2 v_2 + c_3 v_3 + c_4 v_4 = 0$$

$v_1 - v_2 + 3v_3 = 0$ aralarındaki bağıntı.

ÜDR/ R^4 vektör uzayında $v_1 = (2,3,1,-1)$, $v_2 = (2,3,1,-2)$, $v_3 = (4,6,2,-3)$ vektörlerinin lineer bağımlı olup olmadığını araştırınız. Lineer bağımlı iseler aralarındaki bağıntıyı bulunuz.

$$c_1 v_1 + c_2 v_2 + c_3 v_3 = 0$$

$$c_1(2,3,1,-1) + c_2(2,3,1,-2) + c_3(4,6,2,-3) = (0,0,0,0)$$

$$\left.\begin{aligned} 2c_1 + 2c_2 + 4c_3 &= 0 \\ 3c_1 + 3c_2 + 6c_3 &= 0 \\ c_1 + c_2 + 2c_3 &= 0 \\ -c_1 - 2c_2 - 3c_3 &= 0 \end{aligned}\right\}$$ lineer denk sistemi elde edilir.

$$[A:B] = \left[\begin{array}{ccc|c} 2 & 2 & 4 & 0 \\ 3 & 3 & 6 & 0 \\ 1 & 1 & 2 & 0 \\ -1 & -2 & -3 & 0 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 0 \\ 3 & 3 & 6 & 0 \\ 2 & 2 & 4 & 0 \\ -1 & -2 & -3 & 0 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 0 \end{array}\right]$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

$$c_1 + c_3 = 0$$
$$c_2 + c_3 = 0$$

$r_A = r_{A:B} = 2$ $\quad m - r = 1$ keyfi sbt seç

$m = 3$

$c_3 = 1$ alalım.

$$\left.\begin{aligned} c_1 &= -1 \\ c_2 &= -1 \end{aligned}\right\}$$ olur.

$c_1 = -1$
$c_2 = -1$
$c_3 = 1$

$$-v_1 - v_2 + v_3 = 0$$

$v_3 = v_1 + v_2$ elde edilir.

ÖR/ R^4 vektör uzayında $V_1=(2,1,3,0)$, $V_2=(0,1,2,4)$ $V_3=(-1,-2,0,3)$ vektörlerinin lineer bağımlı olup olmadığını araştırınız. Lineer bağımlı iseler aralarındaki bağıntıyı bulunuz.

$$c_1V_1+c_2V_2+c_3V_3=0$$

$$c_1(2,1,3,0)+c_2(0,1,2,4)+c_3(-1,-2,0,3)=0$$

$$\left.\begin{array}{l} 2c_1-c_3=0 \\ c_1+c_2-2c_3=0 \\ 3c_1+2c_2=0 \\ 4c_2+3c_3=0 \end{array}\right\}$$

$$\begin{bmatrix} 2 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & -2 & 0 \\ 3 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 3 & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 1 & -2 & 0 \\ 2 & 0 & -1 & 0 \\ 3 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 3 & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & -2 & 3 & 0 \\ 0 & -1 & 6 & 0 \\ 0 & 4 & 3 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & -2 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & -6 & 0 \\ 0 & 4 & 3 & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & -2 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & -6 & 0 \\ 0 & 0 & 27 & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & -9 & 0 \\ 0 & 1 & -6 & 0 \\ 0 & 0 & 27 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -6 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \quad \left.\begin{array}{l} m=3 \\ r_A=r_{A:B}=3 \end{array}\right\} \quad r=m \text{ tüm vektörler lineer bağımsız}$$

Tanım; V bir vektör uzayı S de V nin bir alt kümesi olsun. Eğer

1) S, V nin bir lineer bağımsız alt kümesi
2) $\langle S \rangle = V$

şartları sağlanıyorsa S ye V nın bir tabanı veya bazı denir.

ÖR/ $T = \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} \cdots \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$ kümesi R^n in bir tabanıdır. Bu tabana R^n nin standart tabanı (bazı) denir.

ÖR/ $T = \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \right\}$ kümesi R^3 ün bir tabanıdır.

Gösterelim.

1) T nin lineer bağımsız olduğunu gösterelim.

$$c_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix} + c_2 \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix} + c_3 \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\left. \begin{aligned} c_1 + c_2 &= 0 \\ -c_2 + c_3 &= 0 \\ -c_1 &= 0 \end{aligned} \right\} \quad c_1 = 0 \quad c_2 = 0 \quad c_3 = 0$$

T lineer bağımsız.

2) T nin R^3 ü gerdiğini gösterelim.

$$c_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix} + c_2 \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix} + c_3 \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix}$$

$$\left. \begin{aligned} c_1 + c_2 &= a \\ -c_2 + c_3 &= b \\ -c_1 &= c \end{aligned} \right\} \quad \begin{aligned} c_1 &= -c \\ c_2 &= a + c \\ c_3 &= a + b + c \end{aligned}$$

Lineer denk. çözülürse

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & a \\ 0 & -1 & 1 & b \\ -1 & 0 & 0 & c \end{array} \right] \sim \cdots \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -c \\ 0 & 1 & 0 & a+c \\ 0 & 0 & 1 & a+b+c \end{bmatrix}$$

ÖR/ $T=\{x^2+1,\ x+2,\ -x^2+x\}$ nin $V=P_2$ için bir taban olduğunu gösteriniz.

1) Lineer bağımsızlığı gösterelim.

$$c_1(x^2+1)+c_2(x+2)+c_3(-x^2+x)=0x^2+0x+0$$

$$(c_1-c_3)x^2+(c_2+c_3)x+(c_1+2c_2)=0x^2+0x+0$$

$$c_1-c_3=0 \qquad c_2+c_3=0 \qquad c_1+2c_2=0$$

$c_1=0=c_2=c_3=0$ T kümesi lineer bağımsızdır.

$$c_1(x^2+1)+c_2(x+2)+c_3(-x^2+x)=ax^2+bx+c$$

$$(c_1-c_3)x^2+(c_2+c_3)x+(c_1+2c_2)=ax^2+bx+c$$

$$c_1-c_3=a$$
$$c_2+c_3=b$$
$$c_1+2c_2=c$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & a \\ 0 & 1 & 1 & b \\ 1 & 2 & 0 & c \end{array}\right] \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & a \\ 0 & 0 & 1 & b \\ 0 & 2 & 1 & c-a \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & a \\ 0 & 1 & 1 & b \\ 0 & 0 & -1 & c-a-2b \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & a \\ 0 & 0 & 1 & b \\ 0 & 0 & 1 & a+2b-c \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 2a+2b-c \\ 0 & 1 & 0 & -a-b+c \\ 0 & 0 & 1 & a+2b-c \end{bmatrix}$$

$c_1=2a+2b-c$, $c_2=c-a-b$, $c_3=a+2b-c$

Tek çözümü elde edilir. $\langle T\rangle=P_2$ dir.

T, P_2 için bir tabandır.

Tanım; V vektör uzayı olsun. V nin herhangi bir tabanındaki vektör sayısına V nin boyutu denir ve boy(V) ile gösterilir.

Teorem; V, n boyutlu bir vektör uzayı olsun. Aşağıdakiler sağlanır.

1) Eğer $T=\{v_1, v_2 \dots v_n\}$ lineer bağımsız ise $\langle T\rangle = V$ dir. ve T, V nin bir tabanıdır.

2) $T=\{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ ve $\langle T\rangle = V$ ise T lineer bağımsızdır ve V nin bir tabanıdır.

ÖR/ R^3 de $a=(-1,1,1)$ $b=(0,2,3)$ $c=(1,-1,0)$ olmak üzere $T=\{a,b,c\}$ kümesi veriliyor. T nin R^3 ün bir tabanı olduğunu gösteriniz

boy $(R^3)=3$ ve T de üç vektör vardır. T nin taban olduğunu göstermek için lineer bağımsız olduğunu göstermemiz yeterlidir.

$$c_1 a + c_2 b + c_3 c = 0$$

$$c_1(-1,1,1) + c_2(0,2,3) + c_3(1,-1,0) = 0$$

$$\left.\begin{aligned} -c_1 + c_3 &= 0 \\ c_1 + 2c_2 - c_3 &= 0 \\ c_1 + 3c_2 &= 0 \end{aligned}\right\} \quad c_1 = c_2 = c_3 = 0$$

T lineer bağımsızdır.

T, R^3 ün bir tabanıdır.

ÖR/

$$S=\left\{\begin{bmatrix}1&1\\0&1\end{bmatrix},\begin{bmatrix}0&2\\1&3\end{bmatrix},\begin{bmatrix}0&0\\-1&2\end{bmatrix},\begin{bmatrix}0&-2\\0&3\end{bmatrix}\right\}$$

kümesinin M_{22} için bir taban olup olmadığını araştırınız.

M_{22} uzayının boyutu 4 olduğundan S kümesi lineer bağımsız ise M_{22} için bir tabandır.

S kümesinin lineer bağımsız olup olmadığını araştıralım.

$$c_1\begin{bmatrix}1&1\\0&1\end{bmatrix}+c_2\begin{bmatrix}0&2\\1&3\end{bmatrix}+c_3\begin{bmatrix}0&0\\-1&2\end{bmatrix}+c_4\begin{bmatrix}0&-2\\0&3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0&0\\0&0\end{bmatrix}$$

$$\left.\begin{aligned}c_1&=0\\c_1+2c_2-2c_4&=0\\c_2-c_3&=0\\c_1+3c_2+2c_3+3c_4&=0\end{aligned}\right\}$$ denklem sistemi elde edilir.

Bu denklem sisteminin katsayılar matrisinin determinantı

$$\begin{vmatrix}1&0&0&0\\1&2&0&-2\\0&1&-1&0\\1&3&2&3\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}2&0&-2\\1&-1&0\\3&2&3\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}2&0&0\\1&-1&1\\3&2&6\end{vmatrix}=-16\neq0$$

olduğundan S kümesi lineer bağımsızdır.

Bu durumda S, M_{22} uzayının bir tabanıdır.

ÖR/ R^3 ün $\left\{ \begin{bmatrix} 7 \\ 6 \\ 4 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 11 \\ 10 \\ 7 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$ kümesi ile verilen V alt uzayının bir tabanını bulup boyutunu belirleyiniz.

c_1, c_2, c_3, c_4 skalerler olmak üzere

$$c_1 \begin{bmatrix} 7 \\ 6 \\ 4 \end{bmatrix} + c_2 \begin{bmatrix} 11 \\ 10 \\ 7 \end{bmatrix} + c_3 \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix} + c_4 \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$ olsun.

Bu denkleme karşı gelen arttırılmış katsayılar matrisinin satırca indirgenmiş eşolan formu

$$7c_1 + 11c_2 + c_3 + 3c_4 = 0$$
$$6c_1 + 10c_2 + 2c_3 + 2c_4 = 0$$
$$4c_1 + 7c_2 + 2c_3 + c_4 = 0$$

$$-1 \left[\begin{array}{cccc|c} 7 & 11 & 1 & 3 & 0 \\ 6 & 10 & 2 & 2 & 0 \\ 4 & 7 & 2 & 1 & 0 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & -1 & 1 & 0 \\ 6 & 10 & 2 & 2 & 0 \\ 4 & 7 & 2 & 1 & 0 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 4 & 8 & -4 & 0 \\ 0 & 3 & 6 & -3 & 0 \end{array}\right]$$

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & -1 & 0 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & -3 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

matrisidir. İlk 1 ler 1-inci, 2-inci sütunda bulunduğundan V nin bir tabanı olarak

$\left\{ \begin{bmatrix} 7 \\ 6 \\ 4 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 11 \\ 10 \\ 7 \end{bmatrix} \right\}$ kümesi alınabilir. boy $V = 2$ bulunur.

ÖR/ P_3 uzayında

$$S=\{t^2+1,\ t^3-2t,\ 2t^3+3t^2-4t+3,\ t^3+t^2-2t+1\}$$

kümesinin gerdiği alt uzayın bir tabanı bulup boyutunu belirleyiniz.

$$c_1(t^2+1)+c_2(t^3-2t)+c_3(2t^3+3t^2-4t+3)+c_4(t^3+t^2-2t+1)=0$$

Bu denkleme karşı gelen arttırılmış katsayılar matrisinin satırca indirgenmiş eşolan formu

$$c_1+c_1t^2+c_2t^3-2c_2t+2c_3t^3+3c_3t^2-4c_3t+3c_3+c_4t^3+$$

$$c_4t^2-2c_4t+c_4=0$$

$$t^3(c_2+2c_3+c_4)+t^2(c_1+3c_3+c_4)+t(-2c_2-4c_3-2c_4)$$

$$+(c_1+3c_3+c_4)=0$$

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 0 & 1 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & -4 & -2 & 0 \\ 1 & 0 & 3 & 1 & 0 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{cccc|c} 0 & 1 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

Burada ilk 1 ler 1-inci ve 2-inci sutunda bulunduğundan $\{t^2+1,\ t^3-2t\}$ kümesi S nin gerdiği alt uzayın bir tabanı olup boyutu 2 dir.

$v_1=t^2+1 \quad v_2=t^3-2t,\ v_3=2t^3+3t^2-4t+3$

$v_4=t^3+t^2-2t+1$

$v_1+v_2=v_4 \qquad 3v_1+2v_2=v_3$

ÖR/ W, tüm 3. mertebeden ters simetrik matrislerin kümesi olsun. W nin M_{33} uzayının bir alt uzayı olduğunu gösterip W nin bir tabanını bulunuz.

$W = \{ A \in M_{33} ; A^t = -A \}$ dir.

$A, B \in W$ ve α bir skaler olsun.

Bu durumda
$A^t = -A$ ve $B^t = -B$ dir.

Alt uzay olduğunu gösteriyoruz.
(W, nun M_{33} ın alt uzayı olduğunu gösterelim.)

a) $A + B \overset{?}{\in} W$

$A + B = -A^t - B^t = -(A^t + B^t) = -(A+B)^t$

olduğundan $A + B \in W$ olur

b) $\alpha A \overset{?}{\in} W$

$(\alpha A)^t = \alpha A^t = \alpha(-A) = -(\alpha A)$

$(\alpha A)^t = -(\alpha A)$ olduğundan

$\alpha A \in W$ dir.

W, altı uzay olma koşulunu sağladığından M_{33} ün bir alt uzayıdır.

W de herhangi bir eleman

$$\begin{bmatrix} 0 & a & b \\ -a & 0 & c \\ -b & -c & 0 \end{bmatrix}$$ şeklinde olduğundan

$$W, \left\{ \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix} \right\}$$

kümesi ile gerilir. (üretilir) Bu küme lineer bağımsız olduğundan W nin bir tabanıdır.

ÖR/ $S = \left\{ \underset{v_1}{\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}}, \underset{v_2}{\begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}}, \underset{v_3}{\begin{bmatrix} 3 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}} \right\}$ kümesinin R^3 uzayını gerip-germediğini belirleyiniz.

Her $\begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} \in R^3$ için

$\begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} = c_1 v_1 + c_2 v_2 + c_3 v_3$ olacak şekilde c_1, c_2, c_3 skalerleri bulunabilirse S, R^3 ü gerer.

$$c_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} + c_2 \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix} + c_3 \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix}$$

$$c_1 + 2c_2 + 3c_3 = a$$
$$c_1 + 2c_2 = b$$
$$c_1 = c$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & a \\ 1 & 2 & 0 & b \\ 1 & 0 & 0 & c \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & a \\ 0 & 0 & -3 & b-a \\ 0 & -2 & -3 & c-a \end{array}\right]$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & a \\ 0 & 0 & 1 & \frac{a-b}{3} \\ 0 & -2 & -3 & c-a \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & a \\ 0 & 0 & 1 & \frac{a-b}{3} \\ 0 & 1 & \frac{3}{2} & \frac{a-c}{2} \end{array}\right]$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & a \\ 0 & 1 & 3/2 & \frac{a-c}{2} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{a-b}{3} \end{array}\right]$$

$c_3 = \frac{a-b}{3}$ ✓

$c_2 + \frac{3}{2} c_3 = \frac{a-c}{2} \Rightarrow c_2 + \frac{\cancel{3}}{2}\left(\frac{a-b}{\cancel{3}}\right) = \frac{a-c}{2}$

$c_2 = \frac{a-c}{2} + \frac{b-a}{2}$

$c_2 = \frac{b-c}{2}$ ✓

$c_1 + 2c_2 + 3c_3 = a$

$c_1 + 2.\left(\frac{b-c}{2}\right) + 3.\left(\frac{a-b}{3}\right) = a$

$c_1 + (b-c) + (a-b) = a$

$c_1 = \cancel{a} - \cancel{a} + b - b + c$

$c_1 = c$ ✓

Bu durumda S, R^3 ü gerer.

Koordinatlar ve Geçiş Matrisi

V, n boyutlu bir vektör uzayının her tabanında n tane vektör olduğunu biliyoruz. Buraya kadar tabandaki vektörlerin sırasına çok önem vermedik. Bu kısımda V nin sıralı tabanından söz edeceğiz.

$T_1 = \{v_1, v_2 \dots v_n\}$ V nin sıralı bir tabanı ise
$T_2 = \{v_2, v_1 \dots v_n\}$ V nin farklı sıralı bir tabanıdır.

Teorem: V, n boyutlu bir vektör uzayı ve $T = \{v_1, v_2 \dots v_n\}$, V nin sıralı bir tabanı olsun. V nin her v vektörü

$$v = c_1 v_1 + c_2 v_2 + \dots + c_n v_n$$

biçiminde tek türlü yazılabilir.

Tanım: V, n boyutlu bir vektör uzayı ve $T = \{v_1, v_2 \dots v_n\}$, V nin sıralı bir tabanı olsun. $c_1, c_2 \dots c_n$ skalerler olmak üzere V nin her v vektörü tek türlü olarak

$$v = c_1 v_1 + c_2 v_2 + \dots + c_n v_n$$

şeklinde ifade edilebilir. v vektörünün T sıralı tabanına göre koordinat vektörü $[v]_T$ şeklinde gösterilir ve

$$[v]_T = \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_n \end{bmatrix}$$

olarak tanımlanır.

$c_1, c_2 \dots c_n$ ye yani $[v]_T$ nin bileşenlerine v vektörünün T tabanına göre koordinatları denir.

ÖR/ $R^3 = V$ vektör uzayının sıralı bir tabanı

$u_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \end{bmatrix}$ $u_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix}$ $u_3 = \begin{bmatrix} -5 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ olmak üzere

$T = \{u_1, u_2, u_3\}$ olsun. Eğer $u = \begin{bmatrix} -4 \\ 4 \\ 2 \end{bmatrix}$ ise $[v]_T$

koordinat vektörünü bulunuz.

V nin u vektörü

$$c_1 u_1 + c_2 u_2 + c_3 u_3 = u$$ şeklinde ifade edilir.

T sıralı tabanına göre koordinat vektörü $[v]_T$ yi bulmak için c_1, c_2, c_3 sabitlerini bulmamız gerekir.

$$c_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \end{bmatrix} + c_2 \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix} + c_3 \begin{bmatrix} -5 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -4 \\ 4 \\ 2 \end{bmatrix}$$ den

$$\left.\begin{aligned} c_1 - 5c_3 &= -4 \\ 2c_1 - c_2 + c_3 &= 4 \\ 4c_1 + 2c_2 &= 2 \end{aligned}\right\}$$ lineer denk sistemi çözülürse

$c_1 = 1$ $c_2 = -1$ $c_3 = 1$ bulunur.

$[v]_T = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}$ elde edilir.

Tanım; V, n boyutlu vektör uzayı $S = \{u_1, u_2 -- u_n\}$ ve $T = \{v_1, v_2 -- v_n\}$ V nin sıralı iki tabanı olsunlar

$\forall\ i = 1, 2 -- n$ için

$[v_i]_S = \begin{bmatrix} a_{1i} \\ a_{2i} \\ \vdots \\ a_{ni} \end{bmatrix}$ olmak üzere $\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$

matrisine T tabanından S tabanına geçiş matrisi denir. $[M]_T^S$ ile gösterilir.

ÖR/ R^3 vektör uzayında $T=\left\{\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix},\begin{bmatrix}0\\1\\0\end{bmatrix},\begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix}\right\}$ sıralı tabanı ve $S=\left\{\begin{bmatrix}0\\1\\0\end{bmatrix},\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix},\begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix}\right\}$ farklı sıralı tabanı verilsin.

a) T sıralı tabanından S farklı sıralı tabanına geçiş matrisini bulunuz. $[M]_T^S=?$

b) $v=\begin{bmatrix}1\\2\\3\end{bmatrix}$ vektörünün S sıralı tabanına göre koordinat vektörünü bulunuz. $[v]_S=?$

I yöntem/ $[M]_T^S$ geçiş matrisini bulmak için T deki vektörler t_1, t_2, t_3 ve S deki vektörler s_1, s_2, s_3 ve geçiş matrisinin sütun vektörleri $[t_1]_S$, $[t_2]_S$, $[t_3]_S$ ile gösterilsin.

$$\left.\begin{aligned} a_1 s_1 + a_2 s_2 + a_3 s_3 &= t_1 \\ b_1 s_1 + b_2 s_2 + b_3 s_3 &= t_2 \\ c_1 s_1 + c_2 s_2 + c_3 s_3 &= t_3 \end{aligned}\right\}$$

$a_1, a_2, a_3, b_1, b_2, b_3, c_1, c_2, c_3$ katsayıları bulunacak

$$a_1\begin{bmatrix}0\\1\\0\end{bmatrix}+a_2\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix}+a_3\begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix} \qquad a_1=0 \quad a_2=1 \quad a_3=0$$

$$[t_1]_S=\begin{bmatrix}0\\1\\0\end{bmatrix}$$

$$b_1\begin{bmatrix}0\\1\\0\end{bmatrix}+b_2\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix}+b_3\begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\1\\0\end{bmatrix} \qquad b_1=1 \quad b_2=0 \quad b_3=0$$

$$[t_2]_S=\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix}$$

$$c_1\begin{bmatrix}0\\1\\0\end{bmatrix}+c_2\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix}+c_3\begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix} \quad c_1=0 \quad c_2=0 \quad c_3=1$$

$$[t_3]_S=\begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix} \checkmark$$

$$[M]_T^S=\begin{bmatrix}0&1&0\\1&0&0\\0&0&1\end{bmatrix} \text{ dir.}$$

II yöntem/

$$\left.\begin{aligned} a_1s_1+a_2s_2+a_3s_3&=t_1\\ b_1s_1+b_2s_2+b_3s_3&=t_2\\ c_1s_1+c_2s_2+c_3s_3&=t_3\end{aligned}\right\}$$

üç bilinmeyenli üç denklemden oluşan lineer denk sistemidir.

$[s_1\ s_2\ s_3 : t_1\ t_2\ t_3]$ matrisine elemanter satır dönüşümleri uygulayarak satırca indirgenmiş eşolon formu elde edilir.

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc}0&1&0&1&0&0\\1&0&0&0&1&0\\0&0&1&0&0&1\end{array}\right]\sim\left[\begin{array}{ccc|ccc}1&0&0&0&1&0\\0&1&0&1&0&0\\0&0&1&0&0&1\end{array}\right]$$

$\underbrace{}_{[M]_T^S}$ dir.

b) $[v]_S=?$

$$\begin{bmatrix}1\\2\\3\end{bmatrix}=c_1\begin{bmatrix}0\\1\\0\end{bmatrix}+c_2\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix}+c_3\begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix}$$

$c_2=1$

$c_1=2$

$c_3=3$

$$[v]_S=\begin{bmatrix}2\\1\\3\end{bmatrix} \text{ olur.}$$

Teorem: V, n boyutlu vektör uzayı S ve T de V nin sıralı iki tabanı olsunlar. Bir $v \in V$ vektörü için $[v]_S = [M]_T^S \cdot [v]_T$ dir.

Teorem: V, n boyutlu bir vektör uzayı S ve T de V nin sıralı iki tabanı olsunlar. T den S ye geçiş matrisi $[M]_T^S$ nin tersi mevcuttur.

$$\left([M]_T^S\right)^{-1} = [M]_S^T \text{ dir.}$$

ÖZDEĞER VE ÖZVEKTÖRLER

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}, \quad X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \text{ olmak üzere}$$

$AX = \lambda X$ denklemini sağlayan λ ya A matrisinin özdeğeri denir.

$$AX = \lambda X$$

$$(AX - \lambda X) = 0 \qquad (A - \lambda I)X = 0 \text{ denklemi elde}$$

edilir. Bu denklem bize bir lineer homojen denklem sistemini verir. Bu sistemin sıfırdan farklı çözümünün olması için katsayılar matrisinin determinantı sıfıra eşit olmalıdır.

Yani $|A - \lambda I| = \begin{vmatrix} a_{11}-\lambda & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22}-\lambda & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn}-\lambda \end{vmatrix} = 0$ olmalıdır.

$|A-\lambda I|$ ifadesi λ ya göre n. dereceden bir polinom olup bu polinoma A matrisinin karakteristik polinomu denir.

$|A-\lambda I|=0$ denklemine de A matrisinin karakteristik denklemi denir.

$P(\lambda)=\lambda^n+a_1\lambda^{n-1}+\dots+a_n$ şeklinde bir polinomdur. n tane gerçel yada karmaşık kökü vardır. $P(x)$ polinomunda $a_1=-\text{iz}A$ ve $a_n=(-1)^n|A|$ dır.

ÖR/ $A=\begin{bmatrix}1 & 0 & 5\\ -2 & -4 & -3\\ 3 & 6 & 0\end{bmatrix}$ matrisine karşılık gelen özdeğerleri bulunuz.

$$|A-\lambda I|=\begin{vmatrix}1-\lambda & 0 & 5\\ -2 & -4-\lambda & -3\\ 3 & 6 & -\lambda\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}2-\lambda & 2-\lambda & 2-\lambda\\ -2 & -4-\lambda & -3\\ 3 & 6 & -\lambda\end{vmatrix}$$

2, 3. sütun 1'e eklendi

$$(2-\lambda)\begin{vmatrix}1 & 1 & 1\\ -2 & -4-\lambda & -3\\ 3 & 6 & -\lambda\end{vmatrix}=(2-\lambda)\begin{vmatrix}1 & 1 & 1\\ 0 & -2-\lambda & -1\\ 0 & 3 & -\lambda-3\end{vmatrix}$$

$$=(2-\lambda)\left[(-2-\lambda)(-\lambda-3)+3\right]$$

$$P(\lambda)=(2-\lambda)(\lambda^2+5\lambda+9)=0$$

$\lambda_{1,2}=\dfrac{-5\mp i\sqrt{11}}{2}$, $\lambda_3=2$ bulunur. özdeğerler

$$P(\lambda)=-\lambda^3-3\lambda^2+\lambda+18=0$$

karakteristik denklem

Tanım; A bir kare matris ve λ, A nın bir özdeğeri olmak üzere

$$AX = \lambda X$$

denklemini sağlayan X vektörüne λ özdeğerine karşılık gelen özvektör denir.

ÖR/ $A = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 3 & -2 \end{bmatrix}$ matrisinin özdeğerlerini ve bunlara karşılık gelen özvektörlerini bulunuz.

$$|A-\lambda I| = \begin{vmatrix} 3-\lambda & 2 \\ 3 & -2-\lambda \end{vmatrix} = 0 \qquad (3-\lambda)(-2-\lambda)-6=0$$

$$P(\lambda)=\lambda^2-\lambda-12=0$$

$\lambda_1=-3 \quad \lambda_2=4$ özdeğerler

$\lambda_1=-3$ için

$A-\lambda_1 I = \begin{bmatrix} 6 & 2 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}$ dir $X=\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$ için

$$(A-\lambda_1 I)X=0 \Rightarrow \begin{bmatrix} 6 & 2 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\left.\begin{aligned} 6x_1+2x_2&=0 \\ 3x_1+x_2&=0 \end{aligned}\right\}$$

$$\begin{bmatrix} 6 & 2 \\ 3 & 1 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 6 & 2 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 1/3 \\ 6 & 2 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 1/3 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \left.\begin{aligned} r&=1 \\ n&=2 \end{aligned}\right\}$$

$n-r=1$ keyfi sbt

$$x_1+\frac{1}{3}x_2=0$$

$x_2=3$ alırsak

$x_1=-1$ olur.

$\lambda_1=-3$'e karşılık gelen özvektör $X_1=\begin{bmatrix} -1 \\ 3 \end{bmatrix}$ öz vektör

$\lambda_2 = 4$ için

$$A - \lambda_2 I = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 3 & -6 \end{bmatrix} \qquad X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \text{ için}$$

$$(A - \lambda_2 I) = 0$$

$$\begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 3 & -6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\left.\begin{aligned} -x_1 + 2x_2 &= 0 \\ 3x_1 - 6x_2 &= 0 \end{aligned}\right\} \quad x_1 = 2x_2$$

$x_2 = 1$ seçersek $x_1 = 2$

$X_2 = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}$ $\lambda_2 = 4$'e karşılık gelen özvektör

Teorem: (Cayley Hamilton Teoremi)

Her matris kendisinin karakteristik denklemini sağlar. Şu halde A bir kare matris ve A nın karakteristik denklemi

$$\lambda^n + a_1 \lambda^{n-1} + a_2 \lambda^{n-2} + \dots + a_n = 0 \text{ ise}$$

$$A^n + a_1 A^{n-1} + a_2 A^{n-2} + \dots + a_n I_n = 0 \text{ dır.}$$

Cayley Hamilton dan yararlanarak bir kare matrisin tersini ve kuvvetlerini hesaplayabiliriz.

Bir A kare matrisinin tersi varsa $|A| \neq 0$ olduğunu biliyoruz. Böylece

$$A^n + a_1 A^{n-1} + a_2 A^{n-2} + \dots + a_n I_n = 0$$

denkleminden

$$a_n I_n = -A\,(A^{n-1} + a_1 A^{n-2} + \dots + a_{n-1} I_n)$$

Buradan iki taraf $\frac{1}{a_n} A^{-1}$ ile çarpılırsa

$$A^{-1} = -\frac{1}{a_n} \left(A^{n-1} + a_1 A^{n-2} + a_2 A^{n-3} + \dots + a_{n-1} I_n \right)$$

elde edilir.

ÖR/ $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 5 \\ -2 & -4 & -3 \\ 3 & 6 & 0 \end{bmatrix}$ matrisinin karakteristik denklemi
$-x^3 - 3x^2 + x + 18 = 0$ idi

$$P(\lambda) = -\lambda^3 - 3\lambda^2 + \lambda + 18 = 0$$

Cayley Hamilton Teo göre A matrisi bu denklemi sağlayacağından

$-A^3 - 3A^2 + A + 18I = 0$ yazılır. Her iki taraf

$$A^{-1} \left(-A^3 - 3A^2 + A + 18I \right) = 0$$

$$-A^2 - 3A + I + 18A^{-1} = 0$$

$$A^{-1} = \frac{1}{18} \left(A^2 + 3A - I \right)$$

$$A^2 = \begin{bmatrix} 16 & 30 & 5 \\ -3 & -2 & 2 \\ -9 & -24 & -3 \end{bmatrix}$$

$$A^{-1} = \frac{1}{18} \left(\begin{bmatrix} 16 & 30 & 5 \\ -3 & -2 & 2 \\ -9 & -24 & -3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 3 & 0 & 15 \\ -6 & -12 & -9 \\ 9 & 18 & 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \right)$$

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 5/3 & 10/9 \\ -1/2 & -5/6 & -7/18 \\ 0 & -1/3 & -2/9 \end{bmatrix}$$

A^5'i hesaplayalım.

$$P(\lambda) = -\lambda^3 - 3\lambda^2 + \lambda + 18 = 0$$

$$-A^3 - 3A^2 + A + 18I = 0$$

$$A \quad (A^3 = -3A^2 + A + 18I) \quad \text{ile çarp}$$

$$A^4 = -3A^3 + A^2 + 18A$$

$$= -3(-3A^2 + A + 18I) + A^2 + 18A$$

$$= 9A^2 - 3A - 54I + A^2 + 18A$$

$$A^4 = 10A^2 + 15A - 54I$$

$$A^5 = 10A^3 + 15A^2 - 54A$$

$$A^5 = 10(-3A^2 + A + 18I) + 15A^2 - 54A$$

$$A^5 = -30A^2 + 10A + 180I + 15A^2 - 54A$$

$$A^5 = -15A^2 - 44A + 180I$$

$$A^5 = -15\begin{bmatrix} 16 & 30 & 5 \\ -3 & -2 & 2 \\ -9 & -24 & -3 \end{bmatrix} - 44\begin{bmatrix} 1 & 0 & 5 \\ -2 & -4 & -3 \\ 3 & 6 & 0 \end{bmatrix} + 180\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$A^5 = \begin{bmatrix} -104 & -450 & -295 \\ 133 & 386 & 102 \\ 3 & 96 & 225 \end{bmatrix}$$

ÖRÜ/ A, 2×2 mertebeden bir matris olsun. Eğer $iz(A)=8$ ve $|A|=12$ ise A matrisinin öz değerlerini bulunuz.

$$A=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \text{ olsun.}$$

$iz A = a_{11}+a_{22}=8$ $\qquad$ $|A|=a_{11}a_{22}-a_{21}a_{12}=12$

$|A-\lambda I|=0$ dan özdeğerleri bulalım.

$$|A-\lambda I| = \begin{vmatrix} a_{11}-\lambda & a_{12} \\ a_{21} & a_{22}-\lambda \end{vmatrix} = 0$$

$$=(a_{11}-\lambda)(a_{22}-\lambda)-a_{21}a_{12}=0$$

$$=\underbrace{a_{11}a_{22}-\lambda\underbrace{(a_{11}+a_{22})}_{8}+\lambda^2-a_{21}a_{12}}_{12}=0$$

$$\lambda^2-8\lambda+12=0$$

$\lambda_1=2$ $\quad$ $\lambda_2=6$ özdeğerleri bulunur.

ÖR/

$A=\begin{bmatrix}1&-2&1\\2&1&0\\1&0&1\end{bmatrix}$ matrisi veriliyor. Cayley Hamilton teo ile A^{-1} ve A^5 i hesaplayınız.

$$|A-\lambda I|=\begin{vmatrix}1-\lambda&-2&1\\2&1-\lambda&0\\1&0&1-\lambda\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1-\lambda&-2&-(\lambda-1)^2+1\\2&1-\lambda&2(\lambda-1)\\1&0&0\end{vmatrix}$$

$$=-\lambda^3+3\lambda^2-6\lambda+4=0 \text{ dan}$$

$$P(\lambda)=-\lambda^3+3\lambda^2-6\lambda+4=0$$

$$-A^3+3A^2-6A+4I=0$$

$$-A^2+3A-6I+4A^{-1}=0$$

$$4A^{-1}=A^2-3A+6I$$

$$A^{-1}=\frac{1}{4}(A^2-3A+6I)$$

$$A^{-1}=\frac{1}{4}\left(\begin{bmatrix}-2&-4&2\\4&-3&2\\2&-2&2\end{bmatrix}-3\begin{bmatrix}1&-2&1\\2&1&0\\1&0&1\end{bmatrix}+6\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}\right)$$

$$A^{-1}=\frac{1}{4}\begin{bmatrix}1&2&-1\\-2&0&2\\-1&-2&5\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1/4&1/2&-1/4\\-1/2&0&1/2\\-1/4&-1/2&5/4\end{bmatrix}$$

$$-A^3+3A^2-6A+4I=0$$

$$A^3=3A^2-6A+4I \Rightarrow A^4=3A^3-6A^2+4A$$

$$A^4=3[3A^2-6A+4I]-6A^2+4A=3A^2-14A+12I$$

$$A^5=3A^3-14A^2+12A=3(3A^2-6A+4I)-14A^2+12A$$

$$A^5=-5A^2-6A+12I$$

$$A^5=\begin{bmatrix}16&32&-16\\-32&21&-10\\-16&10&-4\end{bmatrix}$$

ÖR/

$A = \begin{bmatrix} -3 & 1 & -1 \\ -7 & 5 & -1 \\ -6 & 6 & -2 \end{bmatrix}$ matrisinin özdeğerlerini ve bu özdeğerlere karşılık gelen özvektörlerini bulunuz.

$$|A-\lambda I| = \begin{vmatrix} -3-\lambda & 1 & -1 \\ -7 & 5-\lambda & -1 \\ -6 & 6 & -2-\lambda \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 4-\lambda & \lambda-4 & 0 \\ -7 & 5-\lambda & -1 \\ 1 & \lambda+1 & -1-\lambda \end{vmatrix}$$

$$= (4-\lambda) \begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -7 & 5-\lambda & -1 \\ 1 & \lambda+1 & -1-\lambda \end{vmatrix}$$

$$= (4-\lambda) \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -7 & -2-\lambda & -1 \\ 1 & 2+\lambda & -1-\lambda \end{vmatrix}$$

$$= (4-\lambda)(2+\lambda) \begin{vmatrix} -1 & -1 \\ 1 & -1-\lambda \end{vmatrix}$$

$$= (4-\lambda)(2+\lambda)(1+\lambda+1)$$

$$= (4-\lambda)(2+\lambda)(2+\lambda) = 0$$

$\lambda_1 = 4 \quad \lambda_2 = -2 \quad \lambda_3 = -2$ öz değerler

$\lambda_1 = 4$ için

$$(A-4I) = \begin{bmatrix} -7 & 1 & -1 \\ -7 & 1 & -1 \\ -6 & 6 & -6 \end{bmatrix} \qquad X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$$

$(A-4I)X = 0$ dan

$$\begin{bmatrix} -7 & 1 & -1 \\ -7 & 1 & -1 \\ -6 & 6 & -6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$-7x_1 + x_2 - x_3 = 0$

$-7x_1 + x_2 - x_3 = 0$

$-6x_1 + 6x_2 - 6x_3 = 0$

$$\begin{bmatrix} -7 & 1 & -1 \\ -7 & 1 & -1 \\ -6 & 6 & -6 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} -7 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 5 & -5 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 0 & 36 & -36 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 5 & -5 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 1 & 5 & -5 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 5 & -5 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \left.\begin{matrix} r=2 \\ n=3 \end{matrix}\right\} 1 \text{ keyfi sbt}$$

$x_1 = 0 \qquad x_2 - x_3 = 0$

$x_2 = 1$ için $x_3 = 1$

$\lambda_1 = 4$ 'e karşılık gelen özvektör $X_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ ✓

$\lambda_2 = \lambda_3 = -2$ için

$(A + 2I) = \begin{bmatrix} -1 & 1 & -1 \\ -7 & 7 & -1 \\ -6 & 6 & 0 \end{bmatrix} \qquad X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} \qquad (A+2I)X = 0$

$\begin{bmatrix} -1 & 1 & -1 \\ -7 & 7 & -1 \\ -6 & 6 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$

$-x_1 + x_2 - x_3 = 0$

$-7x_1 + 7x_2 - x_3 = 0$

$-6x_1 + 6x_2 = 0$

$$\begin{bmatrix} -1 & 1 & -1 \\ -7 & 7 & -1 \\ -6 & 6 & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} -1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 6 \\ 0 & 0 & 6 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 6 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$r = 2 \quad n = 3 \quad n - r = 1$ keyfi sbt

$x_1 - x_2 = 0$

$x_3 = 0$

$x_1 = x_2 \qquad x_2 = 1$ içi $x_1 = 1 \qquad x_3 = 0$

$X_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$

ÖR/ $\lambda=0$ sayısının A nın bir özdeğeri olması için gerek ve yeter koşul A nın tersinin bulunmamasıdır. Ispatlayınız.

$\Rightarrow$ $\lambda=0$ değeri A matrisinin bir özdeğeri olsun.

$|\lambda I_n - A| = |-A| = (-1)^n . |A| = 0$ eşitliğinden

$|A|=0$ bulunur. Bu ise A nın tersinin mevcut olmamasıdır.

$\Leftarrow$ A matrisinin tersi mevcut olmasın.

Bu durumda $|A|=0$ dır.

$$0 = (-1)^n . |A| = |-A| = |0 . I_n - A|$$

eşitliğinden $\lambda=0$ değeri A matrisinin bir özdeğeridir.

ÖR/ A, n. mertebeden bir matris ve λ, A nın bir özdeğeri olsun a) Bu durumda A nın tersi mevcut ise $\frac{1}{\lambda}$, A^{-1} in bir özdeğeridir.

A matrisinin tersi mevcut olduğundan $\lambda \neq 0$ dır.

$$AX = \lambda X \Rightarrow \frac{1}{\lambda} AX = X \Rightarrow A^{-1}\left(\frac{1}{\lambda} AX\right) = A^{-1} X$$

$$A^{-1} X = \frac{1}{\lambda} X \Rightarrow \frac{1}{\lambda}, A^{-1} \text{ matrisinin bir özdeğeridir.}$$

b) λ^k, A^k nın bir özdeğeridir. $k=1,2,3...$

$k=2$ için gösterelim.

λ özdeğerine karşılık gelen bir özvektör X olsun.

$$AX = \lambda X \Rightarrow A(AX) = A(\lambda X)$$

$$A^2 X = \lambda \underbrace{(AX)}_{\lambda X}$$

$$A^2 X = \lambda(\lambda X) = \lambda^2 X$$

$$A^2 X = \lambda^2 X$$

λ^2, A^2 matrisinin bir özdeğeridir.

$k=n$ için λ^n, A^n matrisinin bir özdeğeri

yani $A^n X = \lambda^n X$ olsun.

$k=n+1$ için λ^{n+1} in A^{n+1} matrisinin bir özdeğeri olduğunu gösterelim.

$$A(A^n X) = \lambda(\lambda^n X) \Rightarrow A^{n+1} X = \lambda^{n+1} X$$

eşitliğinden istenen elde edilir.

ÖR/ $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \\ 0 & 4 & 6 \end{bmatrix}$ matrisinin tersini Cayley Hamiltonu kullanarak bulunuz.

A matrisinin karakteristik polinomunu bulalım.

$$|\lambda I - A| = \begin{vmatrix} \lambda-1 & 0 & -1 \\ -2 & \lambda-1 & -2 \\ 0 & -4 & \lambda-6 \end{vmatrix} = (\lambda-1)\begin{vmatrix} \lambda-1 & -2 \\ -4 & \lambda-6 \end{vmatrix} - 1\begin{vmatrix} -2 & \lambda-1 \\ 0 & -4 \end{vmatrix}$$

$$|\lambda I - A| = (\lambda-1)\left[(\lambda-1)(\lambda-6)-8\right] - 1\left[8\right]$$

$$= (\lambda-1)\left[\lambda^2 - 6\lambda - \lambda + 6 - 8\right] - 8$$

$$= (\lambda-1)\left[\lambda^2 - 7\lambda - 2\right] - 8$$

$$= \lambda^3 - 7\lambda^2 - 2\lambda - \lambda^2 + 7\lambda + 2 - 8$$

$$|\lambda I - A| = \lambda^3 - 8\lambda^2 + 5\lambda - 6 = 0$$

$$A^3 - 8A^2 + 5A - 6I = 0$$

$$A^{-1}\left[A^3 - 8A^2 + 5A - 6I\right] = 0$$

$$A^2 - 8A + 5I_3 - 6A^{-1} = 0$$

$$A^{-1} = \frac{1}{6}\left[A^2 - 8A + 5I_3\right]$$

$$A^{-1} = \frac{1}{6}\left(\begin{bmatrix} 1 & 4 & 7 \\ 4 & 9 & 16 \\ 8 & 28 & 44 \end{bmatrix} - 8\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \\ 0 & 4 & 6 \end{bmatrix} + 5\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}\right)$$

$$A^{-1} = \frac{1}{6}\begin{bmatrix} -2 & 4 & -1 \\ -12 & 6 & 0 \\ 8 & -4 & 1 \end{bmatrix}$$

ÖR/ 2. mertebeden A matrisinin karakteristik denkleminin (polinomunun)

$$\lambda^2 - \text{iz}\, A\, \lambda + |A| = 0$$ olduğunu

gösteriniz.

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}_{2\times 2}$$ olsun. $\text{iz}\, A = a_{11} + a_{22}$ dir

$$|\lambda I_2 - A| = \begin{vmatrix} \lambda - a_{11} & -a_{12} \\ -a_{21} & \lambda - a_{22} \end{vmatrix} = 0$$ eşitliğinden

$$\lambda^2 - \lambda(a_{11} + a_{22}) + \underbrace{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}}_{|A|} = 0$$ elde edilir.

Bu ise $\lambda^2 - \lambda . \text{iz} A + |A| = 0$ dır.